

Mathematik – Das Werkzeug der Erkenntnis

3. Logik

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E-Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/>

27. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Die Geschichte der Logik	4
2.1	Von der Antike bis zum Mittelalter	5
2.2	Leibniz	7
2.3	Von Leibniz bis zum zwanzigsten Jahrhundert	8
3	Was ist Logik?	11
3.1	Eine erste Annäherung	11
3.2	Verknüpfung von Aussagen	12
3.3	Die Implikation	14
3.4	Der logische Widerspruch	19
4	Selbstbezüglichkeit	20
4.1	Selbstbezügliche Aussagen	20
4.2	Die Arbeit von Gödel	22

Vorlesung am 20. 1. 2010 in der Bucerius Law School Hamburg.

Anhang: Einige Beispiele logischer Probleme	25
A Eine Logikaufgabe von Lewis Carroll	25
B Eine Logelei von Zweistein	26
C Das Paradoxon des Sancho Pansa	26
D Der Weihnachtsmann	27
Literatur	31

Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In Spanische Stiefeln eingeschnürt,
Daß er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.

Faust, 1908–1942, Schülerszene

1 Einleitung

Das Wort „Logik“ wird häufig mißbraucht. Wenn man eine Sache als „logisch“ bezeichnet, dann meint man häufig nur „mir ist das selbstverständlich, dir sollte es auch selbstverständlich sein“. Gern mimmt man für sich in Anspruch „logisch denken zu können“ und spricht diese Fähigkeit anderen ab. Daneben hat das Wort häufig auch einen negativen Sinn, wie etwa durch das Goethe-Zitat ausgedrückt wird.

Man hat die Vorstellung, daß Logik in den juristischen Wissenschaften, eine wichtige Rolle spielt. Schließlich geht es in diesen um die „Wahrheitsfindung“, und dazu ist die Logik ja das geeignete Werkzeug. In der Tat, etwa in der Zeitschrift *Jurimetrics: The Journal of Law, Science, and Technology* findet man zahlreiche Beiträge zu dem Thema Mathematik, Statistik und Logik in den Rechtswissenschaften, etwa den Artikel von D. H. Kaye mit dem Titel *Proof in law and science* [30], welcher ein Beitrag zu dem Symposium *The Contrasting Cultures of Law and Science* war.

Schon in der griechischen Antike spielten juristische Probleme eine erhebliche Rolle auch in der Entwicklung der Logik. Bekannt ist das *Pradoxon des Euathlos*. Der Philosoph Protagoras aus Abdera (481 – 411 v. Chr.) lebte davon, junge Menschen in der Sophistik zu unterrichten. Hiervon handelt – unter anderem – auch der Platonische Dialog *Protagoras*. Das Paradoxon wird wie folgt dargestellt [32, S. 446] (siehe auch [52, S. 205 f.]):

EUATHLOS nahm bei PROTAGORAS unter der Bedingung Unterricht in Sophistik, daß er das Honorar erst dann bezahlt, wenn er nach Abschluß der Ausbildung den ersten Prozeß gewonnen haben wird. Nach erfolgter Ausbildung übernahm aber EUATHLOS keinen Prozeß mehr und hielt sich für berechtigt, dem PROTAGORAS das Honorar vorzuenthalten. PROTAGORAS drohte mit einem Gerichtsprozeß und sagte zu EUATHLOS: „Die Richter verurteilen Dich zum Bezahlen oder auch nicht. In beiden Fällen wirst Du bezahlen müssen. Im ersten Fall wegen des Urteilsspruchs, im zweiten Falle wegen unserer Abmachung, denn dann hast Du den ersten Prozeß gewonnen“. Darauf antwortete der von PROTAGORAS in der Sophistik ausgebildete EUATHLOS: „Weder im ersten noch im zweiten Falle werde ich bezahlen. Wenn man mich zur Bezahlung verurteilt, dann habe ich den ersten Prozeß verloren und werde aufgrund unserer Abmachung nicht zahlen. Wenn man mich nicht zur Bezahlung verurteilt, halte ich mich an das Gerichtsurteil und zahle ebenfalls nicht.“

Nun zurück zur Logik! Der Begriff *Logik* bedarf also wohl einer Erklärung. Wenn man sich Hegels *Wissenschaft der Logik* [20, 23, 21, 22] vornimmt, dann hat man größte begriffliche Schwierigkeiten. Es gibt zu diesem Werk eine Reihe von „Auslegungen“, etwa [31]. In einem Artikel von immerhin 14 Seiten hat ein Kollege von mir – im wesentlichen – den Eingangsanakoluth des

ersten Bandes analysiert [28]. Man ist versucht, hier an Georg Christoph Lichtenberg zu denken, der in seinen „Sudelbüchern“ schrieb (Heft E [320]) [46, S. 417]:

Über einen Kirschen-Kern voll Materie läßt sich ein Himten voll Bücher schreiben, oder über eine Kubik-Linie lose Materie läßt sich eine gepreßte Kubik-Rute Dissertation schreiben. Ich glaube daß die Dinte die man verschrieben hat um zu beweisen daß — — — hinreichend gewesen wäre, dem einfältigen Kometen von anno 74 einen bessern Schwanz zu machen als er wirklich hatte. . . .

Die *Wissenschaft der Logik* ist demnach der Exegese nicht nur fähig, sondern auch bedürftig. Dies macht den Umgang mit solchen Texten – zumindest für Menschen wie mich – außerordentlich schwierig.

Demgegenüber ist ein Buch über moderne *mathematische* Logik, etwa [13], relativ dünn, in lakonischem Stil geschrieben und unmißverständlich. Letzteres allerdings nur für „Eingeweihte“, die die Sprache der modernen Logik beherrschen (Möglicherweise kann man das Gleiche über Hegels Logik sagen, dann wäre allerdings die Vielfalt der Auslegungen erklärungsbedürftig).

Nach I. Kant (1724 – 1804, *Kritik der reinen Vernunft*, [29, Band III, S. 21]) ist

. . . die Grenze der Logik aber dadurch bestimmt, daß sie eine Wissenschaft ist, welche nichts als die formalen Regeln alles Denkens (es mag a priori oder empirisch sein, einen Ursprung oder Objekt haben, welches es wolle, in unserem Gemüte zufällige oder natürliche Hindernisse antreffen) ausführlich darlegt und strenge beweiset.

Hier werde ich mich vollständig auf die *formale* oder *mathematische* Logik beschränken. Dies hat Gründe, die (hoffentlich) bald klar werden. Die Logik in diesem Sinne ist – ähnlich wie bei Kant – die Lehre von den Denkgesetzen, die unabhängig von den Denkinhalten gelten. Dies mag zunächst merkwürdig klingen, wird sich aber noch erhellen. Wir beginnen wieder damit, daß wir einen kurzen Blick auf die Geschichte werfen.

2 Die Geschichte der Logik

Es gibt vergleichsweise nur recht wenige Darstellungen der Geschichte der Logik. Das auch heute noch wichtigste Werk stammt von Carl von Prantl (1820 – 1888). Seine *Geschichte der Logik im Abendlande* umfaßt vier Bände [45]. Dieses Werk gilt bis heute – mit Einschränkungen – als die gründlichste und vollständigste Darstellung. Im Jahre 1935 schrieb der polnische Logiker Jan Łukasiewicz (1878 – 1956) einen Artikel zur Geschichte der Aussagenlogik [38]. Eine sehr lesenswerte und schöne kurze Darstellung der Geschichte der Logik wurde von dem Religionsphilosophen und Logiker Heinrich Scholz (1884 – 1956) geschrieben [54]. Der polnische Dominikaner Innocent Marie Joseph Bocheński (1902 – 1995) schrieb 1956 ein kompendiöses Buch (647 Seiten) über formale Logik, in dem er auch auf die Geschichte einging [3]. Weiterhin existiert von ihm eine Geschichte der Logik [4]. Eine allgemeinverständliche und recht lesbare Darstellung der Geschichte der Logik findet man in dem Buch des Wissenschaftsjournalisten Fuchs [17, Kapitel 9].

2.1 Von der Antike bis zum Mittelalter

Die Anfänge der Logik als Methode sind im antiken Griechenland zu finden. Man nennt zuweilen die Eleaten, also Parmenides von Elea (um 540 v. Chr. – nach 480 v. Chr.) und Zenon (der Ältere) von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.), die Begründer der Dialektik [45, Band 1, S. 9], [6, Sechstes Kapitel: Die Eleaten].

Man bezeichnet das 5. vorchristliche Jahrhundert auch als die Zeit der griechischen Aufklärung. Die sogenannten *Sophisten* versuchten, die Gesetze des Denkens bis an ihre Grenzen zu verfolgen und bezogen diese – im Gegensatz zu ihren Vorgängern, die sich vorwiegend auf die Kosmologie konzentriert hatten (die *Physiker* nach Aristoteles) – insbesondere auf den Menschen und die Modelle menschlichen Zusammenlebens. Die Sophisten haben sich naturgemäß auch mit Fragen des Rechts befaßt, von ihnen stammt die Unterscheidung von natürlichem und positivem Recht [6, Elftes Kapitel: Die Sophistik]. Wir kennen die Sophisten vorwiegend durch Aristoteles und Platon, und diese Quellen sind nicht immer ganz fair. Das Wort „Sophistik“ bezeichnet bis heute normalerweise den Mißbrauch der Logik zu spitzfindigem Argumentieren. Derlei hat es natürlich auch gegeben, und man kennt zahllose Beispiele sophistischer Argumentationen (vgl. das Stichwort *Sophisten* in [32]). Auch Kant hat sich zu der „falschen Spitzfindigkeit“ geäußert [12, S. 159]:

In der beginnenden Neuzeit geriet diese in wesentlichen Punkten abgeschliffene aristotelische Logik als pedantisch-spitzfindiger Formalismus in Verruf (vgl. I. KANT, Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren, 1762). [29, Bd. II. Vorkritische Schriften bis 1768 · 2, S. 599 – 615].

Im Hinblick auf die Entartungen der Sophistik fügte Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) seinem Werk das sogenannte *Organon* (Werkzeug) hinzu, um zulässige Schlüsse abzugrenzen. Hierzu schreibt Paul Lorenzen (1915 – 1994) [37, S. 1]

Es ist bekannt, daß eines der wesentlichsten Motive, die in der Antike zur Entdeckung der Logik führten, die Suche nach einer Methode war, den rhetorischen Künsten der Sophisten, die sich erboten, aus Schwarz Weiß zu machen, widerstehen zu können. Es galt, das ungeregelte Spiel des Sich-gegenseitig-Widerlegens in Regeln zu bringen, es zu einem echten „Agon“¹⁾ auszubilden.

Aristoteles weist im *Organon* (Erste Analytiken oder Lehre vom Schluß 31. Kapitel) darauf hin, daß er für die von ihm vorgestellte *Syllogistik* sich nicht auf Vorgänger stützt, sondern daß diese seine eigene Schöpfung ist.

Diese *Aristotelische Logik* wurde mustergültig bis in die Neuzeit hinein. So schreibt noch Kant in seiner *Kritik der reinen Vernunft* [29, Band III, S. 20]):

Daß die Logik diesen sicheren Gang schon von den ältesten Zeiten her gegangen sei, läßt sich daraus ersehen, daß sie seit dem ARISTOTELES keinen Schritt rückwärts hat tun dürfen, wenn man ihr nicht etwa die Wegschaffung einiger entbehrlichen Subtilitäten, oder deutlichere Bestimmung des Vorgetragenen, als Verbesserungen anrechnen will, welches aber mehr zur Eleganz, als zur Sicherheit der Wissenschaft gehört. Merkwürdig ist noch an ihr, daß sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat tun können, und also allem Ansehen nach geschlossen und vollendet zu sein scheint.

¹⁾ Agon ($\alpha\gamma\omega\nu$) Versammlungsplatz, Versammlung, Wettkampf, Kampf, Prozeß, Anstrengung, Bestreben. ...

Der erste Teil dieses Zitats läßt sich – *mutatis mutandis* – haargenau auf die dreizehn Bücher von Euklid anwenden. Was den zweiten Teil anbelangt, so irrt sich hier Kant. Schon in der Antike, mehr noch im Mittelalter wurde die formale Logik weiter ausgebaut. Die Scholastik hat Großes geleistet in der Festigung der Logik.

Nach Aristoteles wurde die Logik vor allem von den Stoikern weiterentwickelt. Hier ist insbesondere Chrysippos (281/278 – 205 v. Chr.) zu erwähnen. Wir werden später noch auf seinen Beitrag zurückkommen.

Die islamischen Gelehrten, insbesondere der persische Philosoph Avicenna (Ibn Sina, 980 – 1037) und der spanische Philosoph Averroës (Ibn Ruschd, 1126 – 1198) bewahrten das Aristotelische Erbe und formten es weiter. Durch sie kam es zu den Gelehrten des christlichen Mittelalters, von denen ich hier nur Thomas von Aquin (1225 – 1274), Wilhelm von Ockham (1285/95 – 1349 oder 1350) und Johannes Duns Scotus (1265/1270 – 1308) nenne. Wilhelm von Ockham scheint das Vorbild des William von Baskerville In Umberto Ecos *Der Name der Rose* zu sein.

Den jüdischen Theologen ging es in den talmudischen Schriften, die etwa im 5. Jahrhundert abgeschlossen wurden, darum, die zahlreichen Widersprüche und Inkonsistenzen der alttestamentarischen Schriften zu erhellen und auszulegen. Ein sehr eindrucksvolles Beispiel für diesen komplizierten Prozeß schildern Alfred Posamentier und Noam Gordon ([44], siehe auch [11]). Im Alten Testament findet man bei der Beschreibung von Salomos Tempel in 1 Kön 7,23 eine Angabe über ein Kultgefäß mit kreisförmigen Querschnitt:

Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.

