

Mathematik – Das Werkzeug der Erkenntnis

1. Was ist Mathematik?

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55
20 146 Hamburg
E-Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/>

19. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Wozu Mathematik	3
1.1	Mathematik ist nützlich	3
1.2	Mathematik ist schön	6
1.3	Ohne Mathematik können wir die Welt nicht verstehen	7
1.4	Mathematik ist Teil unserer Kultur	9
1.5	Mathematik hilft, uns selbst zu verstehen	11
1.6	Mathematik ist gesund	11
2	Die Geschichte der Mathematik	12
2.1	Von den Anfängen bis zur griechischen Antike	12
2.2	Die antike griechische Mathematik	15
2.3	Euklid	17
2.3.1	Der Primzahlsatz	19
2.3.2	Die Euklidischen Axiome der Geometrie	20
	Anhang: Einige Kostproben mathematischen Denkens	24

Vorlesung am 6. 1. 2010 in der Bucerius Law School Hamburg.

A	Eine Aufgabe von Emil Artin	24
B	Ein Betrüger beim Juwelier	25
C	Die Königsberger Brücken	27
D	Rechnen mit Psephoi	29

1 Einleitung: Wozu Mathematik

Wenn man die Frage stellt: *Was ist Mathematik*, dann kann man überrascht sein, wie verschieden die Antworten ausfallen. Fragt man einen Mathematiker, dann wird dieser wahrscheinlich die Antwort geben: „Ich kann nicht sagen, **was** Mathematik ist, das was ich täglich tue, das ist Mathematik.“ Philosophen unterschiedlicher Richtungen haben auf diese Frage gute Antworten, leider nur haben keine zwei Philosophen die gleiche Antwort. Ich selbst werde gelegentlich – nach dem ersten Schrecken, den meine Berufsbezeichnung hervorruft – von sogenannten „gebildeten“ Menschen gefragt, was wir Mathematiker denn eigentlich tun. Daß zwei mal zwei vier ist, weiß man doch schon seit langem. Vermutlich haben manche Menschen die Vorstellung, daß wir jeden Morgen nachrechnen, um uns zu überzeugen, daß es wirklich so geblieben ist.

Um mich der Frage nach der Mathematik zu nähern, werde ich zunächst einmal einige Eigenschaften der Mathematik aufzählen, die zeigen, daß Mathematik mehr ist als bloße Zahlenspielerlei. Danach möchte ich der Frage nachgehen, wie der Mensch dazu kam, Mathematik zu treiben. Bei dieser Besichtigungstour durch die Mathematik werde ich immer wieder einfache mathematische Beispiele bringen, dabei jedoch nicht allzusehr in die Tiefe gehen. Ich habe nicht den Ehrgeiz, daß am Ende dieser Veranstaltung alle Teilnehmer zu Mathematikern geworden sind.

Ich werde zahlreiche Literaturhinweise geben, vorwiegend allgemeinverständliche Publikationen, vermittels deren sich interessierte Hörer vertiefend informieren können. Der ausführliche Text der Veranstaltungsreihe wird im Internet zur Verfügung stehen.

Auf Anwendungen der Mathematik in der Rechtswissenschaft werde nur mit Vorsicht eingehen. Ich bin kein Jurist und möchte nicht über ein mir fremdes Gebiet reden. Es werden jedoch Hinweise auf weiterführende Literatur gegeben.

1.1 Mathematik ist nützlich

Etwas naiv, „amerikanisch“, drückt das *The Wall Street Journal* (Technology, September 25, 1996, p. B–1.) die Bedeutung der Mathematik für die heutige Zeit wie folgt aus:

Ever wonder why certain shampoos have just the right consistency, so they flow from the bottle but not through your fingers? Or why a particular soft drink seems to hit the spot why another may not? Or how cyclists could shatter 21 speed records at Atlanta's Summer Olympic Games?

The answer in each case: mathematics.

Most ordinary Americans may hate doing math, but they are increasingly subject to its influence, whether they know it or not. Experts in a growing number of fields are relying on calculation rather than estimation. Some textile designers use geometry to create pleasing new designs. Many companies have discarded rule of thumb in favor of sophisticated statistical tools to decide what products to place on supermarket shelves. Even musicians use math equations to generate inventive new sounds.

Fast alles, was uns umgibt, hat mit Mathematik zu tun, vom MP3-Player bis zum Airbus. Als am 27. April 2005 der erste Versuchsflug eines Airbus A380 stattfand, mußte der Testpilot sicher sein, daß das Flugzeug auch wirklich fliegen würde. Man kann so etwas nicht „ausprobieren“, das wäre riskant für die Testpiloten und außerdem sehr teuer. Der Pilot konnte diese Sicherheit haben, denn bevor das Versuchsflugzeug gebaut wurde, hatte man in zahlreichen Berechnungen ausprobiert, wie es sich bei jeder nur denkbaren Flugsituation verhalten würde. Die mathematischen Methoden, die man dabei benutzt, sind von Mathematikern und Ingenieuren entwickelt worden.

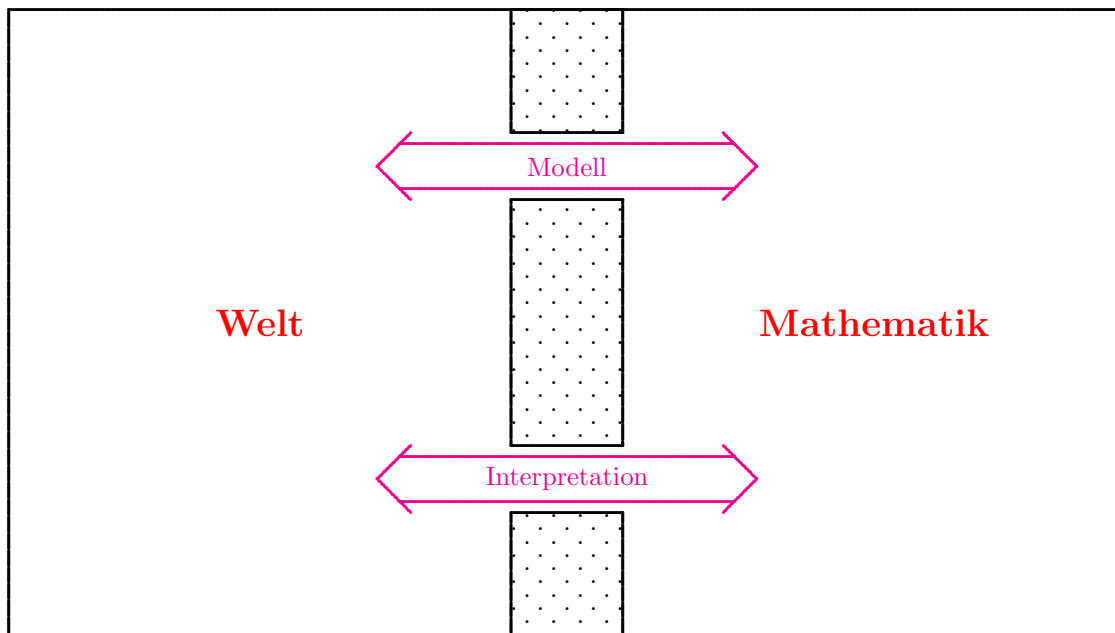


Abbildung 1: Das Verhältnis reale Welt – Mathematik.

