

Mathematik – Das Werkzeug der Erkenntnis

4. Berechenbarkeit

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E-Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/>

28. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Ein Blick in die Geschichte	4
3	Der Triumph der Idee der Berechenbarkeit	6
4	Die Krise der Idee der Berechenbarkeit	8
4.1	Nichtlinearität	10
4.2	Chaos	12
4.3	Komplexität	14
4.4	Skalenprobleme und Numerik	15
5	Berechenbarkeit in der Mathematik	17
5.1	Die Goldbachsche Vermutung	17
5.2	Das $3n + 1$ -Problem von Collatz	18
5.3	Alan Turing	20

Vorlesung am 27. 1. 2010 in der Bucerius Law School Hamburg.

Anhang: Einige Beispiele für Modellierung	22
A Die Volterraschen Gleichungen der Populationsdynamik	22
B Lanchester-Gleichungen	24
C Klassifikation von Literatur	26
Literatur	27

Von allem, was ausgerechnet wird in der Welt,
geschehen $\frac{2}{3}$ gedankenlos.

Georg Christoph Lichtenberg (1742 – 1799)
[30, Bd. II, S. 781, Heft J [916]]

1 Einleitung

Die größten Rechenanlagen in allen Teilen der Welt stehen nicht in mathematischen Fakultäten, wie man vielleicht meinen würde, sondern in meteorologischen Rechenzentren. Für die Gewinnung von Daten, die man in die meteorologischen Rechner eingibt, wird ein immenser Aufwand getrieben, es gibt zahllose Wetterbeobachtungsstationen und seit neuerer Zeit ein Netz von Meßsatelliten, die in dichter räumlicher und zeitlicher Abtastung meteorologisch relevante Daten der Erdoberfläche, der Atmosphäre und der Meere erfassen. Trotz dieses ungeheuren und kostspieligen Aufwandes stimmen die Wetterprognosen auffallend oft nicht.

Wenn ich einen Ausflug unternehmen möchte, höre ich am Abend vorher den Wetterbericht. Sehr häufig hält sich das reale Wetter nicht an den Wetterbericht und nicht selten sind die Abweichungen sehr groß. Am 18. Januar 2007 gab es hier in Hamburg eine Sturmwarnung, und man empfahl, nach Möglichkeit in den Gebäuden zu bleiben. Ich hatte an diesem Tage eine Wanderung mit einigen Freunden unternommen. Wir erlebten zwar Dauerregen, aber nicht einmal einen nennenswerten Wind. Zwar hatte es durchaus – voraussetzungsgemäß den Orkan *Kyrill* mit starken Sturmschäden gegeben, aber dieser hatte einen etwas anderen Weg genommen, als dies vorhergesagt worden war. Mitte Mai 2007 konnte ich bei einer Rennsteigwanderung in Thüringen die Schäden, die dieser Orkan dort im Walde angerichtet hatte, sehen.

Am 15. Juni 2010 wird eine totale Mondfinsternis stattfinden. Die Totalität dauert bei dieser Finsternis besonders lang, nämlich von 20:22 bis 22:03 (MEZ). Sollte es sich herausstellen, daß die angegebenen Daten auch nur um eine Minute von den vorherberechneten Daten abweichen, dann wäre dies eine Sensation, man müßte die Berechnungen prüfen und gegebenenfalls sogar die zugrundeliegende Theorie einer Revision zu unterziehen.

Ein besonders eindrucksvolles Beispiel der Präzision, die man heute erreichen kann, ist die US-amerikanisch-europäische Cassini-Raumsonde, die das Saturnsystem erreichte. Sie startete am 15. Oktober 1997 zunächst in Richtung Venus, die sie am 26. April 1998 erreichte. Dieser „Umweg“ war eingeplant worden, die Sonde sollte ein sogenanntes *Swingby-Manöver* mit der Venus ausführen. Bei einem solchen Manöver wird die Bahnenergie eines Planeten „angezapft“, um der Sonde eine höhere Geschwindigkeit zu verleihen. Die Bahn der Sonde war jetzt zu einer ausgedehnten Ellipse geworden, die sich erheblich über die Erdbahn hinaus erstreckte. Am 24. Juni 1999 kam die Sonde zurück zur Venus zu einem zweiten Swingby, und am 18. August 1999 holte sich die Sonde, die nunmehr wieder die Erdbahn kreuzte, von der Erde noch eine weitere Portion Energie. Am 30. Dezember 2000 vollführte die Sonde noch ein Swingby-Manöver mit Jupiter und kam dann schließlich am 1. Juli 2004 im Saturn-System an. Dort stieß sie ein Tochterfahrzeug, die Huygens-Sonde aus, die zum Saturnmond Titan flog und dort eine Beobachtungskapsel in die Titanatmosphäre brachte. Diese Kapsel landete am 14. Januar 2005 mittels eines Fallschirms „weich“ auf der Oberfläche des Titan und sandte von dort sehr spektrale Photos und wichtige Daten.

Dieses Unternehmen war ohne Zweifel eine technische Meisterleistung. Weniger bekannt ist, daß dieses Unternehmen auch eine Großtat der Mathematik war. Die hochpräzise Prognose der Bahn der Sonde mit den komplizierten Swingby-Bedingungen ist eine Herausforderung an Theoretiker

und ganz besonders an die Praktiker der Mathematik. Die verschiedenen Bahnvarianten mußten mit großer Genauigkeit durchgerechnet werden, und es mußten dazu besondere Programmwerkzeuge entwickelt werden. Bei den Swingby-Manövern kommt die Sonde in die Nähe eines Planeten und damit in die Nähe einer *Singularität* des Gravitationspotentials, welche die Berechnung äußerst diffizil macht.

Man muß sich fragen, warum im Falle des Wetters von morgen (oder der Aktienkurse von morgen, oder der Auswirkung von staatlichen Lenkungsmaßnahmen auf die Volkswirtschaft ...) die Prognosen so unsicher sind und wie es kommt, daß die Voraussagen etwa in der Raumfahrt (aber nicht nur dort) hochpräzise ausfallen. Eng damit zusammenhängend ist die Frage, ob es in jedem Falle wenigstens prinzipiell möglich ist, genau vorherzusagen. Könnte man etwa das Wetter von morgen genau vorhersagen, wenn man noch größere Rechner einsetzt und die Anzahl der meteorologischen Meßdaten noch weiter vergrößert. Ist es vielleicht so, daß wir hier an eine grundsätzliche Schranke der Berechenbarkeit stoßen? Gibt es überhaupt eine solche Schranke?

2 Ein Blick in die Geschichte

Wie immer, beginne ich mit einem Blick in die Geschichte. Die Vorstellung, daß es Dinge gebe, die man präzise und zuverlässig rechnerisch vorhersagen könne, ist sehr modern. Zwar hat es in der Antike gewisse Theorien gegeben, die es zum Beispiel gestatteten, beeindruckende Bauwerke zu errichten. So bedarf es zum Bau einer Pyramide, wie wir sie aus dem Alten Reich in Ägypten kennen, eines beachtlichen Wissens über Statik und Logistik [34].

Über die Theorien, die im antiken Griechenland Grundlage des Bauwesens waren, ist wenig bekannt. Archimedes von Syrakus (um 287 – 212 v. Chr.) war vorwiegend Mathematiker, seine Beiträge zur Physik, etwa in dem Werk *Über schwimmende Körper* sind rein theoretisch. Die Berichte über Kriegsmaschinen, die er zur Verteidigung von Syrakus konstruiert haben soll, sind Legenden. Heron von Alexandria (zwischen 150 – 250 v. Chr) war mit praxisnahen Problemen befaßt, insbesondere Kriegsmaschinen und seinen berühmten Automaten, beides hatte jedoch kaum Wirkung, und das *Lexikon bedeutender Mathematiker* vermerkt über letzteren [13]:

...obwohl die ihnen zugrundeliegenden physikalischen Prinzipien (Hebelgesetze, Dampfkraft, Druckluft, Hydraulik u. a.) große Potenzen zur Entwicklung der antiken Produktivkräfte bergen, an deren Verwertung unter den Bedingungen der Sklavenarbeit offenbar kein Interesse bestand.

Das antike Rom ist bekannt für seine Architekturleistungen. Auch hier gibt es nur wenige schriftliche Quellen, man kennt die *Zehn Bücher über Architektur* des Marcus Vitruvius Pollio (auch: Vitruv oder Vitruvius), der im ersten nachchristlichen Jahrhundert lebte, aber über seine Person ist wenig bekannt. Seine Bücher sind für unser Thema nicht sehr ergiebig. Sie werden gern als Quelle über historische Persönlichkeiten, mathematische Methoden und antike Meßgeräte benutzt, sind aber nicht sehr zuverlässig. Der Mathematikhistoriker Moritz Cantor schreibt [2, S. 543 ff]:

...daß er mit fast possierlicher Geschwätzigkeit Bemerkungen beizufügen und Geschichtchen zu erzählen liebt, die zu dem behandelten Gegenstande nur in entferntester Beziehung stehen, oft aber erwünschte Mitteilungen enthalten.

Das Werk Vitruvius' hat in der Antike nur ein bescheidenes Echo hervorgerufen. Bekannt wurde es eigentlich erst in der Renaissance. Man kennt die Skizze eines Proportionsschemas der menschlichen Gestalt von Leonardo da Vinci (1452 – 1519). Dieses Schema wird auf Vitruvius zurückgeführt.

Die *Eifel-Wasserleitung* wurde um 80 n. Chr. von römischen Ingenieuren erbaut. Sie versorgte die Stadt Köln mit bis zu 20 000 m³ Wasser pro Tag. Sie überwindet auf einer Länge von 95.4 km einen Höhenunterschied von 365 m (also im Mittel 3.82 m pro km). Bei der Konstruktion mußten die römischen Baumeister eine Trasse finden, die auf der gesamten Strecke ausreichendes Gefälle aufweist. Eine solche Aufgabe mit den Mitteln der Römerzeit zu lösen würde sogar einem heutigen Ingenieurbüro erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

Auch die Baumeister der gotischen Kathedralen verfügten über ein umfassendes theoretisches Wissen [32, 33]. Dieses Wissen war jedoch nicht explizit in der Sprache Mathematik ausgedrückt. Seit der griechischen Antike wurde zwischen der „reinen“ (*επιστήμη*) und der „angewandten“ Wissenschaft (*τέχνη*) streng unterschieden, und die letztere galt als Handwerk, als minder anspruchsvoll. Demgemäß wurde angewandtes Wissen auf andere Weise überliefert, als das reine Wissen der Philosophie. Während wir über die philosophischen und kosmologischen Erkenntnisse der Antike durch zahlreiche Schriften gut informiert sind, wurde das „technische“ Wissen nicht so großzügig verbreitet.

Ein Hauptgrund für diese Herabsetzung der praktischen Wissenschaften war das Platonische Weltbild, nach dem die Dinge dieser Welt, die sinnlich wahrnehmbar sind, nur undeutliche Abbilder der Welt der Ideale sind¹⁾. Im seinem Buch *Der Staat* äußert sich Platon wiederholt sehr abschätzig über die praktische Mathematik und Astronomie. Bezeichnend ist seine Aussage zur Berechenbarkeit [41, II, S. 272]:

Aber das Verhältnis von Nacht und Tag, das Verhältnis dieser zum Monat, das des Monates zum Jahre und das der übrigen Gestirne zu jenem und zu einander betreffend, glaubst du, er werde den nicht für einen Einfaltspinsel halten, der da annähme, diese Dinge erfolgten immer auf dieselbe Weise, und die Himmelskörper wichen nie das mindeste ab, da sie ja materiell und sinnlich sichtbar sind, – und der da glaubte, er müsse auf alle Weise suchen, das wahre Sein an ihnen zu erfassen?

Diese Einstellung hielt sich bis in die Neuzeit. Nicolaus Copernicus (1473 – 1543) war an genauen Beobachtungen oder präzisen Berechnungen nicht sonderlich interessiert, wie aus einer Bemerkung von Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574) hervorgeht [15, S. 175]:

Nicht gern mochte er sich auf kleinste Distanz-Bestimmungen einlassen, wie sie Andere erstrebten, die mit peinlicher Genauigkeit bis auf zwei, drei oder vier Minuten den Ort der Gestirne ermittelt zu haben meinen, während sie zuweilen dabei um ganze Grade abirren. Ich selbst würde hocheifrig sein wie Pythagoras, da er seinen Lehrsatz entdeckte, wenn ich im Stande wäre, meine Ermittlungen bis auf 10 Minuten der Wahrheit nahe zu führen.

Man muß hier hinzufügen, daß eine Beobachtungsgenauigkeit von 10 Bogenminuten zwar zu Kopernikus' Zeit Stand der Kunst war, daß eine solche Beobachtungsgenauigkeit die Leistungen der

¹⁾Man denke an Platons Höhlengleichnis im siebenten Buch des *Staat* [41, II, S. 248 ff.]. Ähnlich kann man Paulus (1. Kor 13, 12) interpretieren: „Wir sehen jetzt durch einen Spiegel ein dunkles Bild; dann aber von Angesicht zu Angesicht. Jetzt erkenne ich stückweise; dann aber werde ich erkennen, wie ich erkannt bin.“

alten Babylonier und Griechen nicht übertraf und daß die Kopernikanische Theorie gegenüber der Ptolemäischen Theorie weder eine Vereinfachung der Rechnungen noch einen Genauigkeitsgewinn brachte [23, Dritter Teil, II].

Hierzu gehört, daß Kopernikus eine Einladung ablehnte, für das das Laterankonzil 1512–1517 Materialien beizusteuern, die die Grundlage einer Kalenderreform bilden sollten, die dann 1582 durch Papst Gregor XIII. eingeführt wurde. Kopernikus schrieb in der 2. Vorrede zum 1. Buch von *De revolutionibus* [15, S. 311–312]

Daher sagt auch Plutarch an der Stelle, wo er das tropische Sonnenjahr behandelt: Bislang entzieht sich die Bewegung der Gestirne der Kenntnis der Mathematiker. Denn, um gerade das Jahr als Beispiel zu nennen, so halte ich es für bekannt, wie verschieden die Meinungen darüber gewesen sind, so sehr, daß viele daran gezweifelt haben, eine zuverlässige Methode für seine Berechnung finden zu können.