In einer Parallelstelle 2 Chr 4,2 steht:

Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen breit, ganz rund, fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen konnte es umspannen.

Offenbar wird in diesen beiden Textstellen $\pi \approx 3$ angenommen. Der Gaon („Weise“) von Wilna, Elijah ben Salomon Salman (1720–1797) analysierte diese beiden Stellen in der Bibel. Die hebräischen Texte weichen geringfügig voneinander ab. Bei einem inspirierten Text stellt sich sofort die Frage, was diese Abweichungen zu bedeuten haben. Jedem Buchstaben des hebräischen Alphabets ist eine Zahl zugeordnet. Wenn man die den Abweichungen entsprechenden Zahlen der beiden Textstellen extrahiert, dann stellt man fest, daß sie ein Verhältnis von $\frac{111}{106}$ aufweisen. Nun ist aber $3 \times \frac{111}{106} \approx 3.141\,509$, also eine sehr gute Näherung an π .

Die christlichen Denker des Mittelalters übernahmen die von den islamischen Gelehrten gesammelten und auch von jüdischen Gelehrten tradierten Texte und machten sie sich zu eigen. Es ging ihnen darum, die Glaubenswahrheiten „logisch“ zu beweisen. Auf diese Weise hofften sie – unter anderem – die Heiden von der Wahrheit des Christentums zu überzeugen. Hinzu kommt, daß – anders noch als im Alten Testament – die Überlieferung der Texte des Neuen Testaments nicht eindeutig und unsicher ist und daß das Neue Testament in sich widersprüchlich ist. Man denke nur an die sehr unterschiedlichen Berichte der Evangelisten.

Die Logik entwickelte sich im Mittelalter ähnlich wie im antiken Griechenland von einer ernsthaften Wissenschaft hin zu dem, was man heute unter „scholastischen Spitzfindigkeiten“ versteht. Eine solche Entwicklung ist aber typisch für eine recht verstandene Wissenschaft. Es darf bei der

wissenschaftlichen Forschung keine Denkverbote geben und auch den abstrusesten Folgerungen ist nachzugehen. Die Situation ist ähnlich wie in den Ingenieurwissenschaften. Ein Ingenieur muß beispielsweise ein Auto so gestalten, daß es in allen realistischen Fahrsituationen zuverlässig reagiert. Er wird jedoch auch versuchen, das Fahrzeug unter extremen Bedingungen zu testen, etwa durch Formel-1-Rennen oder durch Crashtests.

2.2 Leibniz

Eine der bedeutendsten Persönlichkeiten der modernen Geschichte ist Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646 – 1716). Er war Philosoph und Mathematiker und hat sich besonders auch auf dem Gebiet der Logik durch Ideen hervorgetan, die seiner Zeit weit voraus waren.

Leider stießen diese Bemühungen fast durchweg auf das Unverständnis seiner Zeitgenossen und auch der Nachwelt. Am bekanntesten wurde Leibniz durch die böse Satire *Candide* von Voltaire (François Marie Arouet, 1694 – 1778). Voltaire hatte sich mit Leibniz sicher nicht eingehend beschäftigt und er war wohl dazu auch nicht in der Lage. Es ist immer leichter, eine große Idee zu verspotten, als sie zu verstehen!

Wir verdanken Leibniz einige herausragende Ideen, die erst in neuester Zeit verstanden und gewürdigt werden konnten. Eine dieser Ideen ist sein Plan, die Gesetze des menschlichen Denkens durch einen logischen Kalkül zu formalisieren [33]. Dazu werden die Elementarbegriffe durch Primzahlen codiert. Zusammengesetzte Begriffe entstehen durch Multiplikation der ihrer definierenden Bestandteile. Leibniz schreibt hierzu in seinen *Elementa calculi* von 1679 (zitiert nach [34, S. 97 f.]:

Wenn der Begriff eines gegebenen terminus in direkter Weise aus den Begriffen zweier oder mehrerer anderer Termini gebildet wird, dann sollte das *Zahlzeichen* des gegebenen Terminus durch gegenseitiges Multiplizieren der *Zahlzeichen* der Termini, die den Begriff des gegebenen Terminus bilden, erzielt werden. Zum Beispiel, da der Mensch ein vernünftiges Lebewesen ist, (und da Gold ein schweres Metall ist), wenn somit die Zahl für Lebewesen (für Metall) a wie 2 ist (m wie 3) und von vernünftig (am schwersten) r wie 3 (p wie 5), dann wird die Zahl für Mensch oder h die gleiche sein wie ar , das ist in diesem Beispiel 2×3 , d. h. 6 (und die Zahl für Gold oder Sol, s , wird die gleiche sein wie mp , das ist in diesem Beispiel 3×5 , d. h. 15).

Auf diese Weise hätte man eine „Sprache“, die völlig präzise wäre und die mit der Benennung eines Begriffs durch seine Zahl gleichfalls die Definition des Begriffs mitliefern würde, denn man kann jede Zahl eindeutig in ihre Primfaktoren zerlegen (siehe auch [14, Kapitel 14]). Man kann sich leicht überlegen, daß die hierfür benötigten Zahlen mit der Komplexität der Begriffe sehr schnell unhandlich groß würden. Leibniz hat deshalb auch eine Rechenmaschine entworfen. Seine Pläne blieben jedoch in den Anfängen stecken, er fand beim Hause Hannover wenig Verständnis und wurde mit Nichtigkeiten beschäftigt. Es mangelte ihm an Geld für seine Forschungen, wir müssen heute feststellen, daß seine Ideen seiner Zeit um Jahrhunderte voraus waren. Seine Rechenmaschine konnte zu seiner Zeit nicht gebaut werden, da die Konstruktion die Möglichkeiten der damaligen Feinmechanik weit überstiegen, man konnte nicht mit der nötigen Präzision fertigen. Moderne Nachbauten funktionieren jedoch einwandfrei. Leibniz hatte die Vision, daß sich Streitigkeiten durch einen logischen Kalkül beilegen ließen. In seinem *Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer*. (um 1686) schreibt er (zitiert nach [2, S. 3]):

Ich habe sogar eine erstaunliche Tatsache gefunden, nämlich daß man durch die Zahlen alle Arten von wahren Sätzen und Folgerungen darstellen kann. . . .

Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen, wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und, wenn es Streitigkeiten unter Leuten gibt, man nur zu sagen braucht: „Rechnen wir!“ ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat.

Eine weitere große Entdeckung Leibniz' war die Binärarithmetik. Man kann jede Zahl als Binärzahl darstellen. Ohne dies hier formal auszuführen, soll nur ein illustrierendes Beispiel gebracht werden:

Betrachten wir die Zahl 21. Wenn wir 21 durch 2 dividieren, erhalten wir 10 mit einem Rest 1, das heißt, es ist

$$21 = 2 \times 10 + 1.$$

Nun nehmen wir uns die Zahl 10 vor: Es ist $10 = 2 \times 5$, also

$$21 = 2 \times (2 \times 5) + 1.$$

Analog verfahren wir mit der 5: Es ist $5 = 2 \times 2 + 1$, also

$$\begin{aligned} 21 &= 2 \times 2 \times (2 \times 2 + 1) + 1 = \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 = \\ &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 1. \end{aligned}$$

Man stellt die Zahl 21 dann dar in der Schreibweise 10101. Die letzte Stelle bezeichnet den Faktor von $2^0 = 1$, die vorletzte den Faktor von $2^1 = 2$ und so weiter.

Auf diese Weise kann man jeder Zahl eine Binärdarstellung zuordnen. Diese Binärdarstellung hat den Vorteil, daß die Grundrechenarten sich sehr einfach darstellen. Der Nachteil ist, daß die Binärdarstellung recht lang werden kann. Die Computer rechnen intern mit einer Biärdarstellung – mit Ausnahme der sowjetischen Setun', die eine Darstellung zur Basis 3 hatte. Die gebräuchlichen Rechner stellen Zahlen mittels 32, 64 oder 80 Binärstellen dar.

Leibniz war von seiner Entdeckung fasziniert. Sein Plan, eine Rechenmaschine unter Zugrundelegung der Binärdarstellung – er nannte es dyadische Darstellung – zu konstruieren, schlug fehl, aus den oben erwähnten Gründen. Besonders begeistert war Leibniz, als er von dem Jesuitenpater Joachim Bouvet von dem chinesischen *I Ging* hörte. Dieses chinesische Weissagungsbuch ist in Abschnitte gegliedert, die je durch ein Hexagramm bezeichnet werden (Abbildung 1). Zwar haben diese Hexagramme nicht die Bedeutung von Binärdarstellungen, aber Leibniz sah hier einen Anknüpfungspunkt für die Mission in China, für ihn waren die Binärzahlen eine Metapher für die Erschaffung der Welt aus dem Nichts. Er nahm an, daß sich seine Dyadik zur Heidenbekehrung in China eigne [16, S. 107]. Allerdings blieb der erhoffte Erfolg aus, diese Denkweisen waren den Chinesen doch zu abseitig! Eine schöne Darstellung der Leibnizschen *characteristica universalis* und der Binärzahlen findet man bei Umberto Eco [14, Kap 14. Von Leibniz zur Encyclopédie].

2.3 Von Leibniz bis zum zwanzigsten Jahrhundert

Während der Zeit der Aufklärung wurde die formale Logik als spitzfindige Scholastik abqualifiziert. Hier ist wohl auch einer der Gründe zu suchen, daß die Logik über Jahrhunderte ein

Schattendasein fristete. Es ist in diesem Zusammenhang äußerst bemerkenswert, daß Gotthold Ephraim Lessing (1729 – 1781) in seiner Polemik gegen den Hauptpastor von St. Katharinen in Hamburg, Johann Melchior Goeze (1717 – 1786) eine Schrift herausgab mit dem Titel *Axiomata, wenn es deren in dergleichen Dingen gibt* (1778). Er schreibt dort

Ich mag die Stelle, so wie ich sie geschrieben habe, hier nicht wiederholen. Und das um so viel weniger, da ich den einzelnen Sätzen derselben, die ich wie *lauter Axiome dahingepflanzt haben soll*, eine etwas andere Ordnung geben will.

Lessing möchte also seine Darlegung bewußt an die Axiomatik etwa eines Euklid anlehnen.

Eine weitere bemerkenswerte Persönlichkeit in der Geschichte der Logik ist George Boole (1815 – 1864). Er schuf mit seiner Schrift *The mathematical analysis of logic: being an essay towards calculus of deductive reasoning* aus dem Jahre 1847 [5] einen algebraischen Logikkalkül. Sein Ziel war es, ähnlich wie Leibniz, logisches Argumentieren zu automatisieren. Heute ist der Name Booles jedem Informatikstudenten vertraut, der Datentyp **BOOLEAN** dient zur formalen Manipulation logischer Ausdrücke.

Eine besondere Erwähnung verdient Lewis Carroll (Charles Lutwige Dodgson, 1832 – 1898), der neben seinen berühmten Büchern über Alice im Wunderland auch ein Lehrbuch über Logik schrieb, das lange verschollen war [8], zur Wiederauffindung des Buches [1]. Man kann sagen, daß Carroll seiner Zeit weit voraus war in seiner Auffassung der Logik. Carrolls Buch zeichnet sich vor anderen Werken der Logik dadurch aus, daß sein Autor einen exzellenten Stil schreibt. Man findet auch in seinen *Alice*-Büchern zahlreiche Hinweise auf die formale Logik.

Mitte des neunzehnten Jahrhunderts schrieb Carl von Prantl (1820 – 1888) seine vierbändige *Geschichte der Logik im Abendlande* [45], welche auch heute noch häufig als Standardliteratur zu diesen Thema zitiert wird. Das Werk ist eine wichtige Quelle zum Verständnis der Geschichte der Logik, allerdings teilt Prantl die Vorurteile seiner Zeitgenossen, die die formale Logik für eine Sammlung leerer Spitzfindigkeiten hielten, etwa im Sinne des vorangestellten Goethezitats. Prantl lebte in einer Zeit des Umbruchs, und er hat die Zeichen der Zeit nicht gesehen. Es gab eine ähnliche Entwicklung auf dem Gebiete der Physik. Der bedeutende französische Epistemologe Abel Rey (1873 – 1940) hatte im Jahre 1907 ein Buch über die Entwicklung der Physik geschrieben. In diesem Buch beklagte er heftig, daß die Physik seiner Zeit nicht mehr ausschließlich im Labor stattfand, sondern mathematisiert wurde. Er hielt dies für eine bedauerliche Verirrung und schrieb (zitiert nach [35, S. 329]):

Die abstrakten Fiktionen der Mathematik haben gewissermaßen eine spanische Wand aufgerichtet zwischen der physikalischen Realität und der Weise, wie die Mathematiker die Wissenschaft von dieser Realität verstehen.

...

Doch die Kompliziertheit ihrer Theorie, ihre Umschweife hinterlassen ein peinliches Gefühl. Es ist zu gemacht, zu sehr gesucht, konstruiert (*édifié*); der Experimentator findet hier nicht jenes spontane Vertrauen, das ihm die stete Berührung mit der physischen Realität einflößt.

Besondere Bedeutung hat das Buch von Rey erlangt, weil es von Wladimir Iljitsch Lenin (1870 – 1924) dazu benutzt wurde, sich für sein Buch *Materialismus und Empiriokritizismus*, welches sich gegen Ernst Mach (1838 – 1916) richtete in die Physik einzuarbeiten. Lenin übernahm dabei die mathematikfeindliche Haltung von Rey.