Ich stelle mir das Verhältnis von unserer realen Welt und der Mathematik so vor, wie in Abbildung 1 dargestellt. Wir haben die uns bekannte „reale Welt“ und eine „ideale Welt“, in der die Mathematik zu Hause ist, das heißt, ich bevorzuge eine Platonische Sicht der Dinge. Irgendein Vorgang, der in unserer bekannten Welt stattfindet, wird in ein Modell umgeformt, welches der Welt der Mathematik angehört. In dieser idealen Welt kann man an dem Modell arbeiten, man kann aus ihm Schlüsse ziehen. Das Resultat wird in Termini der realen Welt übersetzt und hat dann Wirkung. Natürlich ist dieser Vorgang sehr viel komplexer, es findet Kommunikation zwischen beiden Welten statt. Im Grenzbereich der beiden Welten hat man ein Niemandsland. Ein Ingenieur oder ein technischer Physiker steht mit beiden Beinen fest in der realen Welt und wagt bei Bedarf einige Schritte ins Niemandsland hinein, bleibt aber immer in Sichtweite der realen Welt. Ein theoretischer Physiker lebt im Niemandsland, in Sichtweite der Grenze zur Mathematik, überschreitet jedoch diese Grenze fast nie. Ein Mathematiker lebt im Gebiet der Mathematik, wobei die angewandten Mathematiker – zu denen ich mich zähle – häufig Ausflüge in die reale Welt unternehmen, während die reinen Mathematiker lediglich zum Essen, Schlafen und zum Zwecke der Fortpflanzung die reale Welt aufsuchen.

Ich gebe zu, daß diese Sicht der Dinge nicht unumstritten ist. Meine Sicht ist durch meine Erfahrungen mit der Mathematik geprägt, und dieser geheimnisvolle Prozeß, daß reale Dinge sich in Formeln niederschlagen und daß die formale Manipulation dieser Formeln zu Resultaten führen,

die unsere Welt verändern, ist schon recht geheimnisvoll. Ich bringe einige Zitate zu diesem Bild. Der Mathematiker und Philosoph Reuben Hersh hat die zwiespältige Situation des Mathematikers zwischen Realismus und Platonismus recht treffend geschildert [12, S. 39]:

The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends. On Weekdays, when doing mathematics, he's a Platonist, convinced he's dealing with an objective reality whose properties he's trying to determine. On weekends, if challenged to give a philosophical account of the reality, it's easiest to pretend he doesn't believe it. He plays formalist, and pretends mathematics is a meaningless game.

Albert Einstein (1879 – 1955) hat die Beziehung der Welt der Mathematik zur Wirklichkeit wie folgt charakterisiert¹⁾

An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so viel beunruhigt hat. Wie ist es möglich, daß die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?

Hierauf ist nach meiner Ansicht kurz zu antworten: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Goethe, der ein sehr zwiespältiges Verhältnis zur Mathematik hatte, bringt ein geistvolles, aber durchaus zutreffendes Bild für die Beziehung von realer Welt und Mathematik:

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.

Johann Wolfgang von Goethe, Maximen und Reflexionen 1279.

Er relativiert diese Aussage jedoch an anderer Stelle:

Wie man der französischen Sprache niemals den Vorzug streitig machen wird, als ausgebildete Hof- und Weltsprache, sich immer mehr aus- und fortbildend, zu wirken, so wird es niemand einfallen, das Verdienst der Mathematiker gering zu schätzen, welches sie, in ihrer Sprache die wichtigsten Angelegenheiten verhandelnd, sich um die Welt erwerben, indem sie alles, was der Zahl und dem Maß im höchsten Sinne unterworfen ist, zu regeln, zu bestimmen und zu entscheiden wissen.

Johann Wolfgang von Goethe, Maximen und Reflexionen 710.

Es hat sich sehr häufig zugetragen, daß in der Physik eine „neue“ Mathematik benötigt wurde, und daß sich dann herausstellte, daß diese Mathematik von den Mathematikern aus ganz anderen Gründen bereits entwickelt worden war. So lag die Theorie der Kegelschnitte von Appolonius von Perge (etwa 260 – 190 v. Chr.) bereits im Detail vor, als Johannes Kepler (1571 – 1630) sie zur Formulierung der Gesetze der Planetenbewegung benötigte, die Theorie der Nichteuklidischen Geometrie war von Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826 – 1866) geschaffen worden,

¹⁾ Albert Einstein: *Mein Weltbild*, Herausgegeben von Carl Seelig, Neue, vom Verfasser durchgesehene und wesentlich erweiterte Auflage, (Ullstein Buch Nr. 65), Ullstein GmbH, Frankfurt/M — Berlin — Wien, 1970.

und sie erwies sich dann als genau das Werkzeug, welches Albert Einstein für die Allgemeine Relativitätstheorie benötigte, die für die Quantenmechanik notwendig Mathematik unendlich-dimensionaler Räume war ebenfalls vollständig vorhanden, als sie von den Physikern benötigt wurde. Die Beispiele ließen sich leicht vermehren.

Der Physik-Nobelpreisträger Steven Weinberg hat für dieses Phänomen eine plausible Erklärung angegeben²⁾

It is that mathematicians (or at least some of them) have sold their souls to the devil in return for advance information about what sort of mathematics will be of scientific importance. . . . I know many mathematicians and, of course, none of the ones that I know, would I suspect of anything like that, but who can tell?

Steven Weinberg.

Es scheint also nicht einfach zu sein, zu sagen, was eigentlich Mathematik ist und warum sie so nützlich ist. Ich halte es mit den meisten meiner Kollegen aus der angewandten Richtung: Ich **tue** Mathematik und denke nur selten darüber nach, **was** Mathematik ist.

Ich gebe eine Aufstellung einiger Anwendungsgebiete, auf denen ich forschend tätig war:

- Cytologie (*Cytometry* 1981),
- Ingenieurwissenschaften (*Ingenieur-Archiv* 1982),
- Festkörperphysik (*Physical Review B* 1973),
- Urheberrecht (Gutachten „Baustatikprogramm“, OLG Frankfurt 1984),
- Wirtschaftswissenschaften (Gutachten über Verkehrswertermittlung 1997),
- Informationstechnologie (insbesondere zwei Erfindungsmeldungen),
- Kraftfahrzeugtechnik (*Technisches Messen* 2005),
- Softwareentwicklung (für kommerzielle Anwendungen),
- Theologie.

Man kann sagen, daß heute an jeder Stelle, an der sich ein Mensch der „entwickelten“ Nationen aufhält, die nächste Anwendung von Mathematik „in Reichweite“ zu finden ist.