Damit es aber nicht so scheint, als hätte ich mein Ausweichen mit diesen Schwierigkeiten bemänteln wollen, werde ich, wenn Gott, ohne den wir nichts vermögen, mir hilft, von anderen Sternen her eine ausführliche Prüfung dieser Fragen versuchen, da wir um so mehr Hilfsmittel zur Unterstützung unseres Vorhabens besitzen, je größer der Zeitraum ist, der zwischen den Begründern dieser Wissenschaft und uns liegt; denn wir können mit ihren Entdeckungen vergleichen, was wir von neuem gefunden haben. Übrigens gestehe ich, daß ich vieles auf andere Art vortragen werde als die Früheren, natürlich auf Grund ihres Verdienstes, da sie ja zuerst den Weg zur Erforschung dieser Dinge gebahnt haben.

Es ist schon erstaunlich, daß Kopernikus Plutarch von Chäronea (um 45 – um 125 n. Chr.) als Gewährsmann zitiert, damit stellt er sich sicher nicht auf die Höhe seiner Zeit. Als „Hilfsmittel zur Unterstützung unseres Vorhabens“ bedurfte es eines Aufwandes, den ein Schülerzirkel Astronomie ohne Schwierigkeiten zu leisten imstande wäre. Kopernikus scheute einfach die Mühe – er hat nicht eben viel oder gar genau beobachtet [23, Dritter Teil, I, S. 121 f.].

Dies änderte sich dramatisch durch zwei Personen, die eine Generation nach Kopernikus lebten. Tycho Brahe (1546 – 1601) steigerte die Beobachtungsgenauigkeit auf etwa eine Bogenminute, nicht durch irgendwelche neuartigen Methoden, sondern allein durch Sorgfalt bei der Konstruktion seiner Instrumente und bei seinen Beobachtungen. Johannes Kepler (1571 – 1630) versuchte, die Genauigkeit der Berechnungen an die Präzision der Braheschen Beobachtungen anzupassen. Dabei gelang es ihm, sich von den antiken Vorurteilen völlig zu befreien, was Galileo Galilei (1564 – 1642) nicht gelang (siehe dazu [7] und [23]). Mittelstraß [37] sieht den entscheidenden Wendepunkt, der die Loslösung vom Ptolemäischen Weltsystem und damit den Beginn der Moderne markiert, bei Kepler, er schreibt: „weshalb es auch richtiger ist, von einer ‚Keplerschen Wende‘ als von einer ‚Copernicanischen Wende‘ zu sprechen“. Kepler verwendete unsäglich viel Zeit und Mühe, um eine Differenz von acht Bogenminuten in seinen Berechnungen zu eliminieren [23, S. 325], einen Differenzbetrag, der sowohl bei Kopernikus als auch bei Ptolemäus als unerheblich und prinzipiell ohne Bedeutung angesehen worden wäre.

3 Der Triumph der Idee der Berechenbarkeit

Auf der Basis der Keplerschen Erkenntnisse konnte dann Isaac Newton (1643 - 1727) seine allgemeine Theorie formulieren, die es erlaubte, auch kompliziertere Aufgabenstellungen der Astronomie rechnerisch präzise nachzuvollziehen. Damit entwickelte sich die Mechanik in einem rasanten

Tempo und wurde zur Grundlage des „Zeitalters der Vernunft“, wie man das 17. und 18. Jahrhundert auch genannt hat [36, S. 22]. Die Erfolge dieser Theorie führten zu einer wahren Euphorie der Berechenbarkeit [35, 46].

Diese Vorstellung von der totalen Berechenbarkeit der Welt formulierte Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827) in der Einleitung zu seiner *Théorie analytique des probabilités* aus dem Jahre 1776 wie folgt [35, Text 76]:

Wir müssen aber den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustandes betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennt, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.

Diese „Intelligenz“, die in der Lage ist, Vergangenheit und Zukunft des Universums genau vorherzusagen, erhielt den Namen *Laplacescher Dämon*. In diesem Weltbild hat der Zufall als ursachloses Geschehen keinen Platz. Man wird bei diesem Weltbild der absoluten Vorherbestimmung an Leibniz’ *prästabilierte Harmonie* [9, S. 64 f.], an sein *Uhrengeleichnis* [35, Text 59] oder auch an den Koran erinnert, in dem immer wieder darauf hingewiesen wird, daß nichts geschieht, was nicht im „deutlichen Buche“ aufgezeichnet ist, zum Beispiel in der zehnten Sure [25, 1062]:

Nichts, was in den Himmeln und was auf Erden ist, bleibt deinem Herrn verborgen, und wäre es auch nur so schwer wie eine Ameise. Es gibt nichts, es sei auch kleiner noch oder größer: Es ist in dem deutlichen Buch aufgezeichnet.

Eine bekannte Anekdote charakterisiert die Situation auf dem Höhepunkt des mechanistischen Weltverständnisses sehr treffend [38, S. 40]:

Der französische Mathematiker und Astronom Pierre Simon de Laplace hatte seine »Himmelsmechanik« veröffentlicht. Napoleon ließ es sich nicht nehmen, den Gelehrten zu beglückwünschen: »Ein großartiges Werk, Marquis! Aber warum kommt in einem Buch über den Himmel das Wort Gott überhaupt nicht vor?« »Dieser Hypothese bedurfte ich nicht!« erwiderte Laplace.

Einen letzten Triumph – der bereits seinen Untergang ahnen ließ – feierte das mechanistische Weltbild mit der kinetischen Gastheorie durch Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822 – 1888) und Ludwig Eduard Boltzmann (1844 – 1906). Nach dieser Theorie läßt sich das Verhalten von Gasen (und Flüssigkeiten) sehr gut beschreiben, indem man das Gas als ein System von sehr vielen Teilchen beschreibt, die rein mechanisch – etwa wie Billardkugeln – miteinander wechselwirken. Da die Anzahl der Teilchen in einem Gas im allgemeinen sehr groß ist, kann man allerdings „praktisch“ nur statistische Kenngrößen aus diesem Modell extrahieren. Daß es mit diesem Modell praktische Schwierigkeiten geben muß, zeigt eine einfache Überschlagsrechnung: Ein Gas enthält etwa $3 \cdot 10^{19}$ Moleküle/cm³. Ein Computer, der in einer Sekunde 1 Milliarde Moleküle zählen kann, würde etwa 800 Jahre rechnen müssen, um alle Moleküle eines Kubikzentimeters eines Gases auch nur zu zählen. Eine solche Größenordnung ist mit heutigen Rechnern – und wahrscheinlich auch mit Rechnern einer absehbaren Zukunft – nicht zu beherrschen. Auch der Laplacesche Dämon

würde daran scheitern müssen, daß es für seine Aufgabe keine geeigneten Rechner gibt, ganz abgesehen von der Datensammlung – der präzisen Bestimmung von Ort und Geschwindigkeit eines jeden Teilchens im Universum. Dennoch wurde die Sichtweise einer zumindest prinzipiellen Berechenbarkeit des Universums, wie wir gesehen haben, noch im Jahre 1908 von Henri Poincaré ausgesprochen (Teil 2. der Vorlesungsreihe, Abschnitt 2.1).

Es stellte sich alsbald heraus, daß irgendetwas an diesem Bild nicht stimmte. Die Vorgänge, die durch die Vielteilchentheorie beschrieben werden, weisen eine Vorzugsrichtung auf, die es sonst in der Mechanik nicht gibt. Wenn man einen Film betrachtet, der den Stoß zweier Billardkugeln zeigt oder die Schwingungen eines Pendels oder die Bewegungen von Planeten in ihren Bahnen um die Sonne, dann kann man nicht entscheiden, ob der Film vorwärts oder rückwärts abgespielt wird. Hingegen ist dieser Unterschied augenfällig, wenn der Vorgang des Auflörens von Zucker in Tee oder das heftige Auftreffen eines rohen Eies auf eine Wand [3] rückwärts abgespielt wird. Hier tritt in der Tat ein neues Phänomen auf, das allein auf die hohe Zahl der beteiligten Teilchen zurückzuführen ist – Hegel und die Philosophen des „dialektischen Materialismus“ hätten ihre Freude an diesem Beleg für das Umschlagen von Quantität in Qualität haben können!

In dem Buch *Descartes' Traum* von Philip J. Davis und Reuben Hersh setzen sich die Autoren sehr kritisch mit der Vorstellung der Berechenbarkeit der Welt auseinander. Sie zitieren eine Anekdote [6, S. 110]:

Professor Philipp Frank (1884 – 1966) pflegte diesen Punkt zu verdeutlichen, indem er ein Blatt Papier zu Boden flattern ließ. Obwohl die grundlegenden Gesetze der Mechanik und Thermodynamik bekannt sind, kann kein Physiker voraussagen, an welcher Stelle das Blatt auftreffen wird.

Wir kehren jetzt zu der Frage zurück, warum man die Bahn der Cassini-Raumsonde mit außerordentlich hoher Präzision berechnen kann, und warum es nicht möglich ist, das Wetter von morgen oder die Bahn eines Blattes Papier einigermaßen genau zu berechnen. Wir hatten schon über den Zufall gesprochen (Teil 2. der Veranstaltungsreihe) und gesehen, daß bei „echtem“ Zufall die Berechenbarkeit zumindest stark eingeschränkt ist. Dies wird sehr gut durch das Hammer-Beispiel von Monod illustriert (Teil 2., Abschnitt 2.1).

4 Die Krise der Idee der Berechenbarkeit

Im neunzehnten und zwanzigsten Jahrhundert entdeckte man eine große Anzahl von mathematischen Tatsachen, die die Vorstellung von der Berechenbarkeit ins Wanken brachten. Bei der sogenannten „Grundlagenkrise“ der Mathematik, die in aller Schärfe von Turing (Alan Mathison Turing, 1912–1954) und ganz besonders von Gödel (Kurt Gödel, 1906–1978) formuliert wurde, ergab sich, daß in der Mathematik nicht jede Aussage beweisbar ist, daß also alle Mathematik grundsätzlich nur Stückwerk sein kann (1. Kor 13,9–10: Denn unser Wissen ist Stückwerk, und unser prophetisches Reden ist Stückwerk. Wenn aber kommen wird das Vollkommene, so wird das Stückwerk aufhören.). Diese „Defekte“ der bis dahin als vollkommen gehaltenen Mathematik beunruhigten nur wenige Menschen, selbst die Mathematiker wurden durch diese Negativaussagen kaum beeindruckt. In den letzten Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts kam es dann aber zu Erkenntnissen, die sich in der alltäglichen Arbeit der angewandten Mathematiker nicht mehr wegdiskutieren ließen. Es sind dies Erscheinungen, die wir mit den Begriffen *Nichtlinearität*, *Komplexität* und *Chaos* verknüpfen wollen.

Bevor wir uns mit diesen Begriffen auseinandersetzen, wollen wir einen Blick auf eine sehr stark vereinfachte Variante der Gleichungen werfen, die Wetter- und Klimamodellen zugrundeliegen (zitiert nach [39, 40]). An diesen Gleichungen kann man sehr schön die Problematik der Berechenbarkeit studieren – theoretisch durch Analyse der Gleichungen und praktisch durch die Beobachtung, daß der Wetterbericht eben nicht immer stimmt.

$\partial \rho / \partial t$	$= -\nabla \cdot \rho \mathbf{v}$	Kontinuitätsgleichung
$\partial \rho s / \partial t$	$= -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} s$	Energieerhaltung
$\partial \rho \mathbf{v} / \partial t$	$= -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \nabla p - 2\Omega \times \rho \mathbf{v} - \rho \nabla \Phi$	Impulssatz
s	$= c_v \log p - c_p \log \rho$	Entropie
T	$= -\frac{p}{R\rho}$	thermische Zustandsgleichung
ρ	$=$ Dichte	$\Phi =$ Erdpotential
p	$=$ Druck	$\Omega =$ Winkelgeschwindigkeit der Erde
s	$=$ Entropie	$T =$ Temperatur
$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$	$=$ (Wind-) Geschwindigkeit	$t =$ Zeit

Wir sollten uns hier nicht durch die Vielzahl der Symbole und deren Bedeutungen verwirren lassen, sondern diese Formeln so betrachten, wie etwa ein an Ägyptologie interessierter Laie einen Hieroglyphentext wahrnehmen würde: zunächst nur als ein dekoratives Muster, dessen Einzelheiten nicht besonders interessieren müssen. Soviel vielleicht zu einem ersten Verständnis: Es treten in den Formeln gewisse Größen auf, die bestimmt werden sollen. Da ist zum einen der Luftdruck, der in der Physik und in der Meteorologie allgemein mit dem Buchstaben p bezeichnet wird. Der Luftdruck ist eine Funktion von Ort und Zeit, das heißt, an jedem Punkt der Erde kann man zu einem gegebenen Zeitpunkt den Luftdruck etwa mit einem Barometer messen. Ist der Luftdruck in einem Gebiet groß, dann spricht man von einem Hochdruckgebiet, ist er niedrig, dann von einem Tiefdruckgebiet. Dies sind Begriffe, die uns von der Wetterkarte in den Fernsehnachrichten einigermaßen vertraut sind. Eine zweite durch die Gleichungen zu bestimmende Größe ist die Luftdichte. Diese Größe ist uns nicht so vertraut, wie der Luftdruck. Die Meteorologen führen sie in die Gleichungen ein, weil sich diese dann einfacher anschreiben lassen. Zwischen Luftdichte, Luftdruck und Temperatur besteht ein Zusammenhang, der in der letzten Gleichung des ersten Blocks ausgedrückt ist. Man kann also sagen, daß hier die Luftdichte nur ein anderer Begriff für die Temperatur ist. Schließlich finden wir in den Gleichungen noch die Geschwindigkeit der Luft v . Diese ist uns auch als Wind bekannt. Wir wissen, daß der Wind eine gewisse Stärke hat und eine Richtung. Ziel aller Wetter- und Klimarechnungen ist es, aus gegebenen Anfangskonstellationen und aus bekannten Eingabedaten die Entwicklung kurz- (Wetter) oder langfristig (Klima) vorherzuberechnen. Eines noch am Rande: Der tägliche Wetterbericht wird zum Teil mittels ähnlicher Gleichungen, zum Teil aber auch auf Grund anderer Überlegungen erstellt (siehe etwa [10]. Es soll hier auch noch hervorgehoben werden, daß der bedeutende Hamburger „reine“ Mathematiker Emanuel Sperner sich bereits im Jahre 1956 mit Wetterberechnungen befaßt hat [45]. Dieses Thema hat demnach in unserem Hause eine lange Tradition.