Prantl wurde ebenfalls von der Entwicklung überholt. Trotzdem ist sein Buch auch heute noch ein vielzitiertes Standardwerk, leider sind seine ungerechten und ungerechtfertigten polemischen Ausfälle zuweilen etwas störend. So schreibt er etwa [45, S. 95]:

Dass Aristoteles auf jene Kehrseite der $\delta\iota\alpha\lambda\epsilon\gamma\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$, welche dem Apodeiktischen gegenüberliegt, so vielfach einging, haben wir sicher nur dem zuzuschreiben, dass er Schüler Plato's ist, wenn auch gleichzeitige Bestrebungen der Antistheneer und Megariker den alten Particularismus der Sophisten erneuten. Und in dieser Beziehung daher zeigt sich Aristoteles als Kind seiner Zeit und seiner Nation, denn dass wesentlich und an sich nothwendig die Theorie der Logik nur aus ihrem Widerspiele sich hervorarbeiten könne, wird wohl Niemand behaupten; auch fällt ja z. B. das $\pi\epsilon\iota\rho\alpha\sigma\tau\iota\kappa\acute{o}\nu$ des $\delta\iota\alpha\lambda\epsilon\gamma\epsilon\sigma\theta\alpha\iota$ an sich dem Gebiete der Pädagogik zu, oder z. B. die blosse Wahrscheinlichkeit ist, so lange sie nicht dem Calcul unterworfen ist, logisch werthlos, ist sie aber jenes, so tritt sie wieder als Thatsache des Wissens auf, oder hinwiederum Lappalien, wie die Mehrzahl der Fangschlüsse sind, wird die wahre Logik gar nicht berücksichtigen.

Die Einschätzung dieser „Lappalien“ änderte sich dramatisch bereits in der letzten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts. Dies hatte zwei Gründe: Einmal begannen die Versuche, die Mathematik auf eine gesicherte Basis zu stellen, und dabei wird man unweigerlich auf die Logik geführt. Hier sind insbesondere die 1884 erschienenen *Grundlagen der Arithmetik* von Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) und die *Principia Mathematica* (1910 – 1913) von Alfred North Whitehead (1861 – 1947) und Bertrand, Earl Russell (1872 – 1970) zu nennen. Eine ganz wichtige Persönlichkeit in diesem Kontext ist David Hilbert (1862 – 1943), der wohl größte und universellste Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts. Hilbert versuchte, die Mathematik formal – letztendlich auf der Basis der Logik – zu begründen. Er hat zusammen mit Wilhelm Ackermann (1896 – 1962) ein Buch über *Grundzüge der theoretischen Logik* geschrieben [26]. David Hilbert hat die formalistische Begründung der Mathematik, bei der man von „Inhalten“ vollkommen absieht und nur die abstrakten formalen Eigenschaften mathematischer Objekte untersucht, recht drastisch dargestellt, indem er über die Geometrie sagte [39, Kap. IX. Geometrie und Erfahrung]:

Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“, „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.

Eine weitere Quelle für eine ernsthaftere Einschätzung der formalen Logik bildete die Beobachtung, daß man vermittels geeigneter elektrischer Schaltkreise elementare logische Funktionen realisieren kann. Von hier führt ein direkter Weg zu den Grundlagen der modernen Computer. In seiner Master-Abschlußarbeit mit dem Titel *A symbolic analysis of relay and switching circuits* aus dem Jahre 1937 begründete Claude Shannon (1916 – 2001) die sogenannte Schaltalgebra, eine Technik, die logische Konstrukte durch elektrische (oder elektronische) Schaltkreise ausdrückt. Konrad Zuse (1910 – 1995) konstruierte seine Rechenanlage Z3 im Jahre 1941, nach Vorarbeiten, die 1936 begannen und Alan Mathison Turing (1912 – 1954) publizierte 1936 einen wichtigen Artikel über die theoretischen Grundlagen der Rechenanlagen [56, 57]. Die modernen Computer sind nichts anderes als „logische Maschinen“, und es stellte sich heraus, daß die in Jahrtausenden gewachsene formale Logik genau das Werkzeug war, diese Maschinen zu projektieren und zu verstehen.

3 Was ist Logik?

3.1 Eine erste Annäherung

Man unterscheidet – die Begriffsbestimmungen und die Termini werden nicht ganz einheitlich gehandhabt – unterschiedliche Methoden der Wahrheitsfindung:

Dialektik Hierbei handelt es sich um die gemeinsame Suche nach Wahrheit im Gespräch. Man kann sich dies so vorstellen, daß zwei Personen unterschiedlicher Meinung sich auf der Agora, also in der Öffentlichkeit, trafen und ihre Ansichten mit Argumenten darlegten. Dabei soll das Resultat im allgemeinen nicht sein, daß der eine Sprecher den anderen „überzeugt“, vielmehr sollen beide durch das Gespräch und das Eingehen auf die Argumente des Partners ihre eigene Meinung prüfen, sie modifizieren oder aber ihre eigenen Argumente bestärkt finden, jedoch auf einem höheren Niveau der Erkenntnis. Hierin liegt die Quelle des Hegelschen (oder Marxistischen) Begriffs der Dialektik.

Sophistik Dies ist eine Form des Meinungsaustausches, die bis an die Grenzen der Argumentationskunst voranschreitet, diese wohl auch überschreitet. Ziel dieser durchaus legitimen Variante der Dialektik ist es, die Argumentationsformen unter extremen Bedingungen auf ihre Belastbarkeit zu prüfen, aber auch, die formalen Argumente auf Bereiche anzuwenden, die mit dem Zusammenleben von Menschen zu tun haben, die also mit formalen und strengen Methoden nicht recht faßbar sind.

Eristik Dies ist eine Abart der Sophistik. Es handelt sich um die Kunst, Recht zu behalten. Diese Kunst ist von Arthur Schopenhauer (1788 – 1860) recht anschaulich in „achtunddreißig Kunstgriffen dargestellt“ worden [55].

Logik Die Logik schließlich ist im Gegensatz zu den hier genannten Formen der Wahrheitssuche ein „Solitärspiel“²⁾. Hier wird versucht, die Schlußweisen zu charakterisieren, die es erlauben, auf dem Ozean der wahren Aussagen gefahrlos zu navigieren, das heißt, die von wahren Aussagen wieder zu wahren Aussagen führen.

Bei der Logik hat man eine große didaktische Schwierigkeit. Die Schlußformen der Logik erscheinen „trivial“, es leuchtet nicht recht ein, daß man aus derlei eine Wissenschaft aufbauen kann. Dies ist auch der Grund für die heftige Ablehnung der Logik seit Anbeginn der Existenz dieser Wissenschaft. Sobald die Anwendungen der Logik jedoch komplizierter werden, hat man enorme Verständnisschwierigkeiten. Die Schlußweisen der Logik sind nämlich **nicht** die des „gesunden Menschenverstandes“ und ich pflege gelegentlich zu sagen, daß logisches Denken und pathologisches Denken nicht allzuweit voneinander entfernt sind.

Wir werfen nun einen Blick auf einige der Methoden der Logik. Generell handelt die Logik von *wahren* Aussagen. Allerdings ist man in der modernen Logik mit dem Wort „wahr“ äußerst vorsichtig geworden. Mich erinnert diese Situation immer an den Dialog zwischen Jesus und Pontius Pilatus im Johannesevangelium (Joh 18, 33–38):

Da ging Pilatus wieder hinein ins Prätorium und rief Jesus und fragte ihn: Bist du der König der Juden?

²⁾Es gibt auch eine „dialogische“ Interpretation der Logik als einer Verhandlung eines Proponenten und eines Opponenten vor dem „Richterstuhl der Wahrheit“ [37]).

Jesus antwortete: Sagst du das von dir aus, oder haben dir's andere über mich gesagt?

Pilatus antwortete: Bin ich ein Jude? Dein Volk und die Hohenpriester haben dich mir überantwortet. Was hast du getan?

Jesus antwortete: Mein Reich ist nicht von dieser Welt. Wäre mein Reich von dieser Welt, meine Diener würden darum kämpfen, daß ich den Juden nicht überantwortet würde; nun aber ist mein Reich nicht von dieser Welt.

Da fragte ihn Pilatus: So bist du dennoch ein König? Jesus antwortete: Du sagst es, ich bin ein König. Ich bin dazu geboren und in die Welt gekommen, daß ich die Wahrheit bezeugen soll. Wer aus der Wahrheit ist, der hört meine Stimme.

Spricht Pilatus zu ihm: Was ist Wahrheit? Und als er das gesagt hatte, ging er wieder hinaus zu den Juden und spricht zu ihnen: Ich finde keine Schuld an ihm.

Sowohl Pilatus als auch Jesus befanden sich im spätgriechischen Kulturkreis. Ich nehme an, daß beide wußten, welch schwieriger Begriff dies sei, die „Wahrheit“. Deshalb antwortete Jesus nicht auf Pilatus' Frage, denn hier haben wir die klassische Situation der Unmöglichkeit von Kommunikation: Das, was Jesus unter „Wahrheit“ verstand, hätte Pilatus nicht akzeptieren können – und umgekehrt. Pilatus scheint sich des Problems bewußt gewesen zu sein, dann er erwartet offenbar keine Antwort, „er ging hinaus“.

Wir sind heute ebenso zurückhaltend mit dem Wort „Wahrheit“, wir ziehen es vor, von „Herleitbarkeit“ innerhalb eines gewissen Systems zu sprechen. Der Einfachheit halber werde ich hier von „wahren“ und „falschen“ Aussagen sprechen, bitte aber, diese Begriffe nicht zu überinterpretieren.

3.2 Verknüpfung von Aussagen

Wenn man irgendwelche Aussagen in der Logik betrachtet, etwa

Alle Menschen sind sterblich,

dann sollen die Worte dieser Aussage *abstrakt* verstanden werden, das heißt, als Bewohner des Reichs der Logik und nicht als Objekte dieser Welt, die eine Unzahl von Eigenschaften besitzen. Wir führen daher für solche Aussagen Abkürzungen ein, etwa A , B , ... Jeder Aussage ordnen wir einen Wahrheitswert zu, das heißt, sie ist entweder wahr oder falsch (im oben skizzierten Sinne).

Man kann nun aus verschiedenen Aussagen neue Aussagen gewinnen, indem man die Aussagen miteinander verknüpft. Nehmen wir ein Beispiel: Es sei A die Aussage

Es regnet.

Weiterhin sei B die Aussage

Die Glocken läuten.

Wir definieren nun eine Verknüpfung *und*, die wir mit dem Symbol $\wedge$ bezeichnen auf die folgende Weise: Die Aussage $A \wedge B$ soll wahr sein, wenn sowohl A als auch B wahr sind. $A \wedge B$ würde also in unserem Beispiel bedeuten:

Es regnet **und** die Glocken läuten.

Man stellt eine solche Verknüpfung gern in einer *Wahrheitstafel* dar:

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Eine andere Möglichkeit ist die Verknüpfung *oder*, symbolisiert durch $\vee$. Das Kompositum $A \vee B$ ist wahr, wenn eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist und falsch, wenn beide falsch sind. Die Wahrheitstafel dieser Verknüpfung ist

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

In unserem Beispiel bedeutet $A \vee B$

Es regnet **oder** die Glocken läuten,

eine Aussage, die man gern auf die Städte Aachen oder Münster anwendet. Wir müssen hier ganz präzise sein: Die Aussage $A \vee B$ kann heißen, daß es regnet, daß die Glocken läuten oder daß beides der Fall ist.

In der modernen „gehobenen“ Umgangssprache hat man die Verknüpfung „und/oder“ eingeführt. Ein solches Konstrukt wird man etwa bei Goethe nirgends finden, und es ist auch völlig unnötig, denn es entspricht haargenau dem umgangssprachlichen *oder*. Als Beleg betrachten wir eine Stelle aus dem Alten Testament, in der es um Ersatzleistungen bei fahrlässigem Handeln geht (EX 21, 33–34):

Wenn jemand eine Zisterne aufdeckt **oder** gräbt eine Zisterne **und** deckt sie nicht zu
und es fällt ein Rind **oder** Esel hinein,
 (EX 21,33)
 so soll der Besitzer der Zisterne mit Geld dem andern Ersatz leisten, das tote Tier
 aber soll ihm gehören. (EX 21,34)

Fällt also ein Rind **und** ein Esel in die Grube, dann gilt das Gesetz genauso, wie wenn nur ein Rind oder ein Esel in die Grube gefallen wäre.

Demgegenüber findet man beispielsweise in der Hausordnung der Bundesbahn (VPS0901101 Stand 05/2008) etwa die Formulierung

Festgestellte Verstöße gegen die Hausordnung führen zu Hausverweis, Hausverbot,
 Strafverfolgung und/oder Schadensersatzforderungen.

Hier soll offenbar eine „logisch anmutende“ Präzision suggeriert werden, die neben der schlichteren (und präzisen) Formulierung des Alten Testaments recht gestelzt anmutet!

Eine weitere logische Operation ist die *Negation*, symbolisiert durch $\neg$. Bezeichnet wieder A die Aussage

Es regnet,

dann bedeutet $\neg A$ die Aussage

Es regnet nicht.

Offenbar gilt die Aussage $\neg\neg A = A$, das heißt, eine doppelte Verneinung ist eine Bejahung. In der Umgangssprache ist dies nicht immer so, wenn in Bayern jemand sagt: „Ich habe keinen Hund nicht gesehen“, dann meint er, er habe überhaupt keinen Hund gesehen, und nicht, daß er einen Hund gesehen habe. Besonders in den slawischen Sprachen ist die doppelte Verneinung in dieser Bedeutung recht beliebt.