1.2 Mathematik ist schön

Die Schönheit der Mathematik drückt sich auf vielerlei Weise aus, sie wird reflektiert in den Aussagen zahlreicher Künstler, sie wird augenfällig in der Vorliebe gerade nicht eigentlich mathematisch Gebildeter an Denksportaufgaben, sie manifestiert sich in Symmetrie (und Asymmetrie beziehungsweise Brechung der Symmetrie) in der bildenden Kunst seit ältesten Zeiten.

Schon in ältesten Zeiten spielte das Spannungsverhältnis von Symmetrie und Symmetriebrechung, von naturalistischer Darstellung und raffinierter Idealisierung eine wichtige Rolle in der bildenden

²⁾Phillip A. Griffiths, Allan M. Cormack, Herbert A. Hauptman, I. M. Singer and Steven Weinberg: Mathematics: The unifying thread in science. *Notices of the American Mathematical Society*, 33:716–733, 1986.

Kunst. Ich denke hier an das berühmte Gänsefries in der Mastaba des Nefermaat und seiner Frau Atet in Medûm³⁾. Auf diesem Fries sind sechs Gänse zu sehen, bei denen der für ägyptische Kunst außergewöhnliche Naturalismus auffällt. bei näherem Hinsehen bemerkt man, daß die Anordnung der Gänse spiegelsymmetrisch ist, also nicht realistisch, die Gänse sind „arrangiert“. Noch genaueres Hinsehen offenbart, daß die Symmetrie der Anordnung kunstvoll gebrochen ist. Keine zwei symmetrisch gelegenen Partner sind wirklich symmetrisch, die Haltung und auch die Färbung weicht jeweils ein wenig ab. Der Künstler verstand sehr viel von Symmetrie und Symmetriebrechung, also eben auch von Mathematik.

Einen wahren Rausch der Begeisterung für Mathematik erlebte man nach der „Entdeckung der Perspektive“. Genannt seien hier neben Albrecht Dürer (1471 – 1528) [4] der Nürnberger Goldschmied Wenzel Jamnitzer (1508 – 1585) [16] und der Augsburger Lorenz Stöer (1557 – etwa 1620) [39]. In moderner Zeit hat Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) [8] in zahlreichen mathematisch inspirierten Bildern – von der hyperbolischen Geometrie bis hin zum Möbius-Band – die Ästhetik der Mathematik augenfällig gemacht. Zu erwähnen wäre auch *Das Sakrament des Letzten Abendmahls* von Salvador Dalí. Dieses Bild ist eine Studie in Symmetrie und kunstvoller Symmetriebrechung, und die Szene wird – als Symbol des Jenseitigen – von einem angedeuteten Dodekaeder umrahmt [21, S. 83].

1.3 Ohne Mathematik können wir die Welt nicht verstehen

Es gibt einen häufig zitierten Ausspruch von Galileo Galilei (1564 – 1642) In seinem *Il Saggiatore* (1623) schreibt er:

Die Philosophie steht in diesem großen Buch geschrieben, dem Universum, das unserem Blick ständig offen liegt. Aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Wort davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Mathematik wäre demnach also die Sprache, in der das Universum in seinen kleinsten und seinen größten Erscheinungen uns verständlich wird. Die Erscheinungen der Quantenphysik sind nur sinnvoll über mathematische Formeln beschreibbar, die Struktur des Universums ist nach der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Studie in Geometrie!

Ich möchte eine Geschichte erzählen, die die Rolle der Mathematik bei der Beschreibung und beim Verständnis der Natur sehr treffend charakterisiert.

James Clerk Maxwell (1831 – 1879) hatte in verschiedenen Publikationen (*On Faraday's Lines of Force* (1855). *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873); vgl. etwa [22]) die zahlreichen Beobachtungen über Elektrizität und Magnetismus zu einer einheitlichen Theorie zusammengefaßt. Es lagen in der Tat umfangreiche Konvolute über Beobachtungsergebnisse vor, etwa von Michael Faraday (1791 – 1867), André Marie Ampère (1775 – 1836), Hans Christian Oersted (1777 – 1851), aber auch von Benjamin Franklin (1706 – 1790) und anderen Forschern. Interessant sind hier die Untersuchungen von Georg Christoph Lichtenberg (1742 – 1799), die in der Abhandlung *Von einer neuen Art die Natur und Bewegung der elektrischen Materie zu erforschen* im Jahre

³⁾4. Dynastie, Beginn der Regierungszeit des Snofru, um 2620 v. Chr. Ägyptisches Museum Kairo (Kat. # 26).

1762 publiziert wurden [26, S. 24–34]. Lichtenberg hatte die nach ihm benannten *Lichtenberg-schen Figuren* gefunden, die sich einstellen, wenn man einen geladenen Nichtleiter mit feinem Staub bestreut. Er schreibt dazu [26, S. 25]:

... eine Erscheinung, die, soviel ich weiß, neu ist und von der ich überzeugt bin, daß sie durch die Untersuchungen geschickterer Naturforscher, denen zugleich ein reichlicherer Vorrat physikalischer Instrumente zu Gebote steht, für die Physik überhaupt wichtig werden, und einen Weg zur genaueren Erforschung der elektrischen Materie bahnen kann.

Die Hoffnungen Lichtenbergs haben sich nicht erfüllt. Seine Figuren sind für eine mathematische Behandlung viel zu kompliziert, so daß Maxwell gut daran tat, diese Beobachtungen nicht in seine Theorie mit einfließen zu lassen. Maxwell mußte also das ihm vorliegende Beobachtungsmaterial nicht nur zusammenfassen sondern auch kritisch auswählen, das heißt, auf seine Mathematikauglichkeit prüfen. Das Resultat dieser Überlegungen Maxwells sind die nach ihm benannten Gleichungen, die in Abbildung 2 (in einer vereinfachten Form) dargestellt sind. Diese Abbildung soll hier zunächst nicht als Formel, sondern als ein dekoratives Element des Textes, also als *Abbildung* verstanden werden, etwa so wie ein Hieroglyphentext in einem populärwissenschaftlichen Artikel über Ägyptologie.

$$\begin{array}{ll}
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} & \frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\
 \\
 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0
 \end{array}$$

Abbildung 2: Die Maxwellschen Gleichungen

Es stellte sich heraus, daß diese Gleichungen, die zunächst nur als Interpolationsformeln beziehungsweise als stenographischer Code für die bekannten Beobachtungen aufgestellt worden waren, plötzlich *ontologischen Mehrwert* aufzeigten. Nicht nur, daß man aus ihnen die Ergebnisse noch nicht ausgeführter Experimente – sofern sie nicht „exotisch“ wie die von Lichtenberg waren – vorhersagen konnte, die Formeln begannen, ein Eigenleben zu entwickeln. So kann man aus der Form der Formeln ersehen, daß sie Lösungen haben, die Wellennatur aufweisen. Der Nachweis, daß es solche Lösungen geben muß, gehört zu den Standardaufgaben unserer Studenten in den ersten Semestern. Nun war die Frage, wo denn nun die Wellen zu finden seien. In den Laborexperimenten hatten sie sich nicht gezeigt.