Wichtiger als die Bedeutung der einzelnen Symbole in den Gleichungen ist das, was wir nicht vorfinden. Da ist erst einmal die Luftfeuchtigkeit, die hier nicht auftritt. Unser Modell könnte

also keinen Regen modellieren, noch nicht einmal Wolken, die ja sicherlich für das Wetter eine erhebliche Rolle spielen. Es erscheint glaubhaft, daß man auch dies einbauen kann, aber dann werden die Gleichungen eben komplizierter. Ein weiteres: Zweifellos hängt die Entwicklung des Wetters oder des Klimas von weiteren Größen ab, die hier nicht Erwähnung finden. Beispielsweise ist es sicher von Bedeutung, ob sich das Geschehen über einem Waldgebiet, einer Wüste oder über einer Wasser- oder Eisfläche abspielt. Wir könnten mit unserem Modell nicht die Auswirkungen des Golfstroms modellieren, der doch auf unser Klima so viel Einfluß hat! Diese und andere Effekte müssen wir dem Modell über Systeme von Eingabedaten, sogenannten „Randbedingungen“ oder durch geeignete „Parametrisierung“ mitteilen. Alle Vorgänge in der Atmosphäre sind mit erheblichen Energieumsetzungen verbunden. Diese Energie kommt im wesentlichen von der Sonne, die in unserem Modell auch nicht auftritt. Auch diese Einflußgröße, die Sonneneinstrahlung, müssen wir in das Modell über Eingabedaten einbringen. Schließlich gibt es dann noch eine Unzahl von Effekten, die noch zu berücksichtigen sind. Gerade hier „steckt der Teufel im Detail“. Ich erwähne nur die Wirkung von Aerosolen und sogenannten Klimagasen, die Bedeutung der Ozonschicht, die Rolle von Wolken und des arktischen Eisschildes, den Einfluß der Orographie und vieles andere mehr.

Nicht berücksichtigt werden in einem solchen Modell natürlich auch Einflüsse, die von menschlicher Tätigkeit herrühren, wie etwa die mögliche Klimabeeinflussung durch Industrie und Landwirtschaft, durch Vernichtung der Regenwälder oder durch Brandrodungen, hierzu gehört aber auch die Anfang der achtziger Jahre lebhaft diskutierte Gefahr eines „nuklearen Winters“ nach einem nuklearen Krieg [4, 50, 14]. Schließlich wird das Klima auch noch durch externe Katastrophen beeinflusst wie durch den Fall eines Asteroiden, welcher nach der Hypothese von Alvarez vor 65 Millionen Jahren das dramatische Artensterben an der Grenze von Kreidezeit und Tertiär hervorrief oder die Freisetzung großer Mengen von Kohlendioxid aus Vulkanen, welche für andere Massensterben verantwortlich zu sein scheinen [54].

4.1 Nichtlinearität

Die angegebenen Klimagleichungen sind *nichtlinear*, denn es treten Produkte von gesuchten Funktionen auf. Während man bei linearen Gleichungen über eine vollständige Theorie, ein gutes „Gefühl“ für das Systemverhalten und auch sehr gute Berechnungsmethoden verfügt, ist dies bei nichtlinearen Gleichungen im allgemeinen nicht der Fall. Ein besonderes Problem ist, daß bei nichtlinearen Systemen überraschende Phänomene auftreten können. Wir sind intuitiv geneigt, in Termini linearer Systeme zu denken: Schickt man durch eine Spule die doppelte Stromstärke, dann erwartet man auch eine Verdoppelung des Magnetfeldes. Unglücklicherweise ist dies bei nichtlinearen Systemen nicht immer so. Wir betrachten ein einfaches Beispiel, das sogenannte *von Mises-System*: Hier hat man zwei Schraubenfedern, das sind Spiralfedern, die elastisch auf Druck und auf Zug reagieren. Diese Federn werden an mit je einem Ende aneinander befestigt und die beiden anderen Enden werden fixiert. Etwa durch eine Führung sorgt man dafür, daß sich der Punkt, an dem die Federn miteinander verbunden sind, nur längs einer Geraden bewegen kann (siehe Abbildung 1). Wenn man nun den gemeinsamen Punkt der Federn belastet, dann werden die beiden Federn – je nach Richtung der Belastung – entweder gedrückt oder gedehnt, und es stellt sich eine Gleichgewichtskonfiguration ein. Wie in der Abbildung angedeutet, gehören zu einer gewissen Belastung in der Regel zwei Gleichgewichtspunkte, ein oberer und ein unterer, der aus dem oberen erhalten wird, indem man das System „durchdrückt“. In Abbildung 2 sind die möglichen Gleichgewichtszustände dargestellt. Man sieht, daß für einen gewissen Bereich der einwirkenden Kraft zwei mögliche Lösungen existieren. Im Normalfall hat der Gleichgewichtspunkt die Eigenschaft der Stabilität, das heißt, eine kleine Änderung der Belastung wird auch

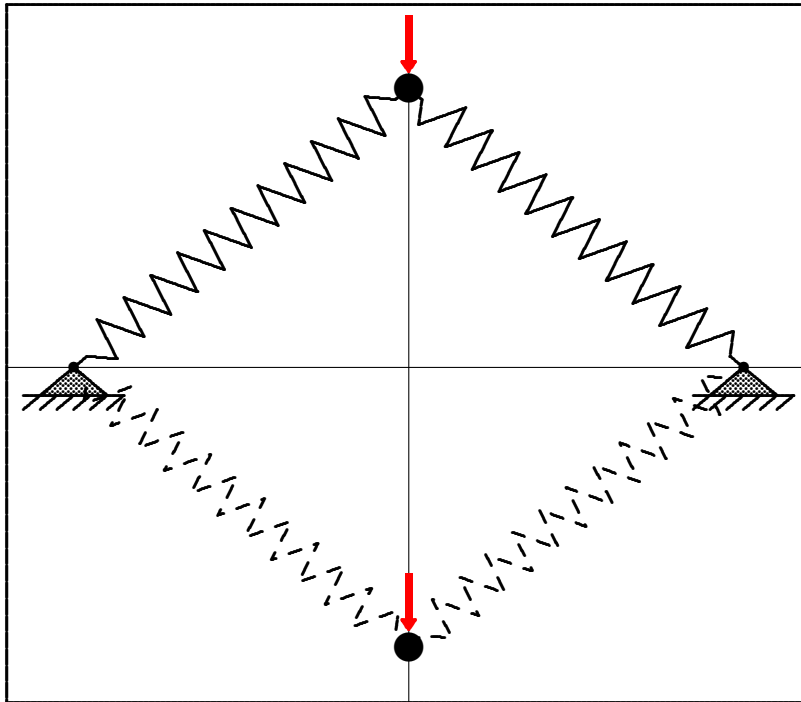


Abbildung 1: Von Mises-Federnsystem.

Gestrichelt ist die untere Gleichgewichtslage der Federn eingezeichnet.

nur eine kleine Änderung der Auslenkung bewirken. Wenn die Belastung jedoch einen kritischen Wert erreicht, dann kann eine kleine Änderung ein „Durchschlagen“ des Systems bewirken. Das heißt, daß der Gleichgewichtspunkt des Systems von der oberen Gleichgewichtslage zur unteren „springt“. Die bei einem solchen Sprung freiwerdende Energie kann zur Zerstörung des Systems führen. Am 2. Januar 2006 brach auf diese Weise das Dach der Eissporthalle in Bad Reichenhall unter der Schneelast ein. Man nennt solche kritischen Punkte auch „Tipping Points“ [49]. Das mathematische Studium solcher plötzlicher Zustandsänderungen trägt nicht zu Unrecht den Namen „Katastrophentheorie“ [47]. Diese Theorie wurde in den siebziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelt, ist also noch recht neu. Katastrophen in diesem Sinne können nur bei nichtlinearen Systemen auftreten.

Ein Effekt, der auf eine solche sprunghafte „katastrophale“ Änderung des Erdklimas hiauslaufen könnte, wird durch den Eisschild der Arktis hervorgerufen. Schnee und Eis reflektieren das Sonnenlicht sehr gut, deshalb wird von den Polargebieten ein erheblicher Teil der eingestrahelten Sonnenenergie wieder in den interplanetaren Raum reflektiert. Schmilzt durch irgendeinen Mechanismus das Eis der Polkappen ab, dann wird das Sonnenlicht von dem weniger gut reflektierten Wasser absorbiert. Dadurch steigt dessen Temperatur und eine noch größere Menge des Poleises schmilzt. Von einem gewissen Zeitpunkt an könnte es dann den „Katastrophenpunkt“ geben, von dem aus sich dieser Prozeß unaufhaltsam weiter verstärkt [26]. Wir sollten uns das Diagramm in Abbildung 2 immer vor Augen halten. Da wir die Zusammenhänge nicht vollständig durchschauen, können wir nur vermuten, auf welchem Punkt der Kurve wir sitzen und wieviel zusätzliche Wärme wir dem System noch zumuten dürfen.

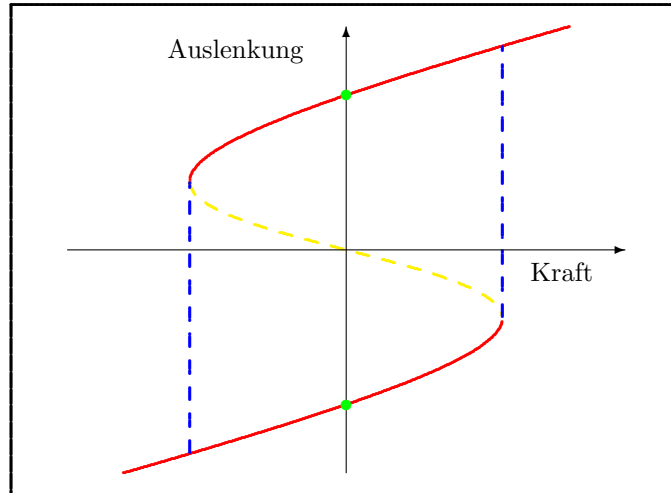


Abbildung 2: Auslenkung-Kraft-Diagramm des von Mises-Systems.

Ein anderer Mechanismus, der ebenfalls zu einer plötzlichen katastrophalen Klimaänderung geführt haben könnte, ist möglicherweise die Ursache gewisser globaler Artensterben in der Vergangenheit. Auch hier wurde vermutlich durch Eintrag von – hier vulkanischem – Kohlendioxid in die Atmosphäre in der Tiefsee ein Prozeß angefacht, der massenhaft giftigen Schwefelwasserstoff freisetzte [54]. Es gibt zu denken, daß wir gerade dabei sind, die Atmosphäre mit Kohlendioxid anzureichern.

4.2 Chaos

Eine weitere Erscheinung, die bei nichtlinearen Systemen auftreten kann, bezeichnet man als Chaos. Die Beschäftigung mit diesen Erscheinungen ist auch eine recht junge Wissenschaft und erst einige Jahrzehnte alt. Eines der frühesten Beispiele für das Auftreten von chaotischen Zuständen wurde von Edward Norton Lorenz (* 1917), einem Meteorologen vom MIT, angegeben. Lorenz hatte dieses Beispiel in den sechziger Jahren beim Studium einer vereinfachten Variante der Klimagleichungen gefunden [31]. Da die Gleichungen von Lorenz recht kompliziert sind, betrachten wir hier ein anderes System, welches aus der Populationsdynamik stammt und auf Pierre-François Verhulst (1804–1849) zurückgeht [52]. Bezeichnet man die Stärke einer Population in der n -ten Periode mit x_n , dann ist nach dieser Gleichung die Populationsstärke in der darauffolgenden Periode nach der sogenannten *Verhulst-Gleichung* gegeben durch

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n).$$

Hierbei ist r eine reelle Zahl, die die Überlebensfähigkeit der Population charakterisiert. Wenn man r zwischen 0 und 4 wählt, dann liegen die Werte x_n sämtlich zwischen 0 und 1, sofern man mit einem Startwert zwischen 0 und 1 begonnen hat, die durch die Verhulst-Gleichung gegebene Folge ist also „sinnvoll“. Speziell gilt nun:

$0 \leq r \leq 1$ Die Population stirbt aus.

$1 < r \leq 2$ Die Population strebt („monoton“) gegen den Grenzwert $\bar{x} = \frac{r-1}{r}$.

$2 < r \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ Die Populationsgröße oszilliert zwischen zwei Häufungspunkten (doppeltperiodisch).

$1 + \sqrt{6} < r \leq \approx 3.54$ vier Häufungspunkte

$3.54 < r$ 8, 16, 32, ... Häufungspunkte.

$r > \approx 3.57$ Chaos.

Uns interessiert hier der letztgenannte Fall. Wenn wir etwa $r = 3.98$ setzen und mit einer Populationsgröße $x_0 = 0.8$ anfangen, dann erhält man eine Kurve, die intuitiv „chaotisch“ aussieht (rote Kurve in Abbildung 3), das heißt, die Kurve zeigt keine erkennbare Gesetzmäßigkeit. Dieses Verhalten ist nicht „abwegig“, man hat ein solches Verhalten bei der Populationsgröße von Planktongemeinschaften beobachtet [19].