Andererseits kann eine doppelte Verneinung eine abgeschwächte Bejahung bedeuten. Wenn man sagt: „Ich kann nicht leugnen, daß ...“, dann heißt das, daß man die betreffende Aussage für wahr hält, aber mit Vorbehalten, sonst hätte man einfach gesagt: „Es ist ...“. Es ist recht schwierig, mit komplizierten Verneinungskonstruktionen umzugehen. Ein schönes Beispiel hierfür ist §118 BGB:

§118. [Mangel der Ernstlichkeit] Eine **nicht** ernstlich gemeinte Willenserklärung, die in der Erwartung abgegeben wird, der **Mangel** der Ernstlichkeit werde **nicht verkannt** werden, ist **nichtig**.

Ein weniger seriöses Beispiel:

Nichts liegt mir ferner, als die Nichteinführung eines Rauchverbots nicht mit allen mit zur Verfügung stehenden Mitteln nicht zu bekämpfen.

Was ist hier gemeint?

Man kann sich leicht überlegen, daß es nur 16 voneinander verschiedene Wahrheitstafeln geben kann. Zu jeder solchen Wahrheitstafel gehört eine logische Verknüpfung. In Tabelle 1 sind sämtliche möglichen Verknüpfungen dargestellt. Einige davon, wie etwa die Tautologie oder die Kontradiktion sind keine eigentlichen Verknüpfungen. Gleichmaßen sind die beiden Negationen keine „richtigen“ Verknüpfungen, da bei ihnen eine Variable ignoriert wird, das heißt, die Verknüpfung für $\neg A$ (Nr. 13) ist völlig unabhängig von der Variablen B . Man kann zeigen, daß zur Konstruktion aller Verknüpfungen die Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ ausreichen. Diese sind in der Tabelle rot markiert.

3.3 Die Implikation

Bislang haben wir nur recht „harmlose“ Verknüpfungen untersucht. Eine Verknüpfung, die bereits in der Antike die Gemüter erregte, ist die Implikation. Die Implikation dient dazu, aus wahren Aussagen neue wahre Aussagen herzuleiten. In seinem Buch über Logik schreibt Quine [47, S. 22]:

Das Allerwichtigste an der Logik ist die Implikation; sie wird daher das Hauptthema des Buches bilden.

A B	W W	W F	F W	F F	Symbol	Bezeichnung
1.	W	W	W	W	$A \vee \neg A$	Tautologie
2.	W	W	W	F	$A \vee B$	Alternative
3.	W	W	F	W	$B \Rightarrow A$	Implikation
4.	W	W	F	F	A	
5.	W	F	W	W	$A \Rightarrow B$	Implikation
6.	W	F	W	F	B	
7.	W	F	F	W	$A \equiv B$	Äquivalenz
8.	W	F	F	F	$A \wedge B$	Konjunktion
9.	F	W	W	W	$\neg A \vee \neg B$	Unverträglichkeit
10.	F	W	W	F	$A \text{ XOR } B$	Disjunktion (exklusives oder)
11.	F	W	F	W	$\neg B$	
12.	F	W	F	F	$A \wedge \neg B$	
13.	F	F	W	W	$\neg A$	
14.	F	F	W	F	$\neg A \wedge B$	
15.	F	F	F	W	$\neg A \wedge \neg B$	
16.	F	F	F	F	$A \wedge \neg A$	Kontradiktion

Tabelle 1: Tabelle der möglichen logischen Verknüpfungen zweier Aussagen.

Heinrich Scholz schreibt [54, S. 34 f.]

Es hat über zwei Jahrtausende gedauert, bis diese schöne Entdeckung zum zweiten Mal gemacht und, mit einer naheliegenden Ausdehnung dieses Verfahren auf *alle* zusammengesetzten Aussagen, auf eine wahrhaft geistreiche Art für die denkbar einfachste Konstruktion einer exakten Aussagenlogik verwendet worden ist. Dies soll den Stoikern, es soll dem *Chrysippos*, dem „ersten Scholastiker“, nicht vergessen werden. Es versteht sich, daß auf diesem Grunde auch die mit Sorgfalt und Liebe neu bearbeiteten hypothetischen und disjunktiven Schlüsse ... ein neues, schärferes Profil gewinnen.

Wir wollen uns nun überlegen, welche Möglichkeiten wir haben, die wenn-dann-Beziehung durch eine Wahrheitstafel auszudrücken. Dazu führen wir eine Operation für logische Aussagen ein $\square$ ein. Es seien A und B logische Aussagen, dann soll mit $A \square B$ eine Verknüpfung bezeichnet werden, die dem logischen „Wenn A , dann B “ beziehungsweise „ A impliziert B “ ... entspricht. Diese Relation soll ein Navigationsinstrument auf dem Ozean der wahren Aussagen sein. Wenn sie gültig ist, dann soll aus der Tatsache, daß der Vordersatz oder die Prämisse A wahr ist, geschlossen werden können, daß auch der Nachsatz oder die Konklusion B wahr ist.

Beispiele:

1. Wenn du deinen warmen Schal nicht umbindest, wirst du dich erkälten.
2. Wenn ich einen Eisenstab erhitze, dann vergrößert sich seine Länge.
3. Wenn ich einen Eisenstab erhitze, dreht sich die Erde um sich selbst [7, S. 197].

4. Jedes Elektron hat ein Magnetfeld. Ein Tennisball hat kein Magnetfeld. Also ist ein Tennisball kein Elektron [7, S. 263].

Die erste Aussage ist eine umgangssprachliche Aussage. Ein Kind, welches trotz dieser Ermahnung seinen warmen Schal vergessen hat und sich nicht erkältet, zieht aus dieser Situation die wichtige Lehre, daß seine Mutter nicht immer recht hat. Diese hat gemeint „... wirst du dich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erkälten.“

Die zweite Aussage ist die Zusammenfassung einer wissenschaftlichen Erkenntnis oder einer Erfahrungstatsache. Man hat entweder immer erfahren, daß sich ein Eisenstab ausdehnt, also verlängert, wenn man ihn erhitzt, oder aber man weiß aus der Wärmelehre, daß sich allgemein feste Körper so verhalten.

Die dritte Aussage könnte ebenfalls eine Erfahrungstatsache beschreiben. Man könnte hier einwenden, daß kein „notwendiger“ Zusammenhang zwischen der Erdrotation und dem Erhitzen eines Eisenstabs besteht. Dies würde die Einführung des außerlogischen „mystischen“ Begriffs der Notwendigkeit bedeuten (vgl. hierzu die Argumentation von Rudolf Carnap [7, S. 200]). Auch der Einwand, daß sich die Erde ja auch ohne das Erhitzen des Eisenstabs drehe, ist nicht schlüssig, denn es wird ja nur behauptet, **daß** sich die Erde dreht, **wenn** man einen Eisenstab erhitzt. Dies ist aber unzweifelhaft wahr und kann durch astronomische Messungen bestätigt werden (Das Beispiel stammt von Rudolf Carnap [7, S. 197]).

Die letzte Aussage klingt, wie so viele Beispielaussagen der Logik, recht trivial. Man sollte sich jedoch vor Augen halten, daß hier eine wahre Tatsachenaussage (Jedes Elektron hat ein Magnetfeld. Ein Tennisball hat kein Magnetfeld) zu einer Schlußfolgerung führt, die eine neue wahre Tatsachenaussage ist und die anscheinend nicht in der Ausgangsaussage enthalten ist. Mit anderen Worten: Eine Person, die nicht weiß, was ein Elektron, ein Magnetfeld oder ein Tennisball ist, kann aus der vierten Aussage herleiten, daß ein Tennisball kein Elektron ist (Auch dieses Beispiel stammt von Rudolf Carnap [7, S. 263]). Dieser Vorgang ist nicht so abartig, wie man denken möchte. Es gibt Computersoftware, die genau das tut, etwa CAD-Software, die geometrische Tatsachen herleitet, ohne zu „wissen“, was ein Punkt, eine Gerade oder eine Fläche ist (oder, um auf das Zitat von Hilbert zurückzukommen, ohne zu „wissen“, was Tische, Stühle, Bierseidel sind), Ebenso „denkt“ sich ein Schachprogramm nicht Springer und Türme auf einem Spielfeld. Ein „Expertensystem“ zur Unterstützung medizinischer Diagnosen, etwa das Programm MYCIN [48, S. 191, Sec. 6.3.3] operiert formal mit Begriffen, die es nicht „versteht“. Das „Wissen“ des Expertensystems ist in Form logischer Implikationen codiert, zum Beispiel [48, S. 192]:

If: (1) the stain of the organism is gram-positive, and
 (2) the morphology of the organism is coccus, and
 (3) the growth conformation of the organism is clumps,
then there is suggestive evidence (0.7) that
 the identity of the organism is staphylococcus.

Wir wollen nun anhand unserer Beispiele überlegen, welche Eigenschaften unsere Relation $\square$ haben muß. Wir legen dazu eine hypothetische Wahrheitstafel an, die angibt, welchen Wahrheitswert $A \square B$ haben soll, wenn die Wahrheitswerte von A und B gegeben sind. Wir hatten bereits gesehen, daß für wahres A und wahres B die Aussage $A \square B$ wahr sein soll. Wenn A wahr ist und B falsch, dann sollte $A \square B$ falsch sein, denn es soll nicht möglich sein, aus einer falschen Voraussetzung auf eine wahre Tatsache zu schließen, etwa

Immer, wenn ich ein Einhorn sehe, siedet das Wasser bei 20° C.

Hier ist der Vordersatz (nach allem, was wir wissen) falsch, der Nachsatz ist sicher falsch, jedoch kann eine solche Schlußweise nicht als zulässig, das heißt wahr, angesehen werden. Wir hätten also die folgende noch unvollständige Wahrheitstafel für die Relation $\Box$:

A	B	$A \Box B$
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	?
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	?

Wie ist die Tabelle nun für den Fall eines falschen A zu ergänzen? Diese Frage ist keineswegs trivial. Im Altertum hat der Stoiker Chrysippos aus Soloi (etwa 280 – 205 v. Chr.) hierzu einen Beitrag geliefert, der noch nach fast zweitausend Jahren von dem Philosophen Karl von Prantl (1820 – 1888) als „Blödsinn“ bezeichnet wurde [17, S. 161]. Im Mittelalter haben scholastische Philosophen sich diesem Thema erfolgreich zugewandt, aber es dauerte bis in die allerneueste Zeit, daß man die Bedeutung dieses Konstrukts wieder entdeckte. Zu nennen ist hier der polnische Logiker Jan Łukasiewicz (1878 – 1956) sowie Gottlob Frege (1848 – 1925).

Zur Ergänzung unserer Wahrheitstabelle haben wir die folgenden vier Möglichkeiten: 1.

A	B	$A \Box B$
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Dies scheint zunächst naheliegend. Aus einer falschen Voraussetzung sollte keine wahre Implikation folgen dürfen. Diese Festsetzung würde aber bedeuten, daß unser Konstrukt $A \Box B$ nur in dem Falle wahr wäre daß A **und** B beide wahr sind. Dies würde unter zum Beispiel bedeuten, daß die zweite Beispielaussage

Wenn ich einen Eisenstab erhitze, dann vergrößert sich seine Länge.

falsch wäre, wenn ich mich dazu entschließe, den Eisenstab **nicht** zu erhitzen!

2.

A	B	$A \Box B$
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Auch hierfür ließen sich Argumente anführen. Wir möchten auf die Wahrheit von B schließen, also sollte die Implikation immer dann wahr sein, wenn B wahr ist. Diese Lösung bedeutet, daß die vervollständigte Wahrheitstabelle wie folgt aussieht:

A	B	$A \Box B$
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch

Wir hätten also die Aussage, daß $A \sqcap B$ genau dann wahr ist, wenn B wahr ist, unabhängig von der Wahrheit von A . Das heißt, $A \sqcap B$ wäre nur eine andere Schreibweise für B .

3.

A	B	$A \sqcap B$
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

Hier wäre $A \sqcap B$ genau dann wahr, wenn A und B den gleichen Wahrheitswert haben, das heißt, wenn beide wahr oder beide falsch wären. Diese Relation nennt man die logische Äquivalenz, das heißt, daß B nur eine andere Formulierung von A ist. Auch dieses Konstrukt wäre nicht besonders nützlich. Wir hätten in unserem Beispiel

Wenn ich einen Eisenstab erhitze, dann vergrößert sich seine Länge.

die Situation, daß umgekehrt jedesmal wenn sich ein Eisenstab verlängert sich seine Temperatur erhöht hätte. Es gibt ja auch Möglichkeiten, die Länge eines Eisenstabes auf andere Weise, etwa durch Zugbelastung zu verlängern. Auch diese Formulierung wäre also nicht befriedigend.

4. Es verbleibt als einzige Möglichkeit die Tabelle

A	B	$A \sqcap B$
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	wahr

Man nennt diese Relation die *logische Implikation* und bezeichnet sie mit dem Symbol $A \Rightarrow B$.

Man kann ohne Übertreibung sagen, daß die Implikation das Instrument ist, mit dem wir Mathematik machen. Wenn etwa Euklid im Beweis des Primzahlsatzes argumentiert:

Wenn eine Zahl a durch eine andere Zahl b (ohne Rest) dividierbar ist, dann ist sie auch durch eine Primzahl dividierbar,

dann wäre die Aussage A

a ist durch eine Zahl (verschieden von 1 und a) teilbar.

Die Aussage B wäre

a ist durch eine Primzahl teilbar.