Wie bekannt, gelang es Heinrich Hertz (1857 – 1894), solche Wellen, die Radiowellen nachzuweisen. Er schreibt dazu⁴⁾:

⁴⁾Zitiert in *Mathematics* von M. Kline (Oxford University Press, Oxford 1980), S. 338.

Man kann sich des Gefühls nicht erwehren, daß diese mathematischen Formeln eine eigene, unabhängige Existenz haben, und klüger sind selbst als ihre Entdecker, daß wir aus ihnen mehr gewinnen können, als ursprünglich in sie hineingesteckt wurde.

Ähnlich äußerte sich Ludwig Eduard Boltzmann (1844 – 1906). Als Motto zum zweiten Bande seiner *Vorlesungen über MAXWELLS Theorie der Elektrizität und des Lichtes* (München, 1893) schrieb er über die Maxwellschen Gleichungen [37, S. 18]:

War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb ...

Aber die Geschichte ist hier noch längst nicht zu Ende. In den Gleichungen taucht der Buchstabe c auf, welcher in der Physik die Lichtgeschwindigkeit symbolisiert. Es war ein langer Weg, zu zeigen, daß die Gleichungen besonders „schön“ und symmetrisch werden, wenn man die Maßeinheiten für elektrische und magnetische Felder gerade so wählt, daß dieses c in den Gleichungen auftritt. Was hat nun die Lichtgeschwindigkeit in den Maxwellschen Gleichungen zu suchen?

Albert Einstein (1879 – 1955) wurde zu seiner Speziellen Relativitätstheorie durch die Maxwellschen Gleichungen inspiriert. Er schildert in einem autobiographischen Beitrag, wie er als Sechzehnjähriger sich ein entscheidendes Gedankenexperiment vorstellte [33, S. 20]:

Wenn ich einem Lichtstrahl nacheile mit der Geschwindigkeit c (Lichtgeschwindigkeit im Vakuum), so sollte ich einen solchen Lichtstrahl als ruhendes, räumlich oszillatorisches, elektromagnetisches Feld wahrnehmen. So etwas scheint es aber nicht zu geben, weder auf Grund der Erfahrung noch gemäß den **Maxwellschen Gleichungen**. Intuitiv klar schien es mir von vornherein, daß von einem solchen Beobachter aus beurteilt, alles sich nach denselben Gesetzen abspielen müsse wie für einen relativ zur Erde ruhenden Beobachter. Denn wie sollte der erste Beobachter wissen, bzw. konstatieren können, daß er sich im Zustand rascher, gleichförmiger Bewegung befindet?

Dieses Gedankenexperiment muß also im Jahre 1895 stattgefunden haben. Im Jahre 1905 publizierte Einstein seine berühmte Arbeit über Spezielle Relativitätstheorie. Sie trug den Titel: Zur Elektrodynamik bewegter Körper [5].

1.4 Mathematik ist Teil unserer Kultur

Bereits in der Bibel verbergen sich zahlreiche Anspielungen auf mathematische Konstrukte (befreundete Zahlen, vollkommene Zahlen⁵⁾, π ⁶⁾, ...). Im Mittelalter spielte die Mathematik im Denken der Theologen und Philosophen – und nicht nur der Kabbalisten – eine erhebliche Rolle, in neuerer Zeit finden wir überschwengliche und begeisterte Aussagen über Mathematik etwa bei Novalis⁷⁾, aber auch zahlreiche Philosophen setzten sich mit Mathematik auseinander (Plato, Kant, Joachim Jungius rühmte den propädeutischen Nutzen der Mathematik für die Philosophie [17], ..., Wittgenstein, Popper, Husserl ...).

Die Ideale der Geometrie durchdringen unsere Architektur und die Kunst auf eine vielfältige Weise, von den Pyramiden der Ägypter über die Kathedralen des Mittelalters bis hin zu den

⁵⁾François Fricker: Befreundet, vollkommen, prim — mystische Zahlen? (Monatsspektrum). *Spektrum der Wissenschaft*, November 1988:20–21.

⁶⁾Michael A. B. Deakin and Hans Lausch: The Bible and Pi. *The Mathematical Gazette*, 82(494):162–166, 1998.

⁷⁾Martin Dyck: *Novalis and Mathematics University of North Carolina Studies in the Germanic Languages and Literatures Number Twenty-Seven*, The University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1960.

Bauten von Richard Buckminster Fuller (1895 – 1983) beziehungsweise die nach dem Fullerschen Prinzip der „Tensegrity“ entworfenen Gitterskulpturen von Kenneth Snelson (geb. 1927). Eine dieser Gitterskulpturen, ein Röhrenobjekt, welches 1973 entstanden ist, findet man in Hamburg in *Planten un Blumen*⁸⁾.

Es ist interessant, daß man mathematische Strukturen auch in der Literatur finden. Besonders bemerkenswert ist hier Franz Kafka. In der Geschichte *Vor dem Gesetz* wird geschildert, wie ein Mann vom Lande Einlaß begehrt. Der Türhüter warnt den Mann davor, die Tür zu durchschreiten. Er sagt:

Ich bin mächtig. Und ich bin nur der unterste Türhüter. Von Saal zu Saal stehen aber Türhüter, einer mächtiger als der andere. Schon den Anblick des dritten kann nicht einmal ich mehr vertragen.

Ein solches Konstrukt: Man beschreibt ein Anfangselement einer (also unendlich vorstellbaren) Folge und gibt an, wie sich aus einem gegebenen Element das nachfolgende ergibt („Schon den Anblick des dritten kann nicht einmal ich mehr vertragen.“). Wir nennen dies *vollständige Induktion*. Eine solche Konstruktion wird von Kafka gelegentlich verwendet, um das Unaussprechliche zu schildern, etwa in der Geschichte *Eine kaiserliche Botschaft* oder *Das nächste Dorf*. Das Bild der *Türen hinter der Tür* findet sich beispielsweise auch bei Martin Buber⁹⁾.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Mathematik und Lyrik. Radbruch wies Spuren der Mathematik in der Lyrik nach [28]. Aber die Lyrik, als eine Kunst der Form, kann als in einer eigenen Welt existierend angesehen werden. Dies kommt sehr schön bei den Nonsensgedichten zum Ausdruck, die keinen Bezug zur Welt haben (wenigstens keinen unmittelbaren), die aber trotzdem beeindruckende und auch populäre Kunst vermitteln können. Es gibt zahlreiche Sammlungen deutscher Unsinnspoesie, etwa [30]. Ein besonders reizvoller Beitrag hierzu sind die *Polulangrischen Lieder* von James Krüss [19].