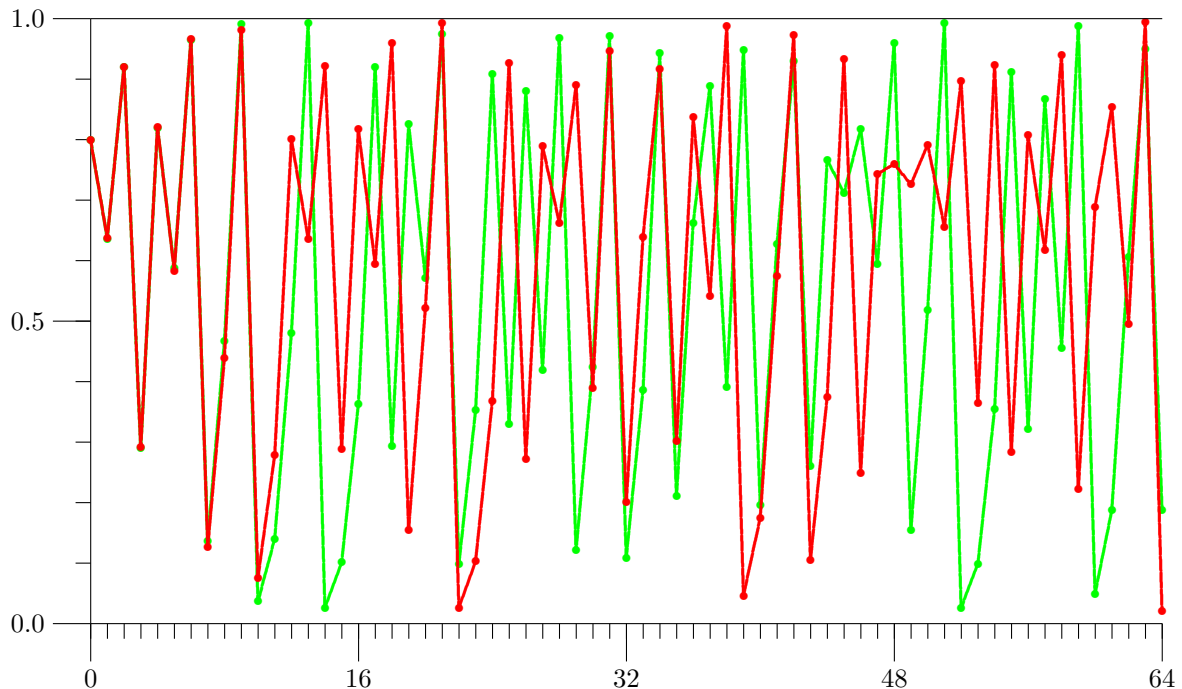


Abbildung 3: Chaos bei der Verhulst-Gleichung.

Es wurde $r = 3.98$ gewählt und einmal $x_0 = 0.8$ (rote Kurve) sowie $x_0 = 0.8001$ (grüne Kurve).

Wenn wir jetzt den Anfangswert auf $x_0 = 0.8001$ ändern, also um 0.0125 %, dann erhalten wir die grüne Kurve in Abbildung 3. Wir stellen fest, daß die beiden Kurven für die Anfangsgenerationen (bis etwa $n = 10$) recht gut übereinstimmen, daß sie sich aber dann mehr und mehr dramatisch unterscheiden. Eine sehr kleine Änderung der Ausgangsdaten hat also – nach einer gewissen Zeit – zu einer sehr großen Änderung des Systemverhaltens geführt. Lorentz prägte für diesen Vorgang den Namen *Schmetterlingseffekt* und illustrierte diesen Effekt recht plastisch durch die Formulierung:

Der Flügelschlag eines Schmetterlings im Amazonas-Urwald kann einen Orkan in Europa auslösen.

Es ist interessant, daß Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) schon vor zweihundert Jahren einen ähnlichen solchen Effekt recht plastisch beschrieben hat (Sudelbücher, Heft D [55] [30, Band I, S. 239]):

Wenn ich dieses Buch nicht geschrieben hätte, so würde heute über 1000 Jahre abends zwischen 6 und 7 z.E. in mancher Stadt in Deutschland von ganzen andern Dingen gesprochen worden sein, als wirklich gesprochen werden wird. Hätte ich zu Vardöhus einen Kirschkern in die See geworfen, so hätte der Tropfen Seewasser den Myn Heer am Kap von der Nase wischt nicht gnau an dem Ort gesessen.

Ähnlich wie bei dem Federsystem kann hier ein winziger Auslöser einen beträchtlichen Effekt hervorrufen, hier allerdings unter Umständen verzögert und an einem entfernt liegenden Ort. Das von Lorenz angegebene Beispiel der dramatischen Auswirkungen eines Schmetterlingsflügelschlags ist eine sehr schöne Metapher, aber sicher nicht realistisch. Man weiß jedoch, daß dergleichen chaotische Phänomene für das Wettergeschehen eine erhebliche Rolle spielen. Hierzu gehört zum Beispiel die Turbulenz von Flüssigkeiten und Gasen. Vielleicht hat in der eingangs erwähnten Geschichte irgendein „Schmetterlingsflügel“ dafür gesorgt, daß der Sturm *Kyrill* von seinem Weg abgelenkt worden ist und uns unbehelligt ließ. Es leuchtet ein, daß chaotische Phänomene sich der Berechenbarkeit entziehen. Wir haben bei der Verhulst-Gleichung gesehen, daß man den Anfangswert mit einer unrealistisch hohen Genauigkeit kennen müßte, um die Entwicklung über eine größere Anzahl von Perioden zuverlässig vorhersagen zu können. Das heißt, die Zukunft des Systems ist „praktisch“ unverhersagbar.

4.3 Komplexität

Die wichtigste Ursache für den enormen Erfolg der modernen Physik – und der Ingenieurwissenschaften – ist, daß sich die Physiker auf einfache monokausale Zusammenhänge einschränken. Als Galilei seine Versuche mit auf einer schiefen Ebene rollenden Kugeln vornahm, sah er bewußt von Effekten wie Luftreibung oder Reibung der Kugel auf der Ebene ab, ganz zu schweigen von Einflüssen anderer Körper in seinem Labor oder dem Einfluß des Mondes oder der Sonne (an welchen er selbst niemals geglaubt hat). Er konnte dabei sicher sein, daß diese Vernachlässigungen im Rahmen seiner Meßgenauigkeit keine Rolle spielen würden. Man kann sagen, daß die moderne Physik bewußt die Vorgänge in der Natur soweit isoliert und vereinfacht, daß sie rechnerisch beherrschbar werden. Dies ist übrigens der Hauptpunkt der Kritik Goethes an der Newtonschen Farbenlehre gewesen. Goethe sah die Farben als ein Gesamtphänomen und hielt es für einen verfehlten Ansatz, das Licht in einer dunklen Kammer zu studieren anstelle sich ins helle Sonnenlicht zu begeben [27]. Er schreibt in seinen *zahmen Xenien*:

Freunde, flieht die dunkle Kammer,
Wo man euch das Licht verzwickt,
Und mit kümmerlichstem Jammer
Sich verschrobnen Bildern bückt.
Abergläubische Verehrer
Gabs die Jahre her genug,
In den Köpfen eurer Lehrer

Laßt Gespenst und Wahn und Trug.

Wenn der Blick an heitern Tagen
Sich zur Himmelsbläue lenkt,
Beim Scirok der Sonnenwagen
Purpurrot sich niedersenkt:
Da gebt der Natur die Ehre,
Froh, an Aug und Herz gesund,
und erkennt der Farbenlehre
Allgemeinen ewigen Grund.

Wenn wir ein Produkt der modernen Optik ansehen, beispielsweise eine Videokamera, dann müssen wir zugeben, daß die Newtonsche reduktionistische Sicht der Optik und Farbenlehre zu beachtenswerten Erkenntnissen geführt hat, deren hoher praktischer Wert vergessen lassen kann, daß die Goethesche Sehweise dem empfundenen Phänomen Farbe viel näher steht als die „dunkle Kammer“ Newtons. Wir haben uns aber daran gewöhnt, daß die reduzierte Sicht von Physik und Technik zu einer tiefen Einsicht in die Natur der Dinge geführt hat.

Ganz anders sieht es beispielsweise in der Biologie, den Wirtschaftswissenschaften oder eben in der Meteorologie aus. Hier kann man in aller Regel nicht „Effekte höherer Ordnung“ ausschließen, denn gerade diese bestimmen wesentlich das Systemverhalten. Leider ist für unsere Wahrnehmungssystem sehr schwer, multikausale Vorgänge zu „verstehen“.

Es ist immer wieder überraschend, daß man über das Innere der Sonne und der Fixsterne mehr und präziseres Wissen besitzt, als über das Wetter von morgen. Der Grund hierfür ist, daß eben für das Wetter und das Klima zahlreiche Einflüsse von Bedeutung sind, die wir durchaus nicht alle verstehen. Wir haben gelernt, welche schädlichen Folgen an sich winzige Mengen gewisser Gase auf die Ozonschicht der Erde haben, und wir diskutieren jetzt gerade die Folgen, die ein rein zahlenmäßig geringer Anteil von 385 ppm (= millionstel Volumenanteilen) – also von 0.4 Promille – an Kohlendioxid in unserer Atmosphäre haben könnte. Immerhin gibt es Autoren, die darin einen Anlaß zur Besorgnis sehen. So haben Staubpartikel, die in der Sahara von Sandstürmen aufgewirbelt werden, einen Einfluß auf das Klima in Mitteleuropa und Smogpartikel aus Süd- und Ostasien ändern über atmosphärische Kopplungen in Sibirien das Klima [48].

4.4 Skalenprobleme und Numerik

Die oben angegebenen Gleichungen – beziehungsweise die wesentlich komplizierteren vollen Klimagleichungen – können nicht unmittelbar auf einem Rechner gelöst werden. Man muß sie vielmehr vorher „diskretisieren“. Wir können uns diesen Prozeß – ein wenig vereinfacht – so vorstellen, daß die gesamte Atmosphäre oder ein wesentlicher Teil davon in quaderförmige „Zellen“ zerlegt wird. Eine solche Zelle hat bei einem der verbreiteten Klimamodelle, dem T42-Modell ([21] beziehungsweise [18]), einen quadratischen Grundriß von 250 km Seitenlänge und 1 km Höhe. Es wird dann angenommen, daß in jeder solchen Zelle die für das Klima relevanten Daten – also Temperatur, Luftdruck . . . – konstant seien. Konkret würde dies bedeuten, daß eine solche Zelle, deren Zentrum sich in Hamburg befindet, bis fast nach Hannover und Flensburg reichen würde und daß in dieser Zelle alle Klimadaten als konstant angesehen würden. Zwar verwendet man für Wetterberechnungen kleinere Zellen (etwa ein Viertel der genannten Kantenlänge), aber es wird klar, daß genaue Verlauf des Sturmes *Kyrill* im Januar 2007 in diesem Rahmen nicht präzise darzustellen ist. Die Idee, die Zellengrößen den Gegebenheiten anzupassen und beispielsweise in

Gebieten, in denen man kleinskalige Ereignisse erwartet, kleinere Zellen zu verwenden, taucht immer wieder auf, führt aber zu weiteren, bis heute unlösbaren Problemen [39, 22].

Hat man die Gleichungen auf diese Weise diskretisiert, dann kann man sich die Lösung etwa so vorstellen: Man ermittelt (nach Maßgabe der Gleichungen), auf welche Weise benachbarte Zellen innerhalb eines gewissen Zeitschritts (je nach Ziel der Berechnung in einem Tag, einem Monat, ...) miteinander wechselwirken. So werden sich etwa Druck- oder Temperaturunterschiede ausgleichen, allerdings auf unterschiedliche Weise, Druckunterschiede werden durch Luftbewegungen ausgeglichen, Temperaturunterschiede durch Diffusions- oder Strahlungsprozesse. Bei derartigen Rechnungen tritt ein Problem auf. Die Oberfläche der Erde hat etwa 500 Millionen Quadratkilometer. Mit dem T42-Modell, also mit Zellen der Grundfläche von 250 km Seitenlänge, hätte man für die gesamte Erde etwa 8 000 Quadrate. Man stapelt zur Modellierung der Atmosphäre 19 Zellen aufeinander. Dies ergäbe 155 000 Zellen²⁾ Für jede dieser Zellen müßte man erst einmal sämtliche klimarelevanten Daten zu einem gegebenen Zeitpunkt ermitteln. Je nach Ziel der Berechnung kann dies eine immense Datenmenge sein. Man benötigt nicht nur die „üblichen“ Daten wie Luftdruck, Temperatur, Feuchtigkeit, sondern gegebenenfalls auch noch Daten über die Luftzusammensetzung, über die Beschaffenheit des Untergrundes (Land, Meer, Eis, Gebirge, Pflanzenbewuchs, Wüsten ...). Auch die Orographie spielt dabei eine Rolle. Wir wissen, daß Gebirge Wetterscheiden sind, ganz extrem: Südlich des Himalaya hat man eines der regenreichsten Gebiete der Erde, hingegen ist das tibetanische Hochland ausgesprochen trocken.

Eine besondere Rolle spielen bei dem Wettergeschehen die Ozeane. Die „Kopplung“ der Ozeane an die Atmosphäre ist dabei ein besonderes Problem. Außerdem müssen die Strömungs- und Konvektionsverhältnisse berücksichtigt werden. Daß Ozeanströmungen einen wichtigen Einfluß auf das Wettergeschehen haben, ist uns allen bekannt. Ohne den Golfstrom hätten wir hier in Nordeuropa ein wesentlich kühleres Klima. Wir benötigen für ein vollständiges Klimamodell also auch noch ein Ozeanmodell, was ähnliche Komplexität aufweist, wie das Atmosphärenmodell.