Die Aussage $A \Rightarrow B$ kann unabhängig von dem Wert von a geführt werden. Dazu muß man sich überlegen, daß b entweder eine Primzahl ist – dann wäre nichts zu beweisen – oder aber sich als Produkt von Primzahlen darstellen läßt. In diesem Falle leistet jede der Primzahlen aus dem Produkt das Gewünschte.

Die zunächst befremdende Eigenschaft, daß eine logische Implikation mit falschem Vordersatz immer wahr sein soll – der scholastische Merkspruch lautete *ex falso quodlibet* – hat nicht nur den Historiker von Prantl befremdet. Wir geben manchmal unseren Studenten in einer Einführungsvorlesung über Logik die Aufgabe, zu entscheiden, ob die folgende Aussage wahr ist:

Wenn meine Großmutter Räder hätte, dann wäre sie ein Autobus.

Wenn sich dann keine spontane Idee einstellen möchte, kann man noch einen „hilfreichen“ Hinweis geben: Sie dürfen davon ausgehen, daß die alte Dame **nicht** über Räder verfügt. Wir haben hier die Konstruktion $A \Rightarrow B$, wobei A die Aussage ist „meine Großmutter hat Räder“ und B die Aussage „meine Großmutter ist ein Autobus“. Da aber A falsch ist, können wir nach unserer Wahrheitstafel – was auch immer B sein mag – sofort sagen, daß die Implikation wahr ist!

Diese zunächst gewöhnungsbedürftige Eigenschaft der Implikation hat noch einen weiteren Vorteil. Es wird auf diese Weise möglich, hypothetische Urteile logisch zu behandeln, eine Argumentationsweise, die letztlich auf Zenon von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.) zurückgeht. Man nimmt erst einmal an, daß die zu beweisende Aussage falsch sei und zeigt dann, daß eine solche Voraussetzung auf einen logischen Widerspruch führt. Da ein logisches System, welches auch nur einen einzigen Widerspruch enthält, unbrauchbar ist (siehe den nächsten Abschnitt), muß man die fälschliche Annahme verwerfen. Auf diese Weise hat etwa Euklid (um 300 v. Chr.) gezeigt, daß es unendlich viele Primzahlen geben muß [15, S. 204, Neuntes Buch, §20] (siehe auch Teil 1 dieser Vorlesungsreihe):

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die vorgelegten Primzahlen seien a, b, c . Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als $a, b, c, \dots$

Euklid nimmt hier also das Gegenteil von dem an, was er eigentlich zeigen will, nämlich daß es nur endlich viele Primzahlen gebe. Dann beweist er, daß es unter dieser Annahme immer noch eine Primzahl geben muß, die nicht unter den angenommenen endlich vielen Primzahlen zu finden sind. Damit hat er einen logischen Widerspruch gefunden, der die Ausgangsannahme *ad absurdum* führt. Ganz am Rande sei hier angemerkt, daß Euklid hier den Beweis durch Widerspruch, die *reductio ad absurdum*, äußerst listenreich verwendet, um eine Aussage über die Unendlichkeit einer Menge zu beweisen, ohne dabei das Wort „unendlich“ zu gebrauchen.

3.4 Der logische Widerspruch

Die erwähnte Tatsache, daß ein logisches System, welches auch nur einen einzigen Widerspruch enthält, hängt eng mit den Eigenschaften der Implikation zusammen. Als logischen Widerspruch bezeichnet man die Aussage, „daß ein Identisches an einem Identischen zugleich in derselben Hinsicht bestehe und nicht bestehe“ (Aristoteles, Metaphysik, G3, 1005 b). Etwas vereinfachend ausgedrückt: Ein logischer Widerspruch ist eine Aussage der Form: „Die Aussage A ist zugleich wahr und nicht wahr“. Es liegt an den Gesetzen der einfachsten und elementarsten Logik, daß jedes logische System, welches auch nur eine einzige widersprüchliche Aussage enthält, völlig unbrauchbar ist, da sich in einem solchen System jede Aussage als wahr herleiten ließe. Wenn es nämlich eine solche widersprüchliche Aussage A gäbe, dann könnte man irgendeine beliebige Aussage B hernehmen und die Implikation $A \Rightarrow B$ untersuchen. Diese Implikation ist wahr, denn wir hatten angenommen, daß A nicht wahr, also falsch ist, und bei falscher Prämisse ist jede Implikation wahr. Nun ist aber A nach Voraussetzung auch wahr. Da die Implikation wahr ist, muß zwingend auch B wahr sein. Wir haben also gezeigt, daß bei Vorliegen eines Widerspruchs **jede** Aussage als wahr nachweisbar ist. Ein solches logisches System ist aber unbrauchbar. Diese Erkenntnis hat Bocheński als „einen der Höhepunkte der scholastischen Aussagenlogik“ bezeichnet (nach [17, S. 168]). Er wurde von Albert von Sachsen (1316 – 1390) in seiner *Perutilis Logica Magistri Alberti de Saxonia* (1522) erläutert und vollständig dargestellt.

Daß diese Eigenschaft widersprüchlicher Aussagen nicht so theoretisch ist, wie es anmuten mag, sieht man etwa beim Studium der Tagespresse: Wenn ein regierungsnaher Experte eine Maßnahme der Regierung kommentiert, dann weist er nachvollziehbar nach, daß diese Maßnahme wirkungsvoll gewesen sei. Der Experte der Opposition weist genau so schlüssig nach, daß die Maßnahme ihr Ziel verfehlt habe. Mindestens einer der Experten – wahrscheinlich beide – hat in dem System seiner Voraussetzungen – mit Sicherheit unbewußt – eine widersprüchliche Aussage, und damit fallen dann alle Beweise besonders leicht.

Im täglichen Leben denken wir nicht logisch, logisches Denken grenzt vielmehr an pathologisches Denken. Wir sind gewohnt, mit Widersprüchen umzugehen. Ein Beispiel: in dem bekannten Lehrbuch der Experimentalphysik von Gehrtsen, Kneser und Vogel [18, S. 25, 1.5.9.f] findet man bei der Herleitung der Pendelgleichung beiläufig die Aussage, daß die potentielle Energie der Höhe proportional sei. Diese Aussage ist streng nur dann richtig, wenn die Erde eine unendlich ausgedehnte flache Scheibe ist. Acht Seiten weiter, unter 1.7.1 wird dann ebenso beiläufig erwähnt, daß die Erde Kugelgestalt habe.

Kein Physiker, ja überhaupt kein „vernünftiger“ Mensch wird aus diesen beiden Aussagen irgendwelche falschen Schlüsse ziehen, weil wir „natürlich“ wissen, daß physikalische Aussagen nur innerhalb eines gewissen Kontexts „richtig“ sind. Ein Roboter, der lesen kann und der logische Schlüsse ziehen kann, würde nach der Lektüre dieses Physiklehrbuchs möglicherweise behaupten, daß er nachweisbar Napoleon sei. Er hätte damit sogar „Recht“.

Innerhalb der Mathematik und der Logik müssen wir den Widerspruch ganz verbannen. Häufig wird das mißverstanden und als Dogmatik denunziert. Die Widerspruchsfreiheit ist aber unsere „Lebensversicherung“ in schwierigem Gelände. (vgl. Carnap [7, S. 131] über die Rolle der Logik beim Parallelenaxiom).

4 Selbstbezüglichkeit

4.1 Selbstbezügliche Aussagen

Schon seit dem Altertum ist das Problem der selbstbezüglichen Aussagen bekannt. Ein klassisches Paradoxon, das sogenannte *Lügnerparadoxon*. In der Formulierung von Epimenides von Knossos auf Kreta (6./7. Jahrhundert v. Chr.) lautet es

Epimenides der Kreter sagte: Alle Kreter sind Lügner.

Dieses Paradoxon war in der Antike recht populär, so schreibt Paulus in seinem Brief an Titus (Tit 1,12):

Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäume.

Hier kommt es darauf an, wie man das Wort „Lügner“ definiert. In der Umgangssprache ist ein Lügner ein Mensch, der zuweilen lügt. Ein *logischer Lügner* wäre ein Mensch, der immer lügt. Allerdings ist diese Aussage noch nicht wirklich paradox, denn wenn Epimenides wirklich ein „logischer“ Lügner wäre, dann wäre seine Aussage falsch. Das würde aber nur bedeuten, daß nicht alle Kreter Lügner sind, und Epimenides könnte dann zwar zu den Lügnern gehören, aber der Rest der Kreter könnte durchaus wahrheitsliebend sein.

Eine stringenter Variante des Paradoxons stammt von Eubulides von Milet (Mitte 4. Jahrhundert v. Chr.). Der Text des Eubulides ist nicht direkt überliefert, aber gut rekonstruierbar [50]:

„Wenn ich lügend sage, dass ich lüge, lüge ich oder sage ich Wahres?“
„Du sagst Wahres.“
„Wenn ich Wahres sage und sage, dass ich lüge, lüge ich.“
„Du lügst offenbar.“
„Wenn ich aber lügnerisch sage, dass ich lüge, sage ich Wahres.“

In moderner, kürzerer und präziserer Form könnte man das Paradoxon etwa durch folgende beiden Sätze darstellen:

Satz *A*: Satz *B* ist falsch.
Satz *B*: Satz *A* ist richtig.

Man kann nun leicht überlegen, daß aus der Annahme, Satz *A* sei wahr, folgt, daß *A* falsch ist, und umgekehrt.

Es gibt zahllose antike und moderne logische Paradoxa, und noch zahlreicher sind die angebotenen „Lösungen“ [51]. Das Lügnerparadoxon ist ein Beispiel für *Selbstbezüglichkeit*, eine Person sagt aus, daß sie lüge. Die Problematik der Selbstbezüglichkeit wird recht gut in dem Buch von Douglas R. Hofstadter *Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band* dargestellt, welches zu seiner Zeit viel zitiert – und hoffentlich auch gelesen – wurde [27].

Die Selbstbezüglichkeit führte die Mathematik – und auch die Logik – in der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts in eine tiefe Krise. Es begann damit, daß man sich über die Grundlagen der Mathematik Gedanken machte.

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) schrieb – neben anderen bedeutenden Beiträgen zu diesem Thema – sein zweibändiges Werk *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903). Darin versuchte er, die Mathematik auf der Logik aufzubauen. Ein ähnliches Anliegen hatten die dreibändigen *Principia Mathematica* von Alfred North Whitehead (1861 – 1947) und Bertrand, Earl Russell (1872 – 1970) die 1910–1913 erschienen. David Hilbert (1862 – 1943), der wahrscheinlich größte und vielseitigste Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts, entwarf ein Programm der *formalistischen* Begründung der Mathematik. In seiner Vorstellung mußte es möglich sein, die Mathematik so weit zu formalisieren, daß sie – wie wir heute sagen würden – auf einem Computer automatisch ausführbar wird. Hilbert war der entschiedenste Vertreter der Ansicht, daß in der Mathematik letztlich *alles* streng bewiesen werden könne. Von ihm stammt das Zitat [25, S. 963]:

Statt des törichtten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Losung:

Wir müssen wissen,
wir werden wissen.

Dieses Zitat wurde auch auf Hilberts Grabstein gesetzt. Es ist im Jahre 1930 publiziert worden. Die Ironie der Geschichte wollte es, daß ein Jahr später eine Arbeit von Kurt Gödel erschien [19], die allen diesen Bestrebungen endgültig ein Ende bereitete. In dieser Arbeit bewies Gödel, daß derartige Vorhaben grundsätzlich zum Scheitern verurteilt sind, und das in einem derart totalen Sinne, daß diese Nachricht die gesamte Grundlagenforschung der Mathematik nachhaltig erschütterte.

Die verschiedenen Versuche der exakten und zweifelsfreien Begründung der Mathematik erinnern sehr stark an das Bestreben von Leibniz, die Sprache zu formalisieren. Gödel hat Leibniz in seinen Arbeiten häufig zitiert, so daß man davon ausgehen darf, daß er die diesbezüglichen Ideen Leibniz' gekannt hat. Wir werden noch sehen, daß diese Ähnlichkeit der Vorgehensweise tiefer geht, als der erste Blick vermuten läßt.

4.2 Die Arbeit von Gödel

Wir wollen hier einen kurzen Blick auf die Arbeit von Gödel werfen. Es ist nicht möglich, auf Einzelheiten einzugehen, die Arbeit umfaßt 26 Seiten, und sie ist in ihren wesentlichen Teilen äußerst nichtredundant geschrieben, das heißt, ohne überflüssige Worte oder Zusatzerklärungen. In dem – für Mathematiker – populärwissenschaftlichen Buch von Nagel und Newman [40] über Gödels Arbeit steht als erster Satz des Abschnitts VII. *Der Gödelsche Beweis* recht lapidar:

Gödels Arbeit ist schwierig.

Ich gebe hier eine sehr stark – vielleicht sogar unzulässig – verkürzte Darstellung des Gödelschen Gedankenganges, wohl wissend, daß ich dabei das Beste dieser „grandiosen intellektuellen Sinfonie“ [40, S. 93] unterdrücken muß.

Die erste Idee Gödels sieht recht harmlos aus. Er formuliert einen Satz der „natürlichen“ Sprache:

Dieser Satz ist nicht beweisbar.

Diese Aussage ist offenbar selbstbezüglich. Gödel nennt in seiner Arbeit andere, ähnliche Antinomien und weist darauf hin, daß sich „überhaupt jede epistemologische Antinomie zu einem derartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden [läßt].“

Es ist klar, daß der Gödelsche Satz zu Schwierigkeiten führen muß. Wäre er in irgendeinem Sinne – das heißt, in einem logischen Schlußsystem – beweisbar, dann wäre er innerhalb dieses Systems wahr, da er aber aussagt, daß er eben nicht beweisbar ist, würde dies zu einem Widerspruch führen, und wir wissen, daß ein logisches System, welches auch nur einen Widerspruch enthält, unbrauchbar ist, weil sich in ihm jede Aussage beweisen läßt.