Ein besonders interessantes Kapitel ist die Beziehung der Musik zur Mathematik. Die Pythagoreer, ein religiöser Geheimbund, der sich nach Pythagoras von Samos (um 580 – um 496 v. Chr.) benannte, waren von der Beobachtung fasziniert, daß zwischen harmonischen Klängen und einfachen Zahlenverhältnissen eine Beziehung besteht. Diese Beziehung wurde durch die *Tetraktys* dargestellt (Abbildung 3), die die Zahlenverhältnisse für Oktave, Quinte und Quarte symbolisierte sowie die den Pythagoreern heilige Zehnzahl. Diese wahrhaft wunderbaren Zusammenhänge zwischen einem ästhetischen Erlebnis und einem Zahlenverhältnis hat nicht nur die Pythagoreer sondern auch die Nachwelt zutiefst beeindruckt.



Abbildung 3: Die Tetraktys.

⁸⁾Hermann Hipp, *Freie und Hansestadt Hamburg*. DuMont Kunst-Reiseführer. Köln, 3. Aufl. / 1996: S. 213.

⁹⁾Martin Buber, *Erzählungen der Chassidim*, Manesse Bibliothek der Weltliteratur, Manesse Verlag, Zürich, 1949, S. 185.

Die Beziehungen von Mathematik und Musik waren Gegenstand zahlloser mathematischer Abhandlungen. Sie werden sehr schön und verständlich in den *Briefen an eine deutsche Prinzessin* des bedeutenden Mathematikers Leonhard Euler (1707 – 1783) dargestellt [10, zweiter bis achter Brief]. Im Jahre 2002 fand eine Tagung der im Jahre 1690 gegründeten Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu dem Thema *Mathematik und Musik* statt [24, 36, 23, 38]. Wolfgang Amadeus Mozart (1756 – 1791) hat im Jahre 1787 eine *Anleitung so viel Walzer oder Schleifer mit zwei Würfeln zu componiren so viel man will ohne musikalisch zu seyn noch etwas von der Composition zu verstehen* (KV Anh. 294d). Vermittels dieser Technik kann man „automatisch“ eine ungeheure Anzahl (etwa 10^{29}) von recht hübsch klingenden Musikstücken erzeugen.

1.5 Mathematik hilft, uns selbst zu verstehen

Mit einer gewissen Berechtigung kann man die Mathematik als ein Produkt des menschlichen Geistes betrachten. Wenn auch zahlreiche Erkenntnistheoretiker argumentieren, der Mensch habe die Mathematik lediglich „vorgefunden“, meine ich doch, daß zumindest Teile der Mathematik nichts mit der Welt, aber viel mit der Art, in der wir denken, zu tun haben. Wenn dies so ist, dann kann uns das Studium der Mathematik helfen, das zu verstehen, was uns von den anderen Lebewesen auf dieser Erde auszeichnet, nämlich die Fähigkeit, in unserem Bewußtsein eigne Welten zu schaffen.

1.6 Mathematik ist gesund

Möglicherweise ist diese Beobachtung nicht ganz seriös, jedoch haben verschiedene Autoren bemerkt, daß Mathematiker ein besonders hohes Lebensalter erreichen. So schreibt Jean Paul in *Die unsichtbare Loge* (1793)

Die Anstrengung der empfindenden Phantasie ist unter allen geistigen die entnervendste; ein Algebraist überlebt allemal einen Tragödiensteller.

Lichtenberg merkt in seinen „Sudelbüchern“ an [27, S. 234, Heft J [1280]]:

Das hohe Alter mancher Mathematiker (Fontenelle, Euler, Leibniz) könnte eine Folge sein der Betrachtung ihrer selbst, des Subjektivischen bei den Körpern, weil das eigentlich Wiederholung ist. So könnte die Mathematik zu Verlängerung des Lebens beitragen.

In der Einleitung seines Buches über Funktionalanalysis schreibt Heuser [13]:

Lebensdaten der in diesem Buche vorkommenden Mathematiker habe ich angegeben, soweit ich sie ausfindig machen konnte. Hinter einem Semikolon habe ich immer das Lebensalter aufgeführt (genauer: Die Differenz zwischen Todes- und Geburtsjahr). Beispiel: René Maurice Fréchet (1878–1973; 95). Der Leser wird so ohne große Mühe dahinterkommen, daß Mathematik neben allen ihren sonstigen Vorzügen vielleicht auch noch der Gesundheit zuträglich ist.

Übrigens: Am 9. April 2002 starb in Innsbruck der Mathematiker Leopold Vietoris (1891 – 2002) im Alter von 110 Jahren und 10 Monaten. Seine Frau Maria war am 24. März 2002 im Alter von

101 Jahren gestorben. Vietoris war bis zu seinem Tode ein körperlich und geistig reger Mensch, er besuchte beispielsweise regelmäßig die mathematischen Kolloquia, seine letzte Arbeit publizierte er im Alter von 105 Jahren.

2 Die Geschichte der Mathematik

2.1 Von den Anfängen bis zur griechischen Antike

Die Anfänge der Mathematik verlieren sich im Dunkel der Vergangenheit. Es gibt zwei sehr frühe Zeugnisse, die man zwanglos als Bekundungen mathematischer Betätigung ansehen kann. In Zentralafrika im Gebiet der Ishango wurde ein etwa 20 000 Jahre alter Knochen aufgefunden, der Ritzungen aufweist, die aller Wahrscheinlichkeit nach Zahlzeichen darstellen. Über die Bedeutung dieser Zahlzeichen gibt es eine Anzahl von mehr oder weniger kühnen Hypothesen [25, S. 15, Die ersten Zeichen]. In Dolní Věstonice in der Tschechoslowakei hat man ebenfalls einen Knochen mit Zählungsmarkierungen gefunden. Dieser Knochen dürfte etwa 20 000 bis 35 000 Jahre alt sein [14, S. 82 f.] (vgl. auch [1]). Ich bezeichne daher gern die Mathematik als das älteste Gewerbe der Welt.

Nach der Neolithischen Revolution vor etwa 11 000 Jahren, als der Mensch sesshaft wurde und Ackerbau und Viehzucht betrieb, sah er sich mit der Notwendigkeit konfrontiert, längerfristig zu planen. Man hat im Vorderen Orient Hohlkörper aus gebranntem Ton gefunden, die „Zählsteinchen“ im Inneren enthielten [35]

Besonders für den Ackerbau waren Kalender erforderlich, aber auch „Wirtschaftsmathematik“, das heißt insbesondere Vorratsplanung. Im Alten Testament (Gen 25–36) wird die Geschichte von Jakob und Esau erzählt. Hierbei repräsentiert Esau den Jäger und Jakob den planenden Sesshaften. Wir kennen frühe Zeugnisse für wirtschaftliche Zählungen – etwa Viehzählungen [34, 35].