Wenn man nun ein solches kompliziertes Klimamodell im Rechner aufgestellt hat, benötigt man noch Anfangswerte, daß heißt, man benötigt einen Anfangszustand um dann rechnerisch nachvollziehen zu können, wie dieser sich weiterentwickelt. Bei der Wetterprognose kennt man etwa das Wetter von heute (und auch von gestern und vorgestern ...) und man möchte vorausberechnen, wie es morgen, übermorgen ... sein wird. Je genauer der Ausgangszustand bekannt ist, desto genauer kann man – hoffentlich – die Folgezustände zu berechnen. Für uns würde das bedeuten, daß man erst einmal wissen muß, welchen Zahlenwert die klimarelevanten Daten in jeder einzelnen der oben genannten Zellen haben. Zur Beschaffung der Ausgangsdaten für Klimaberechnungen (und natürlich auch Wetterprognosen) werden zunehmend Satelliten eingesetzt, die ein dichtes Netz von Wetterdaten liefern können. Allein die Akquisition und Weiterverarbeitung dieser Daten stellt ein Problem für sich dar.

Aus allen diesen Überlegungen wird plausibel, weshalb man für Klimamodelle die jeweils größten und schnellsten Rechner verwendet. Man muß sich vor Augen halten, daß die Beschaffung der Ausgangsdaten und die eigentlichen Rechnungen sehr kostenaufwendig sind. Da zuverlässige Wetterprognosen einen hohen wirtschaftlichen Wert – etwa für die Landwirtschaft, den Luftverkehr oder die Freizeitindustrie – haben, kann man dort leicht ausrechnen, wieviel uns eine weitere Steigerung der Prognosegenauigkeit wert ist. Bei Klimaberechnungen müssen wir uns fragen, ob wir mit ungeheurem Aufwand möglichst genaue Vorhersagen berechnen wollen, ob wir es uns

²⁾Bei Wettermodellen haben die Zellen eine Seitenlänge, die etwa ein Viertel der genannten Seitenlänge haben. Das heißt, daß man dann eine sechzehnfach größere Anzahl von Quadraten erhält. Hierdurch wird auch klar, warum das Wetter von morgen ungleich schwieriger numerisch zu behandeln ist, als das Klima. Bei Wettervorhersagen interessiert das kleinskalige Detail, und dessen Berechnung erfordert immense Rechenkapazität, ganz zu schweigen von dem Aufwand für die Beschaffung der Ausgangsdaten.

leisten können, zu warten, bis schnellere und größere Rechner zur Verfügung stehen oder aber, ob wir uns mit halbwegs sicheren Trendrechnungen zufrieden geben wollen – oder können.

5 Berechenbarkeit in der Mathematik

Sieht man von den aufgezählten „technischen“ Schwierigkeiten praktischer Aufgabenstellungen ab, dann stellt sich die Frage, was man denn alles in der Platonischen Welt der Mathematik berechnen kann. Ein schönes Beispiel ist die Zahlentheorie, also die Theorie der Eigenschaften der *natürlichen Zahlen* $1, 2, 3, \dots$. Dies ist ein anscheinend übersichtliches Gebiet, allerdings nicht problemfrei. Ich nenne nur zwei Probleme, die sehr harmlos aussehen, aber bislang völlig ungelöst sind.

5.1 Die Goldbachsche Vermutung

Der Diplomat und Amateurmathematiker Christian Goldbach (1690 – 1764) äußerte in einem Brief vom 27. Mai/7. Juni 1742 an Leonhard Euler (1707 – 1783) eine Vermutung [20, S. 104]:

... auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardieren: daß jede Zahl, welche aus zweien numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sei, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatem. [Von *Goldbach* an den Rand dazu geschrieben: Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, daß sich die conjecture in summo rigore demonstrieren lässet in casu $n + 1$, si successerit in casu n et $n + 1$ dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheint wenigstens, daß eine jede Zahl, die größer ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sei.]

Euler antwortete am 19./30. Juni 1742 [20, S. 110]:

Daß eine jegliche Zahl, welche in 2 numeros primos resolubilis ist, zugleich in quot, quis voluerit numeros primos zerteilt werden könne, kann aus einer Observation, welche Ew. Hochedelgeb. vormals mit mir kommuniziert haben, daß nämlich ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum seie, illustriert und konfirmiert werden. Dann ist der numerus propositus n par, so ist er eine summa duorum numerorum prim[orum], und da $n - 2$ auch eine summa duorum numerorum [primorum] ist, so ist n auch eine summa trium, und auch quatuor und so fort. Ist aber n ein numerus impar, so ist derselbe gewiß eine summa trium n[umerorum] p[rimorum], weil $n - 1$ eine Summa duorum ist, und kann folglich auch in quotvis plures resolviert werden. Daß aber ein jeder numerus par eine Summa duorum primorum sei, halte ich für ein ganz gewisses Theorema, ungeacht ich dasselbe nicht demonstrieren kann.

Worum ging es in diesem berühmten Briefwechsel? In moderner Sprechweise lautet die Vermutung von Goldbach, daß jede gerade Zahl ≥ 4 sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lasse. Diese Darstellung muß nicht eindeutig sein, so ist etwa $20 = 17 + 3 = 13 + 7$.

Das Goldbachsche Problem wäre sofort gelöst, wenn man eine gerade Zahl finden würde, die sich **nicht** als Summe zweier Primzahlen darstellen läßt. Man hat versucht, mit Computern eine solche Zahl zu finden. Tomás Oliveira e Silva hat in einem aufwendigen Projekt (siehe

<http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html>) die Goldbachsche Vermutung für alle Zahlen bis 10^{18} überprüft und für richtig befunden. Leider sagt dieses Resultat nichts darüber aus, ob die Goldbachsche Vermutung nun allgemein richtig ist oder nicht.

Zu dem Goldbachschen Problem schrieb Thomas von Randow 1967 in der NDR-Sendung *Sechs Tage Mathematik*:

Bislang hat noch niemand eine gerade Zahl gefunden, die *nicht* Summe zweier Primzahlen ist. Aber der Beweis für Goldbachs Vermutung steht noch aus. Indessen konnte der russische Mathematiker Lew Genrichowitsch Schnirelmann (1905 – 1938) 1931 [43] beweisen, daß jede natürliche Zahl als Summe von nicht mehr als 300 000 Primzahlen dargestellt werden kann. Das ist zwar noch weit von Goldbachs Hypothese entfernt, aber möglicherweise ein Wegweiser zu ihrem Beweis. Der ebenfalls russische Mathematiker Iwan Matwejewitsch Winogradow (1891 – 1983) trug einen anderen Beweis bei: Winogradow konnte 1937 zeigen, daß von einer bestimmten Größe an, jede Zahl als Summe von höchstens 4 Primzahlen darstellbar ist. Wie groß aber die Zahl ist, von der ab dies gilt, weiß man nicht. Das klingt erstaunlich. Jemand kann beweisen, es gibt eine Zahl mit der Eigenschaft, daß jede größere eine Summe von höchstens vier Primzahlen ist, aber er vermag diese kritische Größe nicht anzugeben. Doch so verwunderlich ist dies nicht. Denn was Vinogradoff gezeigt hat, war dies: Er ging von der Hypothese aus, es gäbe unendlich viele natürliche Zahlen, die nicht in höchstens vier Primzahlsummanden zerlegt werden können und bewies, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Daraus freilich folgt dann zwingend, daß es zwar unter den natürlichen Zahlen einige geben könnte, die nicht Summe von vier Primzahlen sind, aber irgendwo hört diese Möglichkeit auf und diese Grenze liegt im endlichen Bereich.

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten:

- Es gibt einen einfachen Beweis (beziehungsweise ein einfaches Gegenbeispiel). Dies scheint nicht sehr wahrscheinlich nach 250-jähriger Suche.
- Es gibt einen Beweis, aber die kürzeste Variante füllt ein Buch mit 1 000 Druckseiten (beziehungsweise, die kleinste gerade Zahl, die Gegenbeispiel ist, füllt ein Buch mit 1 000 Druckseiten). Dann ließe sich der Beweis und auch das Gegenbeispiel mit den heutigen Mitteln nicht finden.
- Es gibt keinen endlichen Beweis, das heißt, die Vermutung läßt sich nicht aus Eigenschaften der geraden Zahlen folgern, sie ist für jede gerade Zahl zwar wahr, aber „zufällig“ wahr. In diesem Falle könnte man die Goldbachsche Vermutung niemals beweisen.

5.2 Das $3n + 1$ -Problem von Collatz

Dieses Problem ist in der Unterhaltungsmathematik sehr beliebt. Man kann es wie folgt formulieren: Gegeben sei eine natürliche Zahl n . Mit dieser bildet man die Folge von Zahlen x_k , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ nach der Vorschrift

Wir setzen $x_0 = n$.

Wenn x_k gerade ist, dann soll $x_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot x_k$ sein,

Wenn x_k ungerade ist, dann soll $x_{k+1} = 3 \cdot x_k + 1$ sein.

Wir betrachten ein Beispiel. Wenn wir $n = 7$ wählen, dann muß nach Vorschrift $7 \times 3 + 1 = 22$ gebildet werden. Diese Zahl ist gerade, also wird halbiert, und wir erhalten 11. Auf analoge Weise ergibt sich der Rest der Folge 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Nun wird es „langweilig“, die Folge setzt sich fort mit 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

Gefragt ist nun, ob für jeden Startwert n die Folge nach endlich vielen Schritten auf $x_k = 1$ führt. Diese Frage stammt wohl ursprünglich von Lothar Collatz³⁾. Bis heute ist eine Antwort nicht bekannt. In Abbildung 4 ist der Fall $n = 27$ dargestellt. In diesem Falle hat wird erstmalig $x(111) = 1$.

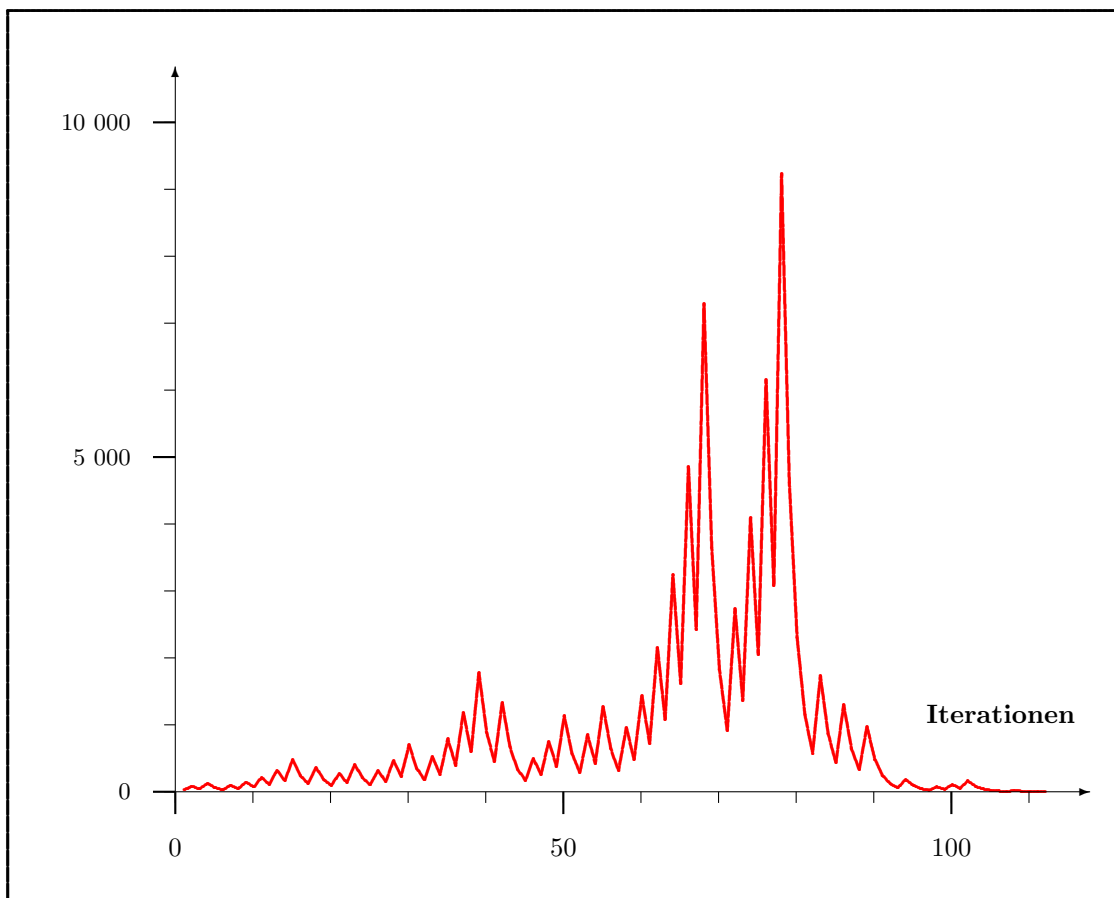


Abbildung 4: Iterierte des $3n + 1$ -Problems für den Anfangswert $n = 27$

³⁾Lothar Collatz: Über den Ursprung des $(3n + 1)$ -Problems (Chinesisch), *Journal of Qufu Normal University, Natural Sciences*, Edition 3:9–11, 1986.

Eine unterhaltsame Darstellung findet man bei Brian Hayes: Computer-Kurzweil: Wenn Zahlen blindlings Achterbahn fahren oder: Vorsicht vor einem Problem, das schon viele Mathematiker frustriert und ihnen die Zeit gestohlen hat! *Spektrum der Wissenschaft*, April 1984:8–15.

5.3 Alan Turing

Im Jahre 1936 publizierte der britische Mathematiker Alan Mathison Turing (1912 – 1954) eine Arbeit mit dem Titel *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* [51]. Turing schrieb im letzten Abschnitt seiner Arbeit [51, S. 259]:

I propose, therefore, to show that there can be no general process for determining whether a given formula $\mathfrak{A}$ of the functional calculus $\mathbf{K}$ is provable, *i.e.* that there can be no machine which, supplied with any one $\mathfrak{A}$ of these formulae, will eventually say whether $\mathfrak{A}$ is provable.

Was heißt das?

Turing untersuchte *zahlentheoretische Funktionen*, das heißt, Funktionen, die für jede natürliche Zahl k eine natürliche Zahl $f(k)$ berechnen. Man kann sich solche Funktionen etwa als Computer vorstellen, in die man k eingibt und die dann als Resultat $f(k)$ ausgeben. Beispiele für solche Funktionen sind

$q(k)$ der Funktionswert ist das Quadrat der Zahl k .