Der selbstbezügliche Satz von Gödel ist in der „natürlichen“ Sprache formuliert. In der Mathematik spricht man von der *Metasprache*, das ist eine reduzierte und formalisierte Teilsprache der Umgangssprache, die geeignet ist, „über“ Mathematik zu sprechen. Diese Sprache benutzen wir in Vorlesungen, sie dient zur Bequemlichkeit und Praktikabilität der Kommunikation über Mathematik, und sie ist – wenigstens im Prinzip – so weit normiert und formalisiert, daß sie nötigenfalls und bei richtigem Gebrauch in exakte Formeln und deren korrekte Handhabung übersetzt werden kann. Dies gilt jedoch nicht für unseren selbstbezüglichen Satz. Die Formalisierung der Mathematik, die im wesentlichen auf der Logik basiert, läßt keine Selbstbezüglichkeit zu, eine solche würde zu einem *Teufelskreis* (nach Bertrand Russell, vgl. [53, Abschnitt 5.3]) führen. Die erste Konstruktion von Gödel bestand dahin, seinen Satz in die Sprache der formalen Logik zu übersetzen. Dazu muß seine Selbstbezüglichkeit eliminiert werden. Dies geschieht auf relativ komplizierte Weise, und für Einzelheiten sei auf das 7. Kapitel des Buches von Nagel und Newman [40] verwiesen. Man gelangt schließlich zu einer logischen Formel, die auf der Ebene der mathematischen Logik die Aussage des Satzes formuliert.

Es kommt nun noch ein zweiter „Trick“ von Gödel hinzu. Gödel hat ein System entworfen, das an Leibniz’ *ars inveniendi* erinnert (siehe Abschnitt 2.2). Er ordnete jeder logischen Formel eine Zahl zu, so daß

- Zu jedem logischen Ausdruck eine wohlbestimmte Zahl gehört,
- Aus der Zahl sich der logische Ausdruck wieder rekonstruieren läßt,
- Jeder logischen Operation eine arithmetische Operation entspricht (im wesentlichen eine Multiplikation oder Division).

In Tabelle 2 sind die drei Argumentationsebenen des Gödelschen Beweises schematisch dargestellt. Die beiden unteren Ebenen, die der Arithmetik und die der Logik, entsprechen einander umkehrbar, das heißt, zu jeder logischen Formel gehört eine wohlbestimmte Zahl und für jede Zahl kann man entscheiden, ob sie Gödel-Zahl einer logischen Formel ist. In diesem Falle gehört zu ihr eine wohlbestimmte logische Formel. Dabei muß nicht jeder Zahl eine sinnvolle logische Formel entsprechen und nicht jede logische Formel muß sinnvoll sein. Die Beziehung von Metamathematik zur Logik und Mathematik ist komplizierter, wie wir gesehen haben. Jede mathematisch-logische Aussage läßt sich metamathematisch eindeutig formulieren – genau das tun wir ja in unseren Vorlesungen –, aber nicht jeder metamathematischen Aussage entspricht eine (korrekt konstruierte) Formel der Logik. Dies ist der Grund dafür, daß bei der Formulierung des selbstbezüglichen Gödelschen Satzes relativ schwierige begriffliche Probleme auftreten. Ist eine metamathematische Aussage aber wahr und entspricht ihr eine logische Formel, dann muß diese auch wahr sein.

Metamathematik	Dieser Satz ist nicht beweisbar.
↑ ↓	
Logik – Mathematik	$(x) \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$
↕	
Arithmetik	N

Tabelle 2: Schematische Darstellung der Argumentationsebenen in Gödels Beweis.

Die Formel in der zweiten Zeile der zweiten Spalte der Tabelle stammt aus dem Buche von Nagel und Newman [40, Formel (G), S. 88] und hat hier nur die Bedeutung eines „Platzhalters“. N ist die Gödel-Zahl der Formel.

Als nächstes zeigte Gödel, daß sich die seinem Satz entsprechende Formel genau dann beweisen läßt, wenn sich ihre Negation beweisen läßt. Dies können wir anhand des metamathematischen Satzes nachvollziehen, und wir haben dies oben getan: Wenn es einen Beweis des Satzes gäbe, dann wäre seine „Bedeutung“ wahr, und diese ist ja gerade, daß der Satz *nicht* beweisbar ist. Könnte man umgekehrt die Negation des Gödelschen Satzes beweisen, also die Tatsache, daß er beweisbar ist, dann kämen wir wieder zum gleichen Widerspruch.

Nun ist aber der Satz von Gödel ohne jeden Zweifel wahr. Wäre er nämlich nicht wahr, dann wäre seine Aussage falsch, aber wie wir gesehen haben, kann dies nicht sein.

Wir haben damit (freilich in einer sehr groben Skizze) gezeigt, daß es (mindestens) eine Aussage gibt, die wahr ist, aber nicht formal beweisbar. Wegen der Gödelschen Konstruktion kann diese Aussage als eine Aussage über die Arithmetik interpretiert werden. Man sagt auch, die Arithmetik sei *unvollständig*. Dieses Ergebnis von Gödel hat sehr weitreichende Folgen. Eine davon ist bereits bei Gödel zu finden. Wir haben gesehen, daß die Widerspruchsfreiheit eines logischen Systems eine unverzichtbare Forderung ist. Nun hat Gödel in seiner Arbeit auch gezeigt, daß man einen formalen Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nicht erbringen kann. Sein Resultat läßt sich so formulieren: Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann kann ihre Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden.

Der französische Mathematiker André Weil (1906 – 1998) hat diese wahrhaft groteske und in einem gewissen Sinne verzeifelte Situation in einem Ausspruch charakterisiert, der scherzhaft als *Principle of Existence of Heaven and Hell* bekannt wurde: „Gott existiert, weil die Mathematik konsistent ist; der Teufel existiert, weil wir es nicht beweisen können.“ Ähnlich äußerte sich Bertrand Russell (1872 – 1970), allerdings lange vor Gödel, in seiner Schrift *Mysticism and Logic*, welche 1917 erschienen war [49, S. 75]: „Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.“

Roger Penrose hat aus dem Gödelschen Beweis eine interessante Schlußfolgerung herleiten können [41]. Der bedeutende englische Mathematiker Alan Turing (1912 – 1954) hatte im Jahre 1937 einen wichtigen Artikel veröffentlicht [56]. Darin ging es um die Fähigkeiten von allgemeinen Computern. Turing stellte eine „Papier-und-Bleistift“-Maschine vor, die äußerst einfach ist, so daß man über sie allgemeine Aussagen machen kann, die andererseits so allgemein ist, daß man mit ihr jeden beliebigen Computer simulieren kann. Turing bewies ein ähnliches Resultat wie Gödel, etwas plakativ gesagt, daß es mathematische Aufgabenstellungen gibt, die ein Computer nicht lösen kann. Durch eine geeignete Modifikation des Gödelschen und Turingschen Beweisverfahrens konnte Penrose zeigen, daß es Probleme gibt, die ein Mensch (auf der metamathematischen Ebene) als wahr erkennen kann, die aber ein Computer nicht entscheiden kann. Penrose zieht daraus sehr interessante Schlüsse über das Problem des menschlichen Bewußtseins. Anscheinend sind wir eben doch keine Maschinen!

Anhang: Einige Beispiele logischer Probleme

A Eine Logikaufgabe von Lewis Carroll

In seinem Buch über Logik bringt Lewis Carroll zahlreiche interessante und sehr schöne Logik-Aufgaben – wie übrigens auch in seinen Alice-Büchern. Wir betrachten hier nur ein Beispiel [8, S. 175], welches auch von Quine zitiert wird [47, S. 117 f.]:

Gegeben seien die folgenden Prämissen:

1. Die einzigen Tiere in diesem Hause sind Katzen;
2. Jedes Tier ist als Haustier geeignet, das es liebt, den Mond anzustarren;
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, meide ich es;
4. Kein Tier ist ein Fleischfresser, das nicht nachts umherstreicht;³⁾
5. Es gibt keine Katze, die nicht Mäuse fängt;
6. Kein Tier, das nicht in diesem Hause ist, findet jemals Gefallen an mir;
7. Kängurus sind als Haustiere ungeeignet;
8. Nur Fleischfresser töten Mäuse;
9. Ich verabscheue Tiere, die keinen Gefallen an mir finden;
10. Tiere, die nachts umherstreichen, lieben es immer, den Mond anzustarren;

Konsequenz: »Ich meide ein Känguruh immer.«

Nach Quine kann man wie folgt vorgehen:

Dieser Schluß kann folgendermaßen zerlegt werden: Aus (1) und (5) erhalten wir als *Lemma* oder Zwischenschluß:

11. Alle Tiere in diesem Hause töten Mäuse;

Aus (8) und (11) erhalten wir

12. Alle Tiere in diesem Hause sind Fleischfresser.

Aus (4) und (12):

13. Alle Tiere in diesem Haus streichen nachts umher.

Aus (6) und (13):

14. Alle Tiere, die Gefallen an mir finden, streichen nachts umher.

...

Den Rest überläßt Quine dem Leser. Wir wollen versuchen, auch die restlichen Schlüsse zu erledigen. Aus (14) und (10) ergibt sich

15. Alle Tiere, die Gefallen an mir finden, lieben es immer, den Mond anzustarren;

(15) und (2):

16. Alle Tiere, die Gefallen an mir finden, sind als Haustiere geeignet;

(16) und (7):

17. Alle Tiere, die Gefallen an mir finden, sind keine Kängurus;

Die Negation von (17) ist

17'. Kein Känguru findet Gefallen an mir;

(17') und (9):

18. Ich verabscheue alle Kängurus;

Schließlich, mit (18) und (3):

19. Ich vermeide alle Kängurus.

³⁾Der englische Text lautet *No animals are carnivorous, unless they prowl at night*. Die hier benutzte Übersetzung könnte zu Mißverständnissen führen.

B Eine Logelei von Zweistein

Unter dem Pseudonym *Zweistein* veröffentlichte der unlängst verstorbene[43] Thomas von Randow (1921 – 2009) in der Wochenzeitung *DIE ZEIT* kleine Logik- und Mathematikaufgaben [59, 60]. Hier eine typische Logikaufgabe, die sehr schön zeigt, daß die Bedeutung der Objekte, die man in der Logik behandelt, irrelevant ist. Zweistein benutzte gern bedeutungslose Phantasienamen, so daß die Aufgabenstellung auf die reine Form reduziert wurde. [60, S. 74]:

1. Wer gedrückt ist, makst nicht.
2. Wer knaselt, hat eine Mause.
3. Jeder, der nicht deuken kann, makst.
4. Alle Drumser nehmen Pfuff.
5. Wer kein Pli ist, matupelt nicht.
6. Kein betuxter Klep kann deuken.
7. Wer Pfuff nimmt, ist gedrückt.
8. Nur betuxte Kleps knaseln nicht.
9. Jeder Pli ist ein Drumser.

Aus diesen Aussagen läßt sich ein Zusammenhang zwischen »matupeln« und »eine Mause haben« ableiten. Wie lautet diese Aussage?

Lösung Einige der Aussagen sind in der Form $\neg A \rightarrow \neg B$ geschrieben (5, 6). Es empfiehlt sich, diese „richtigzustellen“ in die Form $B \rightarrow A$, also zum Beispiel

$\neg 5$. Wer matupelt, ist ein Pli.

Also: $\neg 5$: Wer matupelt, ist ein Pli.

Aussagen 9 und 4 liefern: Ein Pli nimmt Pfuff.

7 und 1: Wer Pfuff nimmt, makst nicht.

3: Wer nicht makst, kann deuken.

6: Wer deuken kann, ist kein betuxter Klep.

8: Wer kein betuxter Klep ist, knaselt.

2: Wer knaselt, hat eine Mause.

Schlußfolgerung: Wer matupelt, der hat eine Mause.

C Das Paradoxon des Sancho Pansa

In dem bekannten Buch *Don Quixote* [9] wird ein klassisches Paradoxon durch Sancho Pansa einer überraschenden Lösung zugeführt:

Zehntes Buch, Achtzehntes Kapitel Fortgesetzte Regierung des Sancho Pansa und andre angenehme Begebenheiten.

... Wenn jemand über diese Brücke von einem Ende zum andern geht, so soll er vorher schwören, wohin er geht und was sein Geschäft. Ist sein Schwur wahr, so lasse man ihn ziehn, sagt er eine Lüge, so soll er an den Galgen gehängt werden, der dort steht, ohne alle Barmherzigkeit. Dieses Gesetz und sein strenger Inhalt waren bekannt, viele gingen über die Brücke, man sah, daß das, was sie beschworen hatten, die Wahrheit sei, und die Richter ließen sie ungehindert ziehn. Es geschah darauf, daß man einem Manne den Eid abnahm, welcher schwur und sagte, daß bei dem Schwure, welchen er

eben getan hätte, er hinginge, um an dem dort befindlichen Galgen zu sterben und zu keiner andern Absicht. Die Richter kamen über diesen Schwur in Verlegenheit und sagten: »Lassen wir diesen Mann frei ziehn, so ist sein Schwur ein Meineid und er muß nach den Gesetzen sterben, hängen wir ihn aber, so hat er geschworen, daß er hinginge, um an dem Galgen zu sterben, und da er die Wahrheit geschworen hat, so muß er nach eben diesen Gesetzen frei sein.«

...