In den alten Hochkulturen erforderte die Verwaltung des Staates die Beschäftigung mit recht diffiziler Mathematik. Uns sind mathematische Zeugnisse aus dem Zweistromland, aus Südamerika und aus dem antiken Ägypten bekannt. Aus dem Alten Testament kennt man die Josephsgeschichte (Gen 30,23 – 50,26; es ist interessant, diesen Text mit dem der 12. Sure des Korans zu vergleichen). Demnach riet Joseph dem Pharao zur Vorratshaltung, um eine kommende Notzeit zu überbrücken. Die alten Ägypter hatte dies schon lange von Joseph erkannt und praktiziert, die klimatischen und geographischen Bedingungen in Ägypten machten eine vorausschauende Planung überlebenswichtig. Der Erfolg der Landwirtschaft im Alten Ägypten war von den regelmäßigen Nilüberschwemmungen abhängig. Von zehn aufeinanderfolgenden Überschwemmungen des Nils sind jedoch kaum drei befriedigend, die sieben anderen sind entweder zu schwach oder zu stark [2, S. 247].

Im Neuen Testament findet sich ebenfalls ein interessanter Hinweis auf die Notwendigkeit der Planung. Es steht dort in Luk 14,28–32:

Denn wer ist unter euch, der einen Turm bauen will und setzt sich nicht zuvor hin und überschlägt die Kosten, ob er genug habe, um es auszuführen?
damit nicht, wenn er den Grund gelegt hat und kann's nicht ausführen, alle, die es sehen, anfangen, über ihn zu spotten,
und sagen: Dieser Mensch hat angefangen zu bauen und kann's nicht ausführen.

Oder welcher König will sich auf einen Krieg einlassen gegen einen andern König und setzt sich nicht zuvor hin und hält Rat, ob er mit Zehntausend dem begegnen kann, der über ihn kommt mit Zwanzigtausend?

Wenn nicht, so schickt er eine Gesandtschaft, solange jener noch fern ist, und bittet um Frieden.

Ähnlichkeiten zur heutigen Zeit sind rein zufällig, und der Autor weist ausdrücklich darauf hin, daß er das Wort „Elbphilharmonie“ **nicht** benutzt hat.

Ein sehr schönes Dokument aus der Regierungszeit Ramses' II. (1290 – 1224 v. Chr.) wurde von Adolf Erman (1854 – 1937) herausgegeben. Es handelt sich um eine Streitschrift eines Schreibers, die an einen hochstehenden, aber unfähigen Kollegen gerichtet ist. Der Schreiber nennt eine große Anzahl von Berechnungsaufgaben, die für einen Schreiber dieser Zeit Routine waren, und äußert Zweifel daran, daß sein Kollege diesen Aufgaben gewachsen sei, etwa [7, S. 282 ff.] (Fußnoten von Erman):

Ein Obelisk ist neu gemacht worden, auf den der Name seiner Majestät eingegraben ist; er ist im Schaft 110 Ellen hoch, an der Basis mißt er 10 Ellen und der Block (?) an seinem Ende hat auf jeder Seite 7 Ellen. Die Verjüngung (?) beträgt 1 Elle und 2 Finger; seine Pyramide³⁾ ist eine Elle hoch und sein ... mißt 2 Finger. *Rechne du nun danach aus (?)*, damit du jeden Mann, der zum Schleppen *nötig* ist, verabfolgest und schicke sie zum roten Berge⁴⁾. Sieh, man wartet schon auf sie. *Sei* dem Kronprinzen, dem Kinde der Sonne *behilflich*. Entscheide für uns, wieviel Leute gebraucht werden, um ihn zu ziehen. Mache nicht, daß man zum zweiten Male schicken muß, denn das Denkmal liegt (fertig) im Steinbruch. Antworte schnell und zögere nicht.

Eine weitere typische Aufgabe, die man heute unter dem Fachbegriff „Logistik“ einordnen würde, findet man ebenfalls in diesem Brief [7, S. 284 f.]:

Die Hilfstruppe des Heeres, das du befehligst, zählt 1900 Mann, 520 Schardana, 1600 Kehek, (100) Maschawascha²⁾, 880 Neger, im ganzen 5000, wenn man ihre Offiziere nicht mitrechnet. Ein Geschenk hat man vor dich gebracht an Brot, Vieh und Wein³⁾. Die Zahl der Leute ist aber zu groß für dich (?)⁴⁾ und der Proviant ist zu klein für sie: 300 Weizenbrote, 1800 ... brote, 120 Ziegen verschiedener Art, 30 Maß Wein – der Soldaten sind so viele und der Proviant ist unterschätzt (?) – – –. Du empfängst den Proviant und er liegt im Lager.

Ein bemerkenswertes Zeugnis altägyptischer Mathematik stellt der Papyrus Rhind dar [29]. Er stammt von dem Schreiber Ahmose etwa aus der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts v. Chr. Im Text wird der Papyrus als Abschrift eines Dokuments aus der Zeit des Pharao Ammenemês III. (1844 – 1797 v. Chr.) ausgewiesen. Der Papyrus enthält eine große Anzahl von mathematischen Aufgaben, allerdings typischerweise in Fallbeispielen, ohne den Versuch, eine allgemeine „Theorie“ zu geben. Als Beispiel die Aufgabe Nr. 56 aus dem Papyrus Rhind [15], vgl. [29, S. 48]:

³⁾die abgeschrägte Spitze des Obeliskens; die Zahl ihrer Höhe ist wohl zu gering.

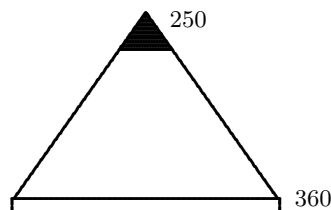
⁴⁾der Sandsteinbruch bei Kairo, vgl. oben S. 42. [Sinuhe]

²⁾Die Schardana sind ein Seevolk, das Ägypten in dieser Zeit heimzusuchen pflegte, das aber auch in ägyptischen Sold trat. Ähnlich stand es mit den lybischen Stämmen der Maschawascha und der Kehek.

³⁾das schicken ihm die Bewohner des Landes.

⁴⁾größer, als daß du sie aus diesem Geschenke speisen könntest.

Übersetzung nach [15]	„moderne“ Berechnung
Method of calculating a pyramid,	Methode zur Berechnung
360 is its base, 250 is its height.	einer Pyramide, Basislänge 360, Höhe 250.
You shall let me know its inclination.	[Angaben in Ellen] Du sollst mir ihre Neigung angeben.
You calculate half of 360.	Du berechnest die Hälfte von 360.
It results in 180.	Es ist 180.
You divide 180 by 250.	Du dividierst 180 durch 250.
$\overline{2} \overline{5} \overline{50}$ of a cubit results.	$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} [= \frac{36}{50}]$ Ellen ist das Ergebnis
A cubit has 7 palms.	Eine Elle hat 7 Handbreiten.
You multiply with 7.	Du multiplizierst mit 7.
$\begin{array}{r} \cdot \quad 7 \\ \backslash \quad \overline{2} \quad 3 \quad \overline{2} \\ \backslash \quad \overline{5} \quad 1 \quad \overline{3} \quad \overline{15} \\ \backslash \quad \overline{50} \quad \overline{10} \quad \overline{25} \end{array}$	$\frac{36}{50} \cdot 7 = \frac{252}{50} = 5 \frac{1}{25}$
Its inclination: $5 \overline{25}$ palms.	Die Neigung ist $5 \frac{1}{25}$ Handbreit