$p(k)$ ist die k -te Primzahl, zum Beispiel $p(3) = 5$, $p(8) = 19$.

$G(k)$ ist die Anzahl der Primzahlen, die nicht größer als k sind. Mit dieser Funktion hatte sich, wie wir in der zweiten Veranstaltung gesehen haben, Carl Friedrich Gauß mit überraschendem Ergebnis beschäftigt (Teil 2. der Vorlesungsreihe, Abschnitt 3).

$g(k)$ ist die Anzahl der voneinander verschiedenen Darstellungen der Zahl $2k$ als Summe von zwei Primzahlen nach Goldbach.

Man kann nun solche Funktionen durch *Algorithmen* beschreiben. Algorithmen können irgendwelche Texte sein oder aber auch Computerprogramme [17, §22]. Diese Algorithmen kann man anordnen etwa nach ihrer Länge, gleichlange Algorithmen kann man lexikographisch anordnen. Auf diese Weise erhält man eine Liste von Algorithmen für Funktionen. Diese Liste ist zwar unendlich lang, aber wir werden sie nicht als Ganzes benötigen. Wichtig ist einzig, daß man für jeden Algorithmus eindeutig den Platz in der Liste angeben kann und daß man zu jeder Zahl n ausrechnen kann, welches Programm als n -tes Programm in der angeordneten Liste steht. Wir bezeichnen die Funktion, die durch die n -te Algorithmenbeschreibung dargestellt wird, mit f_n .

Nun behaupten wir, daß die Liste nicht vollständig sein kann, das heißt, daß nicht alle denkbaren zahlentheoretischen Funktionen auf diese Weise darstellbar sind. Dazu benutzte Turing einen Trick [51, §8], der uns in der letzten Veranstaltung noch beschäftigen wird, das Diagonalverfahren, welches Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor (1845 – 1918) eingeführt und auf geniale Weise verwendet hatte. Die von uns zu konstruierende Funktion nennen wir f^* . Wir müssen jetzt angeben, welchen Zahlenwert diese Funktion an einer Stelle n haben soll. Wir setzen $f^*(n) = f_n(n) + 1$. Es ist klar, daß f^* eine zahlentheoretische Funktion ist. Man kann jeden Funktionswert $f^*(n)$ berechnen, indem man den n -ten Algorithmus der geordneten Liste aufsucht und ihn mit dem Eingabewert n anwendet. Das heißt, es gibt einen beschreibbaren Algorithmus zur Darstellung von f^* . Nun ist aber dieser Algorithmus für f^* selbst nicht in der Liste enthalten. Würde er beispielsweise mit dem m -ten Algorithmus zusammenfallen, dann hätten wir $f^*(m) = f_m(m) + 1 \neq f_m(m)$.

Dies bedeutet, daß es „mehr“ zahlentheoretische Funktionen geben muß, als in unserer Algorithmmentabelle enthalten sind. Wir werden in der nächsten Veranstaltung noch sehen, daß es unglaublich viel mehr Funktionen sind, als diejenigen, die durch unsere Algorithmmentabelle darstellbar sind.

In seiner Arbeit präzierte Turing er den Begriff der „Berechenbarkeit“, indem er einen „Papier-und-Bleistift“-Rechner angab – heute den Informatikstudenten unter dem Namen *Turing-Maschine* wohlvertraut – der folgende beiden Eigenschaften hat:

- Er ist äußerst einfach. Dies ist notwendig, damit man ihn mathematisch untersuchen kann, wir Mathematiker verstehen nur die allersimpelsten Dinge. Turing wollte Sätze beweisen, und da stört jedes unnötige Detail.
- Die Maschine ist *universell*, das heißt, man kann mit ihr *jeden* Computer imitieren und sie kann auf jedem Computer realisiert werden [51, §6].

Eine zahlentheoretische Funktion f heißt also Turing-berechenbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe der Zahl n die Zahl $f(n)$ berechnet. Es stellte sich später heraus, daß auch dieser Begriff sehr universell ist. Verschiedene Berechenbarkeitsbegriffe wie die Berechenbarkeit der WHILE-Programme, durch GOTO-Programme oder gemäß der sogenannten μ -Rekursivität erwiesen sich als äquivalent zur Turing-Berechenbarkeit. Man bezeichnet die folgende Aussage als die Churchsche These (nach Alonzo Church (1903 – 1995)) [44, Kapitel 2.1]:

Die durch die formale Definition der Turing-Berechenbarkeit (äquivalent: WHILE-Berechenbarkeit, GOTO-Berechenbarkeit, μ -Rekursivität) erfaßte Klasse von Funktionen stimmt genau mit der Klasse der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen überein.

Diese „These“ ist natürlich kein beweisbarer Satz der Mathematik, da der Begriff der „im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen“ nicht mathematisch präzisierbar ist.

Wir stellen also fest, daß man nicht alle zahlentheoretischen Funktionen durch Algorithmen beschreiben kann, es gibt also in der Zahlentheorie mehr Dinge, als sich unsere Computer träumen lassen, und von daher wäre es nicht verwunderlich, wenn zum Beispiel die Goldbachsche Vermutung oder das $3n + 1$ -Problem nicht lösbar wären.

Wir dürfen dieses Resultat nicht mit dem Resultat von Gödel aus der letzten Veranstaltung verwechseln. Turing schreibt dazu [51, S. 259]:

It should perhaps be remarked that what I shall prove is different from the well-known results of Gödel. Gödel has shown that (in the formalism of the *Principia Mathematica*) there are propositions $\mathfrak{A}$ such that neither $\mathfrak{A}$ nor $\neg\mathfrak{A}$ is provable. As a consequence of this, it is shown that no proof of consistency of Principia Mathematica (or of $\mathbf{K}$) can be given within that formalism. On the other hand, I shall show that there is no general method which tells whether a given formula $\mathfrak{A}$ is provable in $\mathbf{K}$, or, what comes to the same, whether the system consisting of $\mathbf{K}$ with $\neg\mathfrak{A}$ adjoined as an extra axiom is consistent.

If the negation of what Gödel has shown had been proved, *i.e.* if, for each $\mathfrak{A}$, either $\mathfrak{A}$ or $\neg\mathfrak{A}$ is provable, then we should have an immediate solution of the Entscheidungsproblem. For we can invent a machine $\mathcal{K}$ which will prove consecutively all provable

formulae. Sooner or later $\mathcal{K}$ will reach either $\mathfrak{A}$ or $\neg\mathfrak{A}$. If it reaches $\mathfrak{A}$, then we know that $\mathfrak{A}$ is provable. If it reaches $\neg\mathfrak{A}$, then, since $\mathbf{K}$ is consistent (Hilbert and Ackermann, p. 65), we know that $\mathfrak{A}$ is not provable.

Die Resultate von Gödel und Turing bedeuten, daß es in der Mathematik, ja sogar in der Mathematik, die sich mit Berechenbarkeit befaßt, Dinge gibt, die sich nicht beweisen lassen und die man vermittels eines Computers nicht berechnen kann. Man könnte das menschliche Gehirn als Computer auffassen. Diese Sicht würde dazu führen, daß wir akzeptieren müßten, daß es Dinge gibt, die für uns nicht verstehbar sind. Wir haben uns also sehr weit von dem Hilbertschen

Wir müssen wissen,
wir werden wissen

entfernt (siehe Teil 3. der Vorlesungsreihe, Abschnitt 4.1).

Anhang: Einige Beispiele für Modellierung

Seinem Lehrbuch über *numerische Mathematik*, also über ein Gebiet, das sich von der praktischen Seite der Berechenbarkeit nähert, hat Richard W. Hamming, ein sehr bekannter und bedeutender Mathematiker, das Motto vorangestellt [16]:

The purpose of computing is insight, not numbers.

Wir wollen den Terminus „Berechenbarkeit“ hier auch so verstehen, als mathematische Modellierung mit dem Ziel, den modellierten Vorgang zu „verstehen“. Dazu betrachten wir einige Beispiele gelungener Modellierung.

A Die Volterraschen Gleichungen der Populationsdynamik

Im Jahre 1931 veröffentlichte Vito Volterra (1860 – 1940) ein Buch, in dem er die Anwendung der Mathematik auf die Entwicklung von Tierpopulationen beschrieb [53]. Wir betrachten ein Beispiel: In einem abgeschlossenen Ökosystem leben Beutetiere (Hasen) und Raubtiere (Füchse). Zu einem gegebenen Zeitpunkt t betrage die Anzahl der Hasen $H(t)$ und die der Füchse $F(t)$. Innerhalb einer gewissen Zeitperiode, sagen wir von t bis $t + \Delta t$, vermehren sich die Hasen, das bedeutet einen Bevölkerungszuwachs und gleichzeitig wird die Bevölkerung der Hasen durch die Füchse dezimiert. Wir haben also eine Bilanzgleichung, die man etwa so darstellen kann:

$$H(t + \Delta t) = H(t) + [c_1 \cdot H(t) - a_1 \cdot H(t) \cdot F(t)] \cdot \Delta t.$$

Diese Bilanzgleichung ist so zu verstehen:

- Zur Zeit t haben wir $N(t)$ Hasen.
- in dem Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$ vermehren sich die Hasen. Die Anzahl der auf diese Weise entstehenden Nachkommen ist der Gesamtbevölkerung und der Zeitspanne Δt proportional mit einer positiven Proportionalitätskonstante c_1 . Hier gehen einige stillschweigende

Annahmen ein, zum Beispiel, daß die Zeitspanne Δt nicht zu lang ist, so daß man annehmen darf, daß sich die Zahl der Hasen in dem Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$ nur unwesentlich ändert. Es wird weiterhin angenommen, daß keine weiteren äußeren Faktoren die Vermehrung beeinflussen, sondern allein die Bevölkerungsdichte maßgebend ist. Man könnte sich vorstellen, daß in einem Dürrejahr die Vermehrungsrate bei zunehmender Bevölkerung abnimmt. Aber derlei wird hier nicht berücksichtigt, wir gehen davon aus, daß den Hasen unbegrenzt viel Nahrung zur Verfügung steht.

- Die Dezimierung der Bevölkerung wird als dem Produkt der Populationszahlen der Füchse und der Hasen proportional angenommen. Dieses Produkt kann man als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür annehmen, daß sich Fuchs und Hase begegnen, der (positive) Faktor a_1 gibt dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine solche Begegnung einem Hasen das Leben beendet.

Durch Umformung unserer Gleichung erhalten wir

$$\frac{H(t + \Delta t) - H(t)}{\Delta t} = c_1 \cdot H(t) - a_1 \cdot H(t) \cdot F(t).$$

Wenn man jetzt den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ ausführt – über diesen Begriff werden wir uns nächste Woche noch unterhalten – dann erhält man eine sogenannte *Differentialgleichung*

$$\frac{dH}{dt} = (c_1 - a_1 \cdot F) \cdot H.$$

Wir wollen uns hier nicht über die „Bedeutung“ dieser Gleichung unterhalten, sondern sie nur als eine kompakte Codierung dieses Vorganges auffassen: Die Bilanzgleichung wird untersucht für „kleine“ Zeitdifferenzen Δt .

Eine analoge Gleichung kann man für die Fuchspopulation aufstellen, wir schreiben sie gleich in kompakter Form:

$$\frac{dF}{dt} = -(c_2 - a_2 \cdot H) \cdot F.$$

Diese Gleichung bedeutet, daß einmal die Füchse mit zunehmender Fuchszahl verhungern (dies bedeutet der Term $-c_2 \cdot F$, der aussagt, daß die Füchse mit der Sterberate c_2 (positiv) aussterben würden, wenn keine Hasen mehr zur Verfügung stünden. Zum anderen vermehren sich die Füchse proportional zu dem Produkt $H \cdot F$, also bei größerer Fuchs- und Hasendichte mehr, bei geringerer Fuchs- oder Hasendichte weniger. Der positive Koeffizient a_2 gibt an, wie stark sich die Füchse in Abhängigkeit von den Populationsziffern vermehren.

Wir haben also jetzt ein System von zwei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= (c_1 - a_1 \cdot F) \cdot H, \\ \frac{dF}{dt} &= -(c_2 - a_2 \cdot H) \cdot F. \end{aligned}$$

Kann man die Populationszahlen zu einem bestimmten Zeitpunkt, dann kann man aus diesen Zahlen vermittle der beiden Gleichungen die Populationszahlen für alle Zeiten berechnen. Wie man dies macht, soll hier nicht interessieren. Wichtig ist nur, daß man es kann. Dies ist nicht ganz einfach, deshalb seien nur die Resultate genannt:

1. **Gesetz** Die Populationsgrößen von Räuber und Beute schwanken periodisch. Dabei folgen die Schwankungen der Räuberpopulation phasenverzögert denen der Beutepopulation. Die Länge der Perioden hängt von den Anfangsbedingungen und von den Wachstumsraten der Populationen ab.
2. **Gesetz** Die über genügend lange Zeiträume gemittelten Größen der Räuber- beziehungsweise Beutepopulation sind konstant. Die Größe der Mittelwerte hängt nur von den Wachstums- und Schrumpfraten der Populationen, nicht aber von den Anfangsbedingungen ab.
3. **Gesetz** Werden Räuber- und Beutepopulation gleichermaßen proportional zu ihrer Größe dezimiert, so vergrößert sich kurzfristig der Mittelwert der Beutepopulation, während der Mittelwert der Räuberpopulation kurzfristig sinkt.

Einzelheiten findet man in dem Buch von Braun [1, Abschnitt 4.9]. Obwohl die Volterraschen Gleichungen nur eine (mehr oder weniger grobe) Annäherung an die wirklichen Verhältnisse sind, kann man sie doch zur Beschreibung und Interpretation natürlicher Verhältnisse. In der Tat wurde Volterra zu seinen Gleichungen durch einen Biologen angeregt, der eine scheinbar paradoxe Beobachtung gemacht hatte. Diese Beobachtung wurde dann durch die Volterraschen Gesetze sehr schön erklärt. Braun gibt ein weiteres Beispiel an [1, S. 479].