»Nun, so hört denn, mein guter Freund«, sagte Sancho, »dieser Reisende, von dem Ihr sprecht, entweder bin ich ein Dummkopf, oder er hat ebensoviel Recht zu sterben als zu leben und über die Brücke zu gehn, denn wenn die Wahrheit ihn freispricht, so verdammt ihn ebensogut die Lüge, da die Sache nun so steht, so ist meine Meinung, diesen Herrn zu sagen, die Euch hergeschickt haben, daß, da die Gründe, ihn zu verdammen oder freizusprechen, sich einander die Waage halten, sie ihn freilassen sollen, denn es ist immer löblicher, Gutes zu tun als Böses, und diesen Satz wollte ich mit meinem Namen unterschreiben, wenn ich schreiben könnte.«

D Der Weihnachtsmann

Weihnachten 2004 erschien im *Hamburger Abendblatt* ein Artikel von mir⁴⁾, in dem ich auf Grund quantenmechanischer Argumente und unter Zuhilfenahme der Vielweltentheorie nachwies, daß primitive Berechnungen, die die Existenz des Weihnachtsmannes aus Gründen der klassischen Physik in Frage stellen, keine solide Grundlage besitzen. Ein Artikel, der die Existenz des Weihnachtsmannes mit **logischen** Schlüssen nachweisen sollte, wurde nicht publiziert, wahrscheinlich wagte man nicht, ein derart brisantes Thema anzufassen.

Ich füge hier den nicht veröffentlichten Beitrag an. Dabei möchte ich darauf hinweisen, daß alle Argumente tief seriös sind. Eine sehr lesbare Darstellung findet man bei Pickover [42, S. 367 ff.].

Der Weihnachtsmann – logisch gesehen

Jedes Jahr stellt sich um diese Jahreszeit immer die gleiche Frage: Gibt es ihn oder gibt es ihn nicht? Gemeint ist natürlich der Weihnachtsmann. War diese Frage über einen beträchtlichen Zeitraum negativ beantwortet worden, vor allem unter Hinweis auf die bekannten Gesetze der Physik, so ist in der jüngsten Zeit hier ein Wandel eingetreten. Neuere Ergebnisse der Quantenmechanik und der Vielweltentheorie (Multiversentheorie) haben hier neue Gesichtspunkte eingebracht und das letzte Wort der Physik zu diesem Thema ist, daß die moderne Physik die Existenz des Weihnachtsmannes nicht nur nicht ausschließt, sondern sogar recht wahrscheinlich macht. Neueste Resultate der Stringtheorie haben diese Wahrscheinlichkeit eher noch erhöht, in einem zehn- bis elfdimensionalen Raum, auch wenn einige dieser Dimensionen aufgerollt sind, hat der Weihnachtsmann sehr viel mehr Manövrierfreiheit als in dem hausbackenen dreidimensionalen Universum der klassischen Physik.

Demnach scheint die Existenz des Weihnachtsmannes heute so gut wie sicher zu sein. Trotzdem sind immer noch Zweifel erlaubt. Nun kommt letzte Gewißheit von einer Entwicklung, die das Interesse der Öffentlichkeit weit weniger findet als die Quantenmechanik oder die Stringtheorie.

⁴⁾<http://www.abendblatt.de/ratgeber/wissen/forschung/article296897/Der-Weihnachtsmann-lebt.html>

Es handelt sich um Entwicklungen auf dem Gebiete der formalen Logik. Für die meisten Zeitgenossen ist dies nicht eben das Lieblingsgebiet, es kommt sogar immer wieder vor, daß Personen auf das Wort „Logik“ mit dem magischen Abwehrzeichen gegen den „bösen Blick“ reagieren. Dies ist dem Autor sehr wohl bewußt und er bemüht sich daher, die folgenden Ausführungen so elementar wie nur möglich zu halten.

Die Logik, im klassischen Griechenland von Zenon von Elea (um 490 v. Chr. – 430 v. Chr.) „erfunden“ und von Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) in ein System gebracht, erfreute sich nicht immer der Wertschätzung der Gelehrten oder gar der Öffentlichkeit. Es gab bis in das neunzehnte Jahrhundert hinein Zeichen scharfer Ablehnung. Der bedeutende Historiker Carl Prantl schrieb um 1860 das vierbändige Standardwerk *Geschichte der Logik im Abendlande*. In diesem Werk charakterisiert er die heute wieder hochgeschätzten Forschungsergebnisse von Chrysippos von Soloi (ca. 281 v. Chr. – ca. 208 v. Chr.) mit den Worten „...seine Tätigkeit besteht darin, daß er in der Behandlungsweise des Materials zu einem bemitleidenswerten Grade von Plattheit, Trivialität und schulmäßiger Absachtelung heruntersank.“ Worum handelt es sich bei diesen so geschmähten Erkenntnissen?

Die Logik ist ein Navigationsinstrument, welches es uns erlaubt, aus Aussagen, die wahr sind (oder für wahr gehalten werden) wieder Aussagen herzuleiten, die den gleichen Grad von Wahrheit haben. Im zwanzigsten Jahrhundert erkannte man, daß dieses Werkzeug nicht nur für die Mathematik sondern mehr noch für die neu entstandene Computerwissenschaft unentbehrlich ist. Ein Computer „denkt“ auf der Basis der formalen Logik, ganz anders als ein Mensch. Die Systeme der „künstlichen Intelligenz“ und die „Expertensysteme“, die in verschiedenen Anwendungen eine wichtige Rolle spielen, basieren auf der Fähigkeit des Computers, streng logisch denken zu können – oder zu müssen. Logisches Denken ist für einen Menschen nicht natürlich, es gerät leicht in die Nähe pathologischen Denkens, und dies mag auch der Grund dafür sein, daß es unter Mathematikern eine erhebliche Anzahl von recht merkwürdigen Gestalten gibt. Der Mathematiker John Forbes Nash – um nur ein Beispiel zu nennen – (* 1928) verbrachte sogar einige Jahre in einer geschlossenen Anstalt, ehe er im Jahre 1994 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt. Einige Leserinnen und Leser haben vielleicht den Film *A Beautiful Mind* gesehen, der nach einem Buch von Sylvia Nasar über John Nash gedreht wurde.

Übrigens: Bereits der bedeutende Hamburger Gelehrte Johann Georg Büsch (1728 – 1800) – vor dem Hauptgebäude der Universität steht ein Denkmal von ihm – warnte in seiner 1795 erschienenen *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* vor leichtfertigem Umgang mit der Mathematik:

Der Verstand leidet dabei auf eine gewaltsame Art, und auf diese Weise ist das Studium der Mathematik manchem gefährlich, und die Ursache einer unheilbaren Wahnsinnigkeit⁵⁾ geworden.

Sensible Leserinnen und Leser sollten den folgenden Text daher mit besonderer Vorsicht lesen.

Was hat nun Logik mit dem Weihnachtsmann zu tun? Eines der wichtigsten Resultate von Chrysippos war die Entdeckung der Eigenschaften der *logischen Implikation*. Hierbei handelt es sich um wenn-dann-Aussagen etwa von der Art des Orakelspruchs, der Krösus zum Verhängnis wurde: „Wenn du den Halys überschreitest, wirst du ein großes Reich zerstören.“ Hier haben wir zwei Aussagen, nämlich den sogenannten Vordersatz (Antezedens) „Krösus überschreitet den Halys“ und den Nachsatz (Sukzedens) „Krösus zerstört ein großes Reich“. Jede dieser beiden Aussagen

⁵⁾vgl. Apg 26,24: *Paulus, du bist von Sinnen! Das große Wissen macht dich wahnsinnig.*

kann wahr oder falsch sein. Zudem kann auch der Orakelspruch, der aus diesen zwei Teilen besteht, wahr oder falsch sein, das heißt, das Orakel könnte die Wahrheit gesagt oder aber aus irgendeinem Grunde gelogen haben. Wenn die gesamte Wenn-dann-Aussage wahr ist, dann erwarten wir, daß für einen wahren Vordersatz der Nachsatz ebenfalls wahr ist, oder, in unserem Beispiel, wenn Krösus sich entschließt, den Halys zu überschreiten, dann muß auch irgendein großes Reich zerstört werden. Wäre dies nicht der Fall, dann würden wir den Orakelspruch als falsch bezeichnen, und unser Vertrauen in Orakel wäre dann doch sehr erschüttert.

Interessant wird es nun, wenn der Vordersatz falsch ist. Soll dann die Gesamtaussage wahr oder falsch sein? Wenn zum Beispiel Krösus sich entschlossen hätte, den Halys nicht zu überschreiten, wäre dadurch der Orakelspruch falsch geworden? Offenbar nicht! Wenn ich einem als unzuverlässig bekannten Menschen sage: „Wenn du pünktlich zum Termin kommst, dann fresse ich einen Besen“, dann möchte ich, daß diese Aussage durchaus als wahre Aussage verstanden wird. Da ich jedoch keinerlei Neigung verspüre, einen Besen wirklich zu verzehren (wie richtet man einen Besen schmackhaft an?), möchte ich durch diese Wendung ausdrücken, daß ich den Vordersatz für falsch halte. Seit Chrysippos wird eine Implikation, deren Vordersatz falsch ist, als wahr bezeichnet. Auf diese Weise haben wir die Möglichkeit, hypothetische Urteile auszusprechen. Der Verteidiger in einem Prozeß könnte etwa sagen: „Wenn mein Mandant wirklich diese schreckliche Tat begangen hätte, dann hätte er sich zur Tatzeit in der Nähe des Tatortes befinden müssen.“ Der Anwalt wird darauf bestehen, daß diese seine Aussage als wahr aufgefaßt wird, obwohl er davon ausgeht, daß sein Mandant reinen Gewissens und völlig unschuldig ist. Er wird aus dieser falschen Annahme durch logisch zulässige Schlüsse eine absurde Folgerung herleiten, etwa daß der Angeklagte, um die Tat begehen zu können, sich gleichzeitig an zwei voneinander entfernten Orten hätte befinden müssen, und das wird das hohe Gericht ja wohl nicht glauben wollen!

Nun zum Weihnachtsmann! Die Logiker Haskell Curry (1900 – 1982) und Martin Hugo Löb (1921 – 2006) bewiesen 1942 [10] beziehungsweise 1955 [36] etwas, was in die Literatur als das *Paradoxon von Curry* oder, in einer mehr populärwissenschaftlichen Bezeichnung, als das *Weihnachtsmann-Paradoxon* eingegangen ist. Dieses Paradoxon soll hier in verständlicher Weise dargestellt werden, so daß die Leserinnen und Leser dieses Aufsatzes sich unschwer selbst davon überzeugen können, daß es **ihn** doch gibt. Wir untersuchen einen einfachen Satz, den wir (S) nennen wollen:

(S) Wenn dieser Satz wahr ist, dann gibt es den Weihnachtsmann.

Dieser Satz gehört zu den selbstbezüglichen Sätzen, also zu den Sätzen, die etwas über sich selbst aussagen. Wer das Buch *Gödel, Escher, Bach* von Douglas Hofstadter kennt, der weiß, daß es jetzt gefährlich wird! Ganz Belesene werden sich daran erinnern, daß Kurt Gödel (1906 – 1978) im Jahre 1931 die Grundfesten der Mathematik erschütterte. Er ging dabei von einem ganz ähnlichen selbstbezüglichen Satz aus. Einige Leserinnen und Leser werden vielleicht wissen, daß Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) in seinem *Tractatus logico-philosophicus* (1921) forderte „Kein Satz kann etwas über sich selbst aussagen“ [58, 3.332], und damit scheinbar das Problem der selbstbezüglichen Sätze mit einem Machtwort aus der Welt schaffte. Aber leider: Dieser Satz von Wittgenstein stellt eine Forderung an die Sätze der Logik dar, und da er selbst ein Satz der Logik ist, fordert er eben auch etwas von sich selbst und ist damit selbstbezüglich! Es ist eben schon vertrackt mit der Logik und kein Wunder, daß man dabei Schaden nehmen kann. Man kann sagen, daß die Selbstbezüglichkeit listiger als der große Philosoph und scharfsinnige Denker Wittgenstein ist. Sie hat sein Machtwort unterlaufen!

Wir wenden das soeben über formale Logik Gelernte auf den Satz (S) an. Er hat die Form einer wenn-dann-Aussage mit dem Vordersatz „Der Satz (S) ist wahr“ und dem Nachsatz „Der Weihnachtsmann existiert“. Wenn der Vordersatz wahr wäre, das heißt also, der Satz (S) wäre

dann wahr, dann muß, wie wir gesehen haben, auch der Nachsatz wahr sein, also existiert dann der Weihnachtsmann. Dies ist genau die Aussage des Satzes, dazu benötigen wir eigentlich gar keine hohe Logik.

Nun wird es schwieriger: Was ist, wenn der Satz (S) nicht wahr, sondern falsch wäre? Wir haben uns davon überzeugt, daß ein wenn-dann-Satz immer dann wahr sein muß, wenn der Vordersatz falsch ist. Das würde aber hier bedeuten: Wenn (S) als Vordersatz falsch ist, dann muß der Satz (S) als Gesamtaussage wahr sein! Nun haben wir eine Situation, die in der Logik nicht geduldet werden kann, nämlich einen Widerspruch. Wird (S) als falsch angenommen, dann muß (S) wahr sein, und beides kann und darf nicht sein. Schon Aristoteles hat solche Widersprüche verboten und Crysippos hat gezeigt, daß man aus einem einzigen Widerspruch in einem logischen System jede beliebige Aussage als wahr herleiten kann, mit anderen Worten, ein solches System ist völlig wertlos. Haben Sie sich eigentlich schon einmal drüber gewundert, wie leicht manchmal Politiker Dinge argumentativ belegen können, die man selbst beim besten Willen nicht für wahr halten kann? In der Datenbank im Inneren des Politikers befindet sich – wie übrigens bei jedem Menschen – irgendwo verborgen ein versteckter Widerspruch, und dieser erlaubt es, alles zu beweisen. So einfach ist das!