Hierzu sollte angemerkt werden, daß die Ägypter nur Brüche mit Zähler 1 kannten. In der ägyptologischen Literatur werden diese Brüche durch Überstreichen gekennzeichnet (ähnlich wie in Papyrustexten). So bedeutet $\overline{5}$ den Bruch $1/5$, $\overline{50}$ den Bruch $1/50$ und so weiter. Diese Darstellung von Brüchen machte die Bruchrechnung etwas ungefüge¹⁰⁾. Zur Multiplikation mit 7: Es werden hier die die Summanden der Stammbruchdarstellung des Resultats $1/2 + 1/5 + 1/50$ jeweils mit 7 multipliziert. Dies geschah durch Tabellen, die man ebenfalls im Papyrus Rhind findet. Schwierig ist, daß man ausschließlich in Stammbrüchen denken darf. Man erhält $7 \times \overline{2} = 3 + 1/2 = 3 \overline{2}$, ebenso $7 \times \overline{5} = 1 \overline{3} \overline{15}$ (wie kommt man darauf? Das hatten die ägyptischen Schreiber so gelernt!) und schließlich $7 \times \overline{50} = \overline{10} \overline{25}$ (nachrechnen!). Schließlich muß das alles noch addiert werden. Wie einfach ist dagegen doch die von manchen gefürchtete heutige Bruchrechnung!

Das heißt, hier wird an einer Pyramide mit gegebenen Abmessungen gezeigt, wie man deren Neigung von $5 \frac{1}{25}$ Handbreiten (palms) pro Elle (cubit) Höhe berechnet.

¹⁰⁾Es ist ein Kuriosum, daß sich ägyptisches Gedankengut bis in unsere Tage bewahrt hat. So findet man heute noch in Lexika den Begriff Stammbruch, etwa im dtv-Lexikon: **Stammbruch**, gemeiner positiver Bruch mit dem Zähler 1, z. B. $1/2$, $1/3$.

Auch die Mathematik des Zweistromlandes und der mittelamerikanischen Hochkulturen war beispielorientiert. Es gibt starke Indizien dafür, daß in den altbabylonischen Keilschrifttexten die konkreten Zahlen nur als „Platzhalter“ dienten, so daß man in diesen Texten Vorläufer für allgemeine Algorithmen im modernen Sinne sehen kann [18].

Übrigens wurden auch in antiken Gesetzestexten häufig exemplarische Situationen anstelle abstrakter Vorschriften verwendet. Im Codex Hammurabi findet man beispielsweise [11]:

§ 263

wenn ein Bürge[r] ein Rind oder ein Schaf, das ihm übergeben wurde, zugrunde gerichtet hat, so ersetzt er deren Eigentümer ein Rind entsprechend dem Rind, ein Schaf entsprechend dem Schaf.

Man kann vermuten, daß in der praktischen Rechtsprechung dieser Paragraph auch für einen Esel, ein Schwein oder eine Ziege – *mutatis mutandis* – angewandt wurde.

2.2 Die antike griechische Mathematik

In der griechischen Antike änderte sich der Umgang mit der Mathematik und generell die Art und Weise des Denkens, ganz besonders die Philosophie und damit auch das Weltbild wahrhaft dramatisch. Diese Zeit, deren Beginn man mit Thales von Milet (etwa 625 – etwa 547 v. Chr.) ansetzen kann, war einmalig in der Geschichte der Menschheit, in einem historischen Augenblick von wenigen Jahrhunderten (etwa von Thales $\approx$ 600 v. Chr. bis Aristoteles $\approx$ 300 v. Chr.) entstanden Philosophie und Mathematik im wesentlichen in ihrer heutigen Form. Karl Jaspers hat dieser Epoche den Namen „Achszeit“ gegeben.

Parmenides von Elea (515 – 445 v. Chr. (?)) und sein Schüler Zenon von Elea (490 v. Chr. (?) – 430 v. Chr.) setzten sich besonders mit dem Begriff des Unendlichen auseinander. Dies war ein revolutionärer Akt. In den älteren Kulturen ist ein solcher Begriff nicht denkbar. Die alten Ägypter und die alten Babylonier – wahrscheinlich auch die Hochkulturen Mittelamerikas – besaßen je eine „größte Zahl“, die den Ereignishorizont des Zählens markierte. Eine solche „große Periode“ des Maya-Kalenders hat unlängst in den bunten Illustrierten Spekulationen über den Weltuntergang am 21. Dezember 2012 Nahrung gegeben¹¹⁾.

Zenon von Elea hatte eine große Anzahl von Paradoxa angegeben, die darlegen sollten, daß der Begriff der Bewegung und des Unendlichen logisch widersprüchlich sei. Diese Paradoxa haben die Gemüter der Wissenschaftler bis zum heutigen Tage bewegt, und man kann sagen, daß etwas, was über zweieinhalb Jahrtausende bis zum heutigen Tage immer wieder „widerlegt“ worden ist, sicher nicht trivial sein kann.

Ich möchte in aller Kürze das Wesen der Zenonschen Paradoxa schildern, allerdings in einem „modernen“ Gewande, Zenons eigene Formulierungen sind verschollen, wir kennen seine Gedanken nur aus sekundären Quellen, die seine Schlüsse und seine Argumentation durchweg ablehnten¹²⁾.

Wenn man eine Strecke – bei Zenon die Strecke für den Wettlauf in einem Stadion – etwa der Länge 1 (sei es in Metern, in Schuh, in Kilometern oder Lichtjahren, das ist in der Welt der

¹¹⁾etwa „Das Geheimnis des Maya-Kalenders“ in *Funk Uhr* 46 vom 16. 11. 2009, S. 8–9 mit Bezug auf den Film „2012“ von Roland Emmerich.

¹²⁾Siehe zu diesem Thema das Manuskript des Verfassers „Die Schildkröte des Zenon von Elea – Gedanken eines Mathematikers zur Unendlichkeit“, Vortrag vor der Universitätsgesellschaft Hamburg am 13. November 2007, <http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/Zenon.pdf>.