B Lanchester-Gleichungen

Formal ähnlich zu den Volterraschen Gleichungen der Populationsdynamik sind die Lanchester-Gleichungen [29] zur Beschreibung von Kriegsabläufen. Man kann sagen, daß man hier zwei Spezies hat, die beide Räuber sind und die sich nicht vermehren.

Es gibt zwei Typen dieser Gleichungen, das erste Paar beschreibt „moderne“ Kriegführung (insbes. Anwendung weitreichender Waffen). Dabei seien N_1 und N_2 die Stärken zweier gegnerischer Parteien, die gegeneinander Krieg führen. Wir geben die Gleichungen gleich als Differentialgleichungen an

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 = \frac{dN_1}{dt} &= -a_2 \cdot N_2, \\ \dot{N}_2 = \frac{dN_2}{dt} &= -a_1 \cdot N_1,\end{aligned}$$

wobei a_1 und a_2 „Wirksamkeitskoeffizienten“ sind. Es gilt dann – und das ist eine leichte Übung für Mathematikstudenten – das Lanchestersche Quadrat-Gesetz:

$$a_1 \cdot N_1^2 - a_2 \cdot N_2^2 = \text{konstant}.$$

Bei „klassischer“ Kriegführung (Guerilla-Kampf, Kampf Mann gegen Mann) hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= -\alpha_2 \cdot N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 &= -\alpha_1 \cdot N_1 N_2\end{aligned}$$

mit dem linearen Gesetz von Lanchester

$$\alpha_1 \cdot N_1 - \alpha_2 \cdot N_2 = \text{konstant}$$

Lanchester [29, Chapter V, Nr. 32] benutzte diese Gleichungen, um eine zu dieser Zeit sehr aktuelle Fragestellung zu behandeln, nämlich die Frage, ob *Konzentration* förderlich ist oder nicht. Ein klassisches Beispiel ist das Verhalten Napoleons in der Italienischen Kampagne. Lanchester schreibt dazu:

A classic example is that of the defeat by Napoleon, in his Italian campaign, of the Austrians near Verona, where he dealt with the two Austrian armies in detail before they had been able to effect a junction, or even to act in concert.

Formal kann man diese Fragestellung so formulieren; Der Gegner # 1 bekämpft zuerst den κ -ten Teil des Gegners # 2 bis zur Vernichtung, danach den Rest. Ist dies vorteilhafter, als gleich die gesamten Streitkräfte des Gegners zu bekämpfen?

Es ist leicht einzusehen, daß bei der „klassischen Kriegführung“ kein Unterschied zwischen diesen beiden Vorgehensweisen besteht. Anders ist es bei „moderner Kriegführung“ Es seien N_1^o und N_2^o die Anfangswerte. Nach dem ersten Kampf ist

$$\alpha_1 \cdot N_1^2 = \alpha_1 \cdot N_1^{o2} - \alpha_2 \cdot \kappa^2 \cdot N_2^{o2}.$$

Der anschließende Kampf hat das Ergebnis

$$\alpha_1 \cdot N_1^2 = \alpha_1 \cdot N_1^{o2} - \alpha_2 \cdot (1 - 2\kappa + 2\kappa^2) \cdot N_2^{o2}.$$

Das heißt: Konzentration ist vorteilhaft (bei moderner Kriegführung).

Beispiel $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $N_1^o = N_2^o = 50\,000$, $\kappa = 0.8$.

Erster Kampf: $N_1 = 50\,000$ gegen $N_2 = 40\,000$. Es verbleiben $N_1 = 30\,000$.

Zweiter Kampf: $N_1 = 30\,000$ gegen $N_2 = 10\,000$. Es verbleiben $N_1 = 28\,284$.

Engel [8] (vgl. auch [1, Abschnitt 4.5.2]) untersuchte die Schlacht von Iwo Jima aus dem zweiten Weltkrieg. Diese Schlacht fand auf einer Insel im Pazifik statt, das heißt, man hat hier ein „Labormodell“ einer Schlacht, der Raum ist begrenzt und beim Militär wird über alles sehr penibel Buch geführt. Man hat also insbesondere eine sehr präzise Zahlenmaterial über die Anzahl der beteiligten Personen und über die Verluste. Die Modellierung der Schlacht durch die Gleichungen für moderne Kriegführung unter Verwendung der bekannten Daten ergab eine erstaunlich gute Übereinstimmung von Theorie und Realität [1, S. 443]. Man kann sich hier wirklich fragen, welchen Sinn die Schlacht gehabt hat. Man hätte einfach die Lanchester-Gleichungen lösen müssen und hätte dann das gleiche Resultat erhalten, ohne daß irgendein Aufwand getrieben worden wäre. Der Science-Fiction-Schriftsteller Herbert W. Franke hat diese „rationale“ Lösung eines militärischen Problems in einer Kurzgeschichte beschrieben [11, Nr. 53]. Er setzt der Geschichte eine kurze Anekdote voran:

Wirtschaftliche und kriegerische Aktionen lassen sich in elektronischen Rechenmaschinen durchexerzieren und dadurch in ihren Folgen beurteilen. Das geschieht schon heute. Nur wenige wissen, daß die Frage, ob die USA aktiv in den Koreakrieg eingreifen sollten, einem Elektronengehirn vorgelegt wurde. Es hat für den Frieden entschieden.

Eine sehr interessante Arbeit stammt von Dahm [5], der die Skagerrakschlacht analysierte. Ich gebe nur eine Tabelle der Resultate an (Tabelle 1). Die Übereinstimmung von Realität und Rechnung ist überraschend, hier haben wir es nicht mit einer großen Anzahl von Teilnehmern zu tun, sondern mit relativ wenigen Schiffen. Zudem gab es eine Anzahl von Ereignissen, bei denen große Einheiten ausfielen, die also sicherlich von einem mathematischen Modell nicht verhergesehen werden können. Es waren dies insbesondere:

17.03 Indefatigable explodiert ($s = 5$)

17.26 Queen Mary explodiert nach dem fünften Treffer ($s = 5$)

19.33 Invincible explodiert ($s = 6$)

Gefechtsverlauf der Skagerrakschlacht
nach U. Dahm (1977)

	16.48	17.06	17.45	18.05	18.40	19.10	19.40	20.40	21.40
I. Aufklärungs- gruppe (Schlachtkreuzer)	5.0 <i>5.0</i>	5.0 <i>4.8</i>	4.0 <i>4.0</i>	3.5 <i>3.9</i>	3.3 <i>3.7</i>	3.0 <i>3.6</i>	2.5 <i>3.0</i>	2.0 <i>2.2</i>	1.9 <i>2.1</i>
5. Division (Linienfahrer der König-Klasse)	4.0 <i>4.0</i>	– –	– –	4.0 <i>4.0</i>	4.0 <i>3.9</i>	4.0 <i>3.9</i>	3.5 <i>3.5</i>	3.0 <i>3.0</i>	3.2 <i>3.0</i>
I., II. Schlacht- kreuzergeschwader	6.0 <i>6.0</i>	4.0 <i>5.1</i>	3.0 <i>3.7</i>	3.0 <i>3.0</i>	2.5 <i>2.4</i>	2.5 <i>2.2</i>	– –	– –	2.6 <i>2.1</i>
III. Schlacht- kreuzergeschwader	3.0 <i>3.0</i>	– –	– –	– –	– –	– –	2.0 <i>2.7</i>	– –	2.0 <i>2.7</i>
V. Schlachtgeschw. (Schlachtschiffe der Elisabeth-Klasse)	4.0 <i>4.0</i>	– –	4.0 <i>3.9</i>	4.0 <i>3.8</i>	3.0 <i>3.2</i>	3.0 <i>3.1</i>	2.2 <i>2.1</i>	– –	2.2 <i>2.1</i>

Tabelle 1: Modellierung der Skagerrakschlacht nach Dahm.

Obere zwei Zeilen: Deutsche Verbände, untere drei Zeilen: Britische Verbände.

C Klassifikation von Literatur

Es hat eine Reihe von Versuchen gegeben, Brücken von der Mathematik zur Literatur zu schlagen. Wir hatten im ersten Teil dieser Vorlesungsreihe auf die Arbeit von Radbruch [42] hingewiesen. Der bedeutende sowjetische Mathematiker Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987) hat gemeinsam mit A. M. Kondratow im Jahre 1933 eine Analyse der Gedichte von Wladimir Wladimirowitsch Majakowski (1893 – 1930) veröffentlicht [24].

Der Physiker Wilhelm Fucks (1902 – 1990), der durch eine große Anzahl von recht spektakulären Publikationen bekannt wurde („Formeln zur Macht“), hat sich in verschiedenen Artikeln auch dem in Deutschland der sechziger Jahre populären Thema der mathematischen Charakterisierung

des literarischen Stils⁴⁾. zugewandt. Die folgenden Daten sind einem Artikel von Fucks und Lauter entnommen [12].

In den beigegeführten Tabellen 2 und 3, die aus der zitierten Arbeit stammen, sind für je 27 Texte von „Prosadichtern“ und von „Schriftstellern“ die Mittelwerte $\bar{i}$ der Silbenzahlen pro Wort und die Mittelwerte $\bar{j}$ der Wörterzahlen je Satz angegeben. Unabhängig von dem Unterhaltungswert, den eine solche Aufstellung haben kann, stellt man doch fest, daß in der $\bar{j}$ - $\bar{i}$ -Ebene sich die „Dichter“ überraschend deutlich von den „Schriftstellern“ unterscheiden (Abbildung 5).

Heidegger und Pestalozzi befinden sich in der Nähe der „Dichterpunkte“, Bergengruen gehört zu beiden Gebieten an, interessanterweise fällt Goethes „Farbenlehre“ unter die „Schriftsteller“.

Man kann nun versuchen, diese beiden Punktmengen zu trennen. Dies kann hier nicht exakt geschehen, aber man kann versuchen, eine „möglichst gute“ Trennungslinie zu finden, so daß diese Schriftsteller von Prosadichtern trennt. Hierfür gibt es systematische Methoden, auf die hier nicht eingegangen werden soll. Man findet Einzelheiten über derartige Methoden unter den Stichwörtern *Perzeptrons*, *neuronale Netzwerke* oder *support vector machines*. Damit hätte man dann eine „Maschine“, die mit ziemlicher Sicherheit einen vorgelegten Schriftsatz nach seinen schriftstellerischen Qualitäten klassifizieren könnte. In Abbildung 5 ist eine solche Trennungslinie angedeutet.

Literatur

- [1] Martin Braun. *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [2] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.* Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig · Berlin, vierte Auflage, 1922.
- [3] Sean M. Carroll. Der kosmische Ursprung des Zeitpfeils. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 26–34, August 2008.
- [4] Paul J. Crutzen und Michael Müller, Hrsg. *Das Ende des blauen Planeten? Der Klimakollaps: Gefahren und Auswege*, volume 385 of *Beck'sche Reihe*. C. H. Beck, München, 1989.
- [5] Ulrich Dahm. Gefechtsgleichungen zur Beschreibung von Seegefechten. *Zeitschrift für Operations Research*, 21:B37–B60, 1977.
- [6] Philip J. Davis und Reuben Hersh. *Descartes' Traum. Über die Mathematisierung von Zeit und Raum. Von denkenden Computern, Politik und Liebe*. Wolfgang Krüger Verlag, Frankfurt, 1988. Aus dem Amerikanischen und mit einem Glossar von Klaus Volkert.
- [7] Ulrich Eckhardt. Die Epizyklen des Copernicus. In Gudrun Wolfschmidt, Hrsg., *„Es gibt für Könige keinen besonderen Weg zur Geometrie“*. *Festschrift für Karin Reich*, Algorismus. Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Heft 60, S. 219–230. Dr. Erwin Rauner Verlag, Augsburg, 2007.

⁴⁾Dazu aus dem Gedicht „Die Entwicklung der Menschheit“ von Erich Kästner (1932):
... Und sie stellen durch Stiluntersuchungen fest,
daß Cäsar Plattfüße hatte.

	Autor	Werk	$\bar{i}$	$\bar{j}$
1	BERGENGRUEN	<i>Der letzte Rittmeister</i>	1.850	15.263
2	CAROSSA	<i>Geheimnisse des reifen Lebens</i>	1.744	16.570
3	V. CHAMISSO	<i>Peter Schlemihls wundersame Geschichte</i>	1.612	19.754
4	EICHENDORFF	<i>Aus dem Leben eines Taugenichts</i>	1.556	24.900
5	EYTH	<i>Hinter Pflug und Schraubstock</i>	1.715	15.035
6	FALLADA	<i>Kleiner Mann, was nun?</i>	1.530	10.676
7	FONTANE	<i>Effi Briest</i>	1.724	14.440
8	GOETHE	<i>Mittelwert aus vier Werken</i>	1.694	25.439
8 ₁		<i>Farbenlehre</i>	1.800	27.109
8 ₂		<i>Italienische Reise</i>	1.715	22.724
8 ₃		<i>Hermann und Dorothea</i>	1.575	22.825
8 ₄		<i>Dichtung und Wahrheit</i>	1.686	29.100
9	HAUFF	<i>Phantasien im Bremer Ratskeller</i>	1.645	20.700
10	HESSE	<i>Der Steppenwolf</i>	1.716	20.011
11	HOFFMANN	<i>Rat Krespel</i>	1.721	24.868
12	JÜNGER	<i>Auf den Marmorklippen</i>	1.656	24.090
13	KÄSTNER	<i>Die verschwundene Miniatur</i>	1.732	8.432
14	LAMPRECHT	<i>Alexanderlied</i>	1.562	14.540
15	MANN	<i>Buddenbrooks</i>	1.804	18.850
16	MAY	<i>Winnetou I</i>	1.613	14.100
17	MÖRIKE	<i>Mozart auf der Reise nach Prag</i>	1.710	19.814
18	RAABE	<i>Die Chronik der Sperlingsgasse</i>	1.803	18.955
19	RILKE	<i>Weise von Liebe und Tod des Cornets Chr. Rilke</i>	1.451	8.747
20	SCHILLER	<i>Der Geisterseher</i>	1.713	15.624
21	STIFTER	<i>Der Hochwald</i>	1.735	27.790
22	STORM	<i>Der Schimmelreiter</i>	1.631	18.825
23	WASSERMANN	<i>Der Fall Mauritius</i>	1.769	21.416
	Schwerpunkt	Sämtliche Texte	1.682	18.211

Tabelle 2: Prosadichter.