Nun aber wieder zurück zum Weihnachtsmann! Wir haben gerade gesehen, daß die Annahme, daß der Satz (S) falsch sei, auf einen logischen Widerspruch führt, und das ist das Schlimmste, was einem Logiker widerfahren kann. Also bleibt uns nichts anderes übrig, als anzunehmen, daß der Satz (S) wahr ist. Und damit existiert der Weihnachtsmann!

Jason Grossman von der University of Sydney ist es unlängst gelungen, die sensationelle Tatsache zu enthüllen, daß unser Universum von Pinguinen beherrscht wird! Für den Beweis benutzte er Methoden, die durch das logische Paradoxon von Curry inspiriert wurden. Denjenigen Leserinnen und Lesern, die bis jetzt keine Probleme beim Studium dieses Artikels gehabt haben, die also die von Büsch genannten gefährlichen Symptome noch nicht an sich bemerkt haben, sei anempfohlen, nun als kleine Übung zu beweisen, daß Einhörner existieren. Wenn Sie das geschafft haben, dann sind Sie sicher auch in der Lage, das Buch *Die Mathematik und das Göttliche* von Clifford A. Pickover mit Genuß und Gewinn zu lesen, in dem diese Dinge in großer Breite und Tiefe dargestellt werden.

Die anderen Leserinnen und Leser mögen sich mit dem beruhigenden Gefühl trösten, daß nun auch aus der Logik mit unerbittlicher Strenge folgt, daß der Weihnachtsmann existiert. Es gibt einen Weihnachtsmann, ist doch logisch!

Frohe Weihnachten!

Literatur

- [1] William Warren Bartley III. Lewis Carroll's lost book on logic. *Scientific American*, 227(1):39–46, July 1972.
- [2] Karol Berka and Lothar Kreiser. *Logik-Texte. Kommentierte Ausgabe zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag, 1971.
- [3] Innocent Marie Joseph Bocheński. *Formale Logik*. Orbis academicus. Problemgeschichten der Wissenschaft in Dokumenten und Darstellungen Band III, Protestantische Theologie, 2. Verlag Karl Alber, Freiburg/München, 2., erweiterte Auflage, 1962.
- [4] J. M. Bochenski. *A History of Formal Logic*. Chelsea Publ., New York, 2. edition, 1970.
- [5] George Boole. *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Dover Publications, Inc., New York, 1958.
- [6] Wilhelm Capelle, Hrsg. *Die Vorsokratiker. Die Fragmente und Quellenberichte übersetzt und eingeleitet von Wilhelm Capelle*. Kröners Taschenausgabe, Band 119. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1968.
- [7] Rudolf Carnap. *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften*. Ullstein Materialien, Ullstein Buch Nr. 35243. Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt/Main, Berlin, 1986.
- [8] Lewis Carroll. *Lewis Carroll's Symbolic Logic. Part I. Elementary, 1896, Sixth Edition, Part II. Advanced, Second Edition. Together with Letters from Lewis Carroll to eminent nineteenth-century Logicians and to his "logical sister," and eight versions of the Barber-Shop Paradox. Edited, with annotations and an introduction by William Warren Bartley III. New and updated edition with manuscript discoveries and new solutions to problems*. Clarkson N. Potter, Inc., Publishers, New York, 1977.
- [9] Miguel de Cervantes Saavedra. *Leben und Taten des schrfsinnigen Edlen Don Quixote von la Mancha. Mit Zeichnungen von Gerhart Kraaz, In der Übertragung von Ludwig Tieck, Geleitwort von Heinrich Heine*. P. P. Kelen Verlagsgesellschaft, Gütersloh, 1961.
- [10] Haskell B. Curry. The inconsistency of certain formal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 7(3):115–117, 1942.
- [11] Michael A. B. Deakin and Hans Lausch. The Bible and Pi. *The Mathematical Gazette*, 82(494):162–166, July 1998.
- [12] Alwin Diemer and Ivo Frenzel, Hrsg. *Das Fischer Lexikon Philosophie. Mit einer Einleitung von Professor Dr. Helmuth Plessner herausgegeben von Dr. Dr. Alwin Diemer und Ivo Frenzel*. Fischer Bücherei KG, Frankfurt am Main, 1958.
- [13] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum, and Wolfgang Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich, 3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, 1992.
- [14] Umberto Eco. *Die Suche nach der vollkommenen Sprache. Aus dem Italienischen von Burkhard Kroeber*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1997.
- [15] Euklid. *Die Elemente. Buch I–XIII. Herausgegeben und ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 3., unveränderte Auflage, 1969.

- [16] Reinhard Finster and Gerd van den Heuvel. *Gottfried Wilhelm Leibniz in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten*. rowohlt's monographien 50481. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 5. Auflage Januar 2005.
- [17] Walter R. Fuchs. *Formel und Fantasie. Eine Weltgeschichte der Mathematik*. dva Öffentliche Wissenschaft. Deutsche Verlags-Anstalt GmbH, Stuttgart, 1976.
- [18] Christian Gerthsen, H. O. Kneser, and Helmut Vogel. *Physik, ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Dreizehnte Auflage, neubearbeitet und erweitert von H. Vogel, 1977.
- [19] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.
- [20] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Wissenschaft der Logik. Erster Band. Die Objektive Logik (1812/13), Erstes Buch: Das Seyn*. Herausgegeben von F. Hogemann/W. Jaeschke. In [24] 11. Hamburg, 1978.
- [21] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Wissenschaft der Logik. Erster Band. Die Objektive Logik (1812/13), Zweytes Buch: Die Lehre vom Wesen*. Herausgegeben von F. Hogemann/W. Jaeschke. In [24] 11. Hamburg, 1978.
- [22] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Wissenschaft der Logik. Zweiter Band. Die Subjektive Logik (1816)*. Herausgegeben von F. Hogemann/W. Jaeschke. In [24] 12. Hamburg, 1981.
- [23] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Wissenschaft der Logik. Erster Teil: Die Objektive Logik. Erster Band: Die Lehre vom Sein (1832)*. Herausgegeben von F. Hogemann/W. Jaeschke. In [24] 21. Hamburg, 1985.
- [24] Georg Wilhelm Friedrich Hegel. *Gesammelte Werke. In Verbindung mit der Deutschen Forschungsgemeinschaft herausgegeben von der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften*. Hamburg, 1986 ff.
- [25] David Hilbert. Naturerkennen und Logik. *Die Naturwissenschaften*, 18(47–49):959–963, 28. November 1930.
- [26] David Hilbert and Wilhelm Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 27. Springer-Verlag, Berlin, 1928.
- [27] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band. Aus dem Amerikanischen von Philipp Wolff-Windegg und Hermann Feuersee unter Mitwirkung von Werner Alexi, Ronald Jonkers und Günter Jung*. Verlag Klett-Cotta, Stuttgart, 1985.
- [28] Achim Ilchmann. Kritik der Übergänge zu den ersten Kategorien in Hegels Wissenschaft der Logik. *Hegel-Studien*, 27:11–25, 1992.
- [29] Immanuel Kant. *Werke in zwölf Bänden. Theorie-Werkausgabe, herausgegeben von Wilhelm Weischedel*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1968.
- [30] D. H. Kaye. Proof in law and science. *Jurimetrics Journal*, 32(3):313–322, Spring 1992.
- [31] Anton Friedrich Koch and Friedrike Schick, Hrsg. *G. W. F. Hegel. Wissenschaft der Logik. Klassiker Auslegen, Band 27*. Akademie Verlag GmbH, Berlin, 2002.

- [32] N. I. Kondakow. *Wörterbuch der Logik. Herausgeber der deutschen Ausgabe Erhard Albrecht, Günter Asser.* Bibliographisches Institut, Leipzig, 2., neubearbeitete Auflage, 1983.
- [33] Gottfried Wilhelm Leibniz. *Die Grundlagen des logischen Kalküls. Herausgegeben, übersetzt und mit einem Kommentar versehen von Franz Schupp unter Mitarbeit von Stephanie Weber. Lateinisch – Deutsch.* Philosophische Bibliothek, Bd. 525. Felix Meiner Verlag, Hamburg, 2000.
- [34] Thomas Leinkauf, Hrsg. *Leibniz. Ausgewählt und vorgestellt von Thomas Leinkauf.* Philosophie jetzt! 30691. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München, Mai 2000.
- [35] W. I. Lenin. *Materialismus und Empiriokritizismus. Kritische Bemerkungen über eine reaktionäre Philosophie.* Verlag für fremdsprachige Literatur, Moskau, 1947.
Материализм и эмпириокритицизм. Критические заметки об одной реакционной философии. Москва, Звено, 1909.
- [36] Martin Hugo Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *Journal of Symbolic Logic*, 20(2):115–118, June 1955.
- [37] Paul Lorenzen and Kuno Lorenz. *Dialogische Logik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.
- [38] Jan Łukasiewicz. Zur Geschichte der Aussagenlogik. *Erkenntnis*, 5:111–131, 1935.
- [39] Herbert Meschkowski. *Wandlungen mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik.* R. Piper, München, Zürich, 5. Auflage, 1985.
- [40] Ernest Nagel and James E. Newman. *Der Gödelsche Beweis. Deutsche Übersetzung Hubert Schleichert.* Scientia Nova. R. Oldenbourg Verlag, München, 4., unveränderte Auflage, 1987.
- [41] Roger Penrose. *Computerdenken, des Kaisers neue Kleider oder Die Debatte um künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik, Mit einem Vorwort von Martin Gardner und einem Vorwort zur deutschen Ausgabe von Dieter Wandschneider.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 1991.
- [42] Clifford A. Pickover. *Die Mathematik und das Göttliche. Aus dem Englischen übersetzt von Brigitte Post und Harald Höfner.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin, 2003.
- [43] Karsten Polke-Majewski. Thomas von Randow – Visionär seines Fachs. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 47(4):205, 2009.
- [44] Alfred Posamentier and Noam Gordon. An astounding revelation on the history of π . *Mathematics Teacher*, 77(1):52,47, 1984.
- [45] Carl Prantl. *Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. 1 – 4.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1955.
- [46] Wolfgang Promies, Hrsg. *Georg Christoph Lichtenberg, Schriften und Briefe. Erster Band: Sudelbücher.* Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1998.
- [47] Willard Van Orman Quine. *Grundzüge der Logik. Übersetzt von Dirk Siefkes.* Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft, 65. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 10. Auflage, 1998.
- [48] Elaine Rich. *Artificial Intelligence.* McGraw-Hill Book Company, Auckland, Bogota, Guatemala, Hamburg, Johannesburg, Lisbon, London, Madrid, Mexico, New Delhi, Panama, Paris, San Juan, Sao Paulo, Singapore, Sydney, Toronto, 1983.

- [49] Bertrand Russell. *Mysticism and Logic and other Essays*. Allen & Unwin, London, 2nd edition, 1950.
- [50] Alexander Rüstow. *Der Lügner. Theorie, Geschichte und Auflösung*. Teubner, Leipzig, 1910.
- [51] R. M. Sainsbury. *Paradoxes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [52] R. M. Sainsbury. *Paradoxien*. Reclams Universal-Bibliothek Nr. 8881. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1993.
- [53] R. M. Sainsbury. *Paradoxien*. Reclams Universal-Bibliothek Nr. 8881. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1993.
- [54] Heinrich Scholz. *Abriss der Geschichte der Logik*. Verlag Karl Alber, Freiburg/München, Zweite, unveränderte Auflage, 1959.
- [55] Arthur Schopenhauer. *Die Kunst, Recht zu behalten*. In *achtunddreißig Kunstgriffen dargestellt*. it 1658. Insel Verlag, Frankfurt am Main und Leipzig, 1990.
- [56] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 42:230–265, 1937.
- [57] A. M. Turing. Correction to: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, 43:544–546, 1938.
- [58] Ludwig Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung*. edition suhrkamp 12. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 15. Auflage, 1980.
- [59] Zweistein. *99 Logeleien von Zweistein mit ihren Antworten. Ein Wegner Buch!* Christian Wegner Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 4. Auflage, 1969.
- [60] Zweistein. *Neue Logeleien von Zweistein mit ihren Antworten. Ein Wegner Buch!* Christian Wegner Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1971.

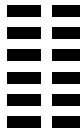
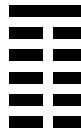
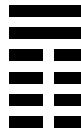
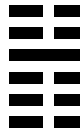
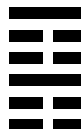
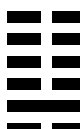
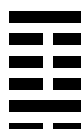
							
000000 0	000001 1	000010 2	000011 3	000100 4	000101 5	000110 6	000111 7
							
001000 8	001001 9	001010 10	001011 11	001100 12	001101 13	001110 13	001111 15
							
010000 16	010001 17	010010 18	010011 19	010100 20	010101 21	010110 22	010111 23
							
011000 24	011001 25	011010 26	011011 27	011100 28	011101 29	011110 30	011111 31

Abbildung 1: Die Hexagramme des I Ging.

Dargestellt sind nur die ersten 32 Hexagramme mit ihrer Interpretation als Binärzahlen. Eine gebrochene Linie symbolisiert den Zahlenwert 0, eine ununterbrochene Linie den Wert 1. Die oberste Linie eines Hexagramms stellt die Einerposition dar, die nächste den Koeffizienten von 2 und so weiter.

Die Liste ist nicht vollständig, es fehlen die Hexagramme von 32 bis 63.