Mathematik völlig unerheblich) betrachtet, dann kann man diese durch Halbieren in zwei Strecken der Länge $\frac{1}{2}$ zerlegen – oder besser sich als in zwei gleichlange Strecken zerlegt **denken**. Jede der halben Strecken kann man wieder unterteilen und erhält so vier Strecken je der Länge $\frac{1}{4}$. Weiteres Unterteilen liefert acht Strecken der Länge $\frac{1}{8}$ und so weiter. Hören wir irgendwann nach endlich vielen Schritten auf, dann haben wir eine Anzahl von Teilstrecken, deren Längen umso kürzer sind, je später wir aufhören, diese Längen sind aber immer noch positiv, das heißt, die Teilstrecken sind immer noch (möglicherweise sehr kurze) Strecken. Nun **denken** wir uns diesen Prozeß unbeschränkt fortgesetzt, bis es nicht mehr weiter geht. Was werden wir schließlich erhalten? Die Strecke zerfällt in eine – unendliche – Menge von Strecken der Länge Null, denn wenn die schließlich erhaltenen Teilstrecken positive Länge hätten, dann wäre der Prozeß des Unterteilens eben noch nicht vollendet. Strecken der Länge Null nennt man *Punkte*. Wir haben also das Resultat: Unsere Strecke ist in eine (unendliche) Menge von Punkten zerlegt.

Nachdem uns die Analyse so gut gelungen ist, machen wir uns an die Synthese. Dabei geht es uns wie dem ungeschickten Bastler, der eine Uhr zerlegt hat. Er hat schließlich eine große Menge von Rädchen und Schrauben, aber was auch immer er unternimmt, es wird daraus keine Uhr! Wenn wir zwei der Punkte zusammenlegen, dann erhalten wir eine Strecke der Länge $0 + 0 = 0$, also wieder einen Punkt. Genau das gleiche Resultat erhalten wir, wenn wir zehn, hundert, tausend, 10 Milliarden ... Punkte zusammenfügen. Immer wieder ergibt sich eine Strecke der Länge Null, denn man kann die Null noch so oft zu einer Null addieren, es kommt immer Null heraus. Irgendwo muß bei dem Zusammensetzen der Punkte aber ein „Qualitätssprung“ stattfinden, bei dem aus einem Punkt eine Strecke entsteht. Aber wann ist das der Fall? Man kann in der heutigen Mathematik zeigen, daß sogar unendlich viele Punkte (in einem präzisen Sinne) nicht ausreichen, die Strecke wieder zu erhalten. Andererseits kann es aber nicht sein, daß Punkte verschwunden sind. Wir können jedem Punkt der Strecke eine Zahl zuordnen, etwa seinen Abstand vom linken Streckenende.

Man könnte jetzt physikalisch argumentieren: Die Analyse war schon falsch, denn man kann einen real existierenden Körper eben nicht unbegrenzt zerlegen, irgendetwann kommt man auf unzerlegbare Teile, seien es Atome oder sei die „Planck-Länge“ erreicht, die dadurch definiert ist, daß sie die kleinste Strecke ist, für die der Begriff der Länge noch sinnvoll ist. Hiergegen ist einzuwenden, daß wir uns bei diesen Überlegungen in der Welt der Mathematik befinden, und dort gibt es keine Atome, wohl aber Strecken und Punkte. Wäre der „physikalische“ Einwand berechtigt, dann hätten wir durch reines Überlegen, ohne irgendeinen Rekurs auf die Natur, durch das Zenonsche Paradoxon gezeigt, daß es Atome geben muß! Übrigens war dies – die atomische Struktur der Welt – der Einwand der Atomisten gegen Zenon und Parmenides.

Vielleicht noch eine Kostprobe eines Zenonschen Paradoxons, welches mit dem genannten eng verwandt ist: Wenn man einen fliegenden Pfeil beobachtet, der sich, von der Sehne abgeschoßen, einem Ziel nähert, dann kann man ebenso wie oben die Zeitspanne vom Abschuß bis zum Auftreffen am Ziel in Zeit-Punkte zerlegen. In jedem (idealen, mathematischen) Zeitpunkt hat man das gleiche Bild: Man sieht – wie auf einer Momentaufnahme – einen Pfeil, der sich **nicht** bewegt. Jede Untersuchung des Pfeils in einem solchen Zeitpunkt – sei sie nun physikalisch, chemisch oder mathematisch – liefert die gleiche Aussage: Der Pfeil bewegt sich nicht! Man kann also – so Zenon – sagen, daß sich der Pfeil in keinem der Zeitpunkte vom Abschuß bis zum Auftreffen am Ziel bewegt, er bewegt sich also nie! Wie kommt es dann zur Bewegung?

Diese Argumentation – und andere ähnliche von Zenon – hat, wie schon erwähnt seit Zenon Zeit bis heute die unterschiedlichsten Reaktionen hervorgerufen, von ärgerlicher Ablehnung (Charles Peirce: ... alberne kleine Täuschung [32, S. 13]) bis zu begeisterter Bewunderung, etwa bei Bertrand Russell (1872 – 1970) [31, p. 347]:

327. In this capricious world, nothing is more capricious than posthumous fame. On of the most notable victims of posteriority's lack of judgement is the Eleatic Zeno. Having invented four arguments, all immeasurably subtle and profound, the grossness of subsequent philosophers pronounced him to be a mere ingenious juggler, and his arguments to be one and all sophisms. After two thousand years of continual refutation, these sophisms were reinstated, and made the foundation of a mathematical renaissance, by a German professor, who probably never dreamed of any connection between himself and Zeno. Weierstrass, by strictly banishing all infinitesimals, has at last shown that we live in an unchanging world, and that the arrow, at every moment of flight, is truly at rest. The only point where Zeno probably erred was in inferring (if he did infer) that, because there is no change, therefore the world must be in the same state at one time as at another.

Das Pfeilparadoxon hat noch im neunzehnten Jahrhundert Friedrich Engels (1820 – 1895) bewegt, und er findet – natürlich – eine „dialektische“ Auflösung des Paradoxons [6, S. 146 f.]:

Die Bewegung selbst ist ein Widerspruch; sogar schon die einfache mechanische Ortsbewegung kann sich nur dadurch vollziehen, daß ein Körper in einem und demselben Zeitmoment an einem Ort und gleichzeitig an einem andern Ort, an einem und demselben Ort und nicht an ihm ist. Und die fortwährende Setzung und gleichzeitige Lösung dieses Widerspruchs ist eben die Bewegung.

Auf jeden Fall haben Zenons Paradoxa auf die Philosophen seiner Zeit wie ein Schock gewirkt. Man lernte aus ihnen, daß es mit Gefahren verbunden ist, das Unendliche argumentativ zu verwenden – hier etwa die Zerlegung, deren unendliche Fortsetzung als abgeschlossen vorliegend gedacht ist. Aristoteles von Stagira (384 – 322 v. Chr.) verbot kurzerhand die Beschäftigung mit dem Unendlichen. Er konnte sie allerdings nicht ganz verbieten, wie schon erwähnt, wußten die Griechen zum Beispiel, daß keine größte Zahl existiert, daß es also, modern gesprochen, unendlich viele Zahlen gibt. Aristoteles unterschied daher zwischen dem *potentiell Unendlichen*, eben jenem Unendlichen, das entsteht, wenn man einen Prozeß – wie etwa das Zählen – unbeschränkt fortgesetzt denken kann. Diese einfache Unendlichkeit wurde von Aristoteles erlaubt. Demgegenüber ist das *aktual Unendliche*, also die gedankliche Vollendung eines solchen Prozesses den