	Autor	Werk	$\bar{i}$	$\bar{j}$
1	ADLER	<i>Menschenkenntnis</i>	1.866	23.276
2	BISMARCK	<i>Reichstagsreden 1885–89</i> (Aus »Ges. Werke« Bd. 13)	2.281	33.863
3	EINSTEIN	<i>Evolution der Physik</i>	1.929	21.097
4	FREUD	<i>Fragen der Laienanalyse</i>	1.891	19.144
5	GERLACH	<i>Experimente zur Kernphysik</i>	2.008	21.142
6	GUARDINI	<i>Der Tod des Sokrates</i>	1.832	21.444
7	HEGEL	<i>Wissenschaft d. Logik</i> , 1812 (Aus »Sämtl. W.«, Bd. III)	1.835	31.381
8	HEIDEGGER	<i>Was ist Metaphysik?</i>	1.818	16.802
9	HEISENBERG	<i>Die Physik der Atomkerne</i>	1.919	20.530
10	HEUSS	<i>ts Randbemerkungen</i>	1.980	20.500
11	A. V. HUMBOLDT	<i>Neuspanien</i>	2.054	31.719
12	JOOS	<i>Lehrb. der Theoretischen Physik</i>	2.046	22.642
13	KORDT	<i>Die Wilhelmstraße</i>	2.110	26.000
14	MARX	<i>Das Kapital</i>	2.021	32.668
15	OSTWALD	<i>Farbkunde</i>	1.969	20.452
16	PESTALOZZI	<i>Körpererziehung</i>	1.764	26.683
17	PLANCK	<i>Vorträge</i>	2.019	23.531
18	DU BOIS-REYMOND	<i>Über eine Akademie der deutschen Sprache</i>	1.939	11.181
19	RUCKER	<i>Vortrag: Die Aufgabe des planenden Ingenieurs</i>	2.191	27.642
20	SAUER	<i>Über elektronische Rechenautomaten</i>	2.270	22.600
21	V. SCHLIEFFEN	<i>Cannae</i>	1.894	20.531
22	SCHLIEMANN	<i>Trojanische Altertümer</i>	1.892	42.134
23	SCHÜTZ	<i>Anspr.: Studententum und Zeitgeschehen</i>	2.090	35.600
24	SOMBART	<i>Die drei Nationalökonomien</i>	2.009	22.655
25	SOMMERFELD	<i>Atombau und Spektrallinien</i>	2.100	21.597
26	WEBER	<i>Wirtschaftsgeschichte</i>	1.874	22.287
27	V. WEIZSÄCKER	<i>Das Weltbild der Physik</i>	1.970	19.300
	Schwerpunkt	Sämtliche Texte	1.984	24.385

Tabelle 3: Schriftsteller.

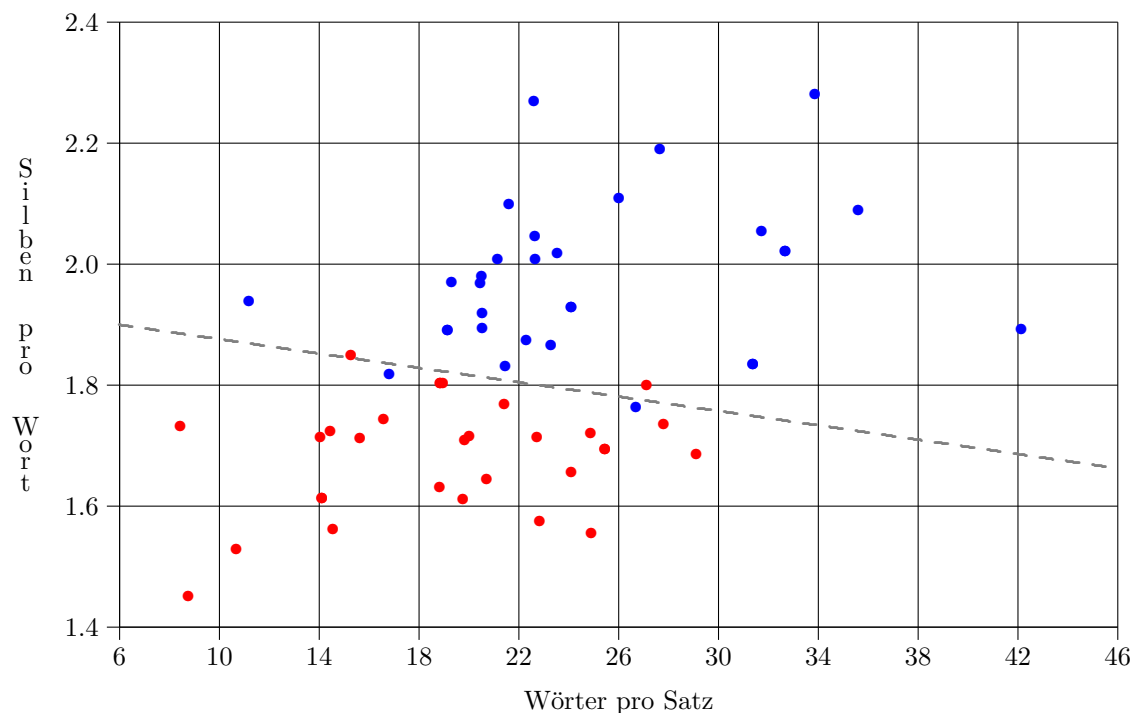


Abbildung 5: Darstellung der Daten.

Mittelwerte $\bar{i}$ der Silbenzahlen pro Wort aufgetragen über den Mittelwerten $\bar{j}$ der Wörterzahlen je Satz. Die Werte für „Schriftsteller“ sind blau dargestellt, die für „Prosadichter“ rot.

- [8] J. H. Engel. A verification of Lanchester's law. *Operations Research*, 2(2):163–171, May 1954.
- [9] Reinhard Finster und Gerd van den Heuvel. *Gottfried Wilhelm Leibniz in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten*. rowohlt's monographien 50481. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 5. Auflage, Januar 2005.
- [10] Klaus Fraedrich. Forecasting: predictability, probability, and persistence. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XXVI:5–27, 2007.
- [11] Herbert W. Franke. *Der grüne Komet*. Goldmann Science Fiction 23037. Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1964.
- [12] Wilhelm Fucks und Josef Lauter. Mathematische Analyse des literarischen Stils. In [28, S. 107–122].
- [13] Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgauds und Karl-Heinz Schlotte, Hrsg. *Lexikon bedeutender Mathematiker*. Verlag Harri Deutsch, Thun · Fankfurt (M.), 1990.
- [14] Jürgen Hahn. Nuklearer Winter – reale Bedrohung (Monatsspektrum). *Spektrum der Wissenschaft*, S. 14–15, August 1985.

- [15] Jürgen Hamel. *Nicolaus Copernicus, Leben, Werk und Wirkung. Mit einem Geleitwort von Owen Gingerich*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin · Oxford, 1994.
- [16] Richard W. Hamming. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw–Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.
- [17] Hans Hermes. *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Einführung in die Theorie der rekursiven Funktionen*. Heidelberger Taschenbücher Band 87. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Zweite Auflage, 1971.
- [18] IPCC. *Climate Change 2001: The Scientific Basis. Summary for Policymakers and Technical Summary of the Working Group I Report. Technical Summary, Box 3*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [19] Klaus Jöhnk. Chaos in Planktongemeinschaften (Forschung aktuell). *Spektrum der Wissenschaft*, S. 16,17,19, Juli 2008.
- [20] A. P. Juškevič und E. Winter. *Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729 – 1764*. Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Philosophie, Geschichte, Staats-, Rechts- und Wirtschaftswissenschaften, Jahrgang 1965, Nr. 1. Akademie-Verlag, Berlin, 1965.
- [21] Dieter Kasang. Klimamodelle.
<http://www.hamburger-bildungsserver.de/klima/klimawandel/klimamodelle>,
Januar 2007.
- [22] Rupert Klein. Mathematik im Klima des globalen Wandels. (Gauß-Vorlesung, TU-Braunschweig, 10. Juni 2005). *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 109(1):3–29, März 2007.
- [23] Arthur Koestler. *Die Nachtwandler. Entstehungsgeschichte unserer Welterkenntnis*. suhrkamp taschenbuch 579. Suhrkamp Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main, 1980.
- [24] A. N. Kolmogoroff. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 2, Heft 3. Springer-Verlag, Berlin, 1933.
- [25] *Der Koran. Das heilige Buch des Islam. Nach der Übertragung von Ludwig Ullmann neu bearbeitet und erläutert von L. W.-Winter*. Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1959.
- [26] Tanja Krämer. Interview: »Bis zur eisfreien Arktis ist es nur eine Frage der Zeit« (Forschung aktuell). *Spektrum der Wissenschaft*, S. 24–25, März 2007.
- [27] Otto Krätz. *Goethe und die Naturwissenschaften*. Verlag Georg D. W. Callwey, München, 2., korrigierte Auflage, Sonderausgabe, 1998.
- [28] Helmut Kreuzer and Rul Gunzenhäuser, editors. *Mathematik und Dichtung. Versuche zur Frage einer exakten Literaturwissenschaft*. sammlung dialog. Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1965.
- [29] F. W. Lanchester. *Aircraft in Warfare. The Dawn of the Fourth Arm. With Introductory Preface by Maj.-Gen. Sir David Henderson, K. C. B. Director General of Military Aeronautics*. Constable and Company Limited, Orange Street Leicester Square London, 1916.

- [30] Georg Christoph Lichtenberg. *Schriften und Briefe. Erster Band: Sudelbücher, Zweiter Band: Sudelbücher II. Materialhefte, Tagebücher, Dritter Band: Aufsätze, Entwürfe, Gedichte, Erklärung der Hogarthschen Kupferstiche, Vierter Band: Briefe, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band I und Band II von Wolfgang Promies, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band III. Herausgegeben von Wolfgang Promies.* Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1998.
- [31] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, March 1963.
- [32] Robert Mark. The structural analysis of gothic cathedrals. *Scientific American*, 227(5):90–99, November 1972.
- [33] Robert Mark und William W. Clark. Architektur der Gotik. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 122–130, Januar 1985.
- [34] Kurt Mendelssohn. *Das Rätsel der Pyramiden. Aus dem Englischen übertragen von Dr. Joachim Reborn.* Bechtermünz Verlag. Genehmigte Lizenzausgabe für Weltbild Verlag GmbH, Augsburg, 1999. *The Riddle of the Pyramids*, Thames & Hudson, London, 1974.
- [35] Karl von Meyenn, Hrsg. *Lust an der Erkenntnis. Triumph und Krise der Mechanik. Ein Lesebuch zur Geschichte der Physik.* Serie Piper, 1146. R. Piper Verlag, München, Zürich, Februar 1990.
- [36] Jürgen Mittelstraß. *Die Möglichkeit von Wissenschaft.* suhrkamp taschenbuch wissenschaft 62. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1974.
- [37] Jürgen Mittelstraß. Vom Nutzen des Irrtums in der Wissenschaft. *Naturwissenschaften*, 84:291–299, 1997.
- [38] Ewald Oetzel und Wolfgang Polte. *Der gescholtene Thales. Anekdotisches um Gelehrte und Gelehrte aus zwei Jahrtausenden. Mit Illustrationen von Manfred Bofinger.* Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin, 1989.
- [39] Winfried Paschen. *Das Nestling-Problem in meteorologischen Modellen (Probleme sprunghafter Gitternetzverfeinerung).* Dissertation, Universität Hamburg, Fachbereich Geowissenschaften, 1980.
- [40] Winfried Paschen. Das Nestling-Problem in meteorologischen Modellen (Probleme sprunghafter Gitternetzverfeinerung). Technical Report 45, Hamburger geophysikalische Einzelschriften. Reihe A, 1980.
- [41] Platon. *Sämtliche Werke in drei Bänden.* Verlag Jakob Hegner, Köln und Olten, 5. Auflage, 1967.
- [42] Knut Radbruch. Mathematik in der Lyrik. In A. Beutelspacher u.a., Hrsg. *Überblicke Mathematik 1997.* Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1997.
- [43] Lew Genrichowitsch Schnirelman. Über additive Eigenschaften von Zahlen. *Mathematische Annalen*, 107:649–690, 1933.
- [44] Uwe Schöning. *Theoretische Informatik kurz gefaßt.* B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992.

- [45] Emanuel Sperner. Eine mathematische Analyse der Luftdruckverteilungen in grossen Gebieten. *Veröffentlichungen der Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Naturwissenschaften*, 27:59–77,87, 1956.
- [46] István Szabó. *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Wissenschaft und Kultur, Band 32. Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, Korrigierter Nachdruck der dritten, korrigierten und erweiterten Auflage, 1996. Herausgegeben von Peter Zimmermann und Emil A. Fellmann.
- [47] René Thom. Structural stability, catastrophe theory and applied mathematics. *SIAM Review*, 19(2):189–201, 1977.
- [48] Sven Titz. Klima-Fernwirkung von Luftverschmutzungen (Forschung aktuell). *Spektrum der Wissenschaft*, S. 20–22, Mai 2007.
- [49] Sven Titz. Wolkige Projektionen. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 26–30, April 2007.
- [50] Richard P. Turco, Owen B. Toon, Thomas P. Ackerman, James B. Pollack und Carl Sagan. Die klimatischen Auswirkungen eines Nuklearkrieges. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 36–50, Oktober 1984.
- [51] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, 42:230–265, 1936.
- [52] Pierre-François Verhulst. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10:113–121, 1838.
- [53] Vito Volterra. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Rédigées par Marcel Brelot*. Cahiers Scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia, Fascicule VII. Gauthier–Villars et C^{ie}, éditeurs, Paris, 1931.
- [54] Peter D. Ward. Tod aus der Tiefe. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 26–33, März 2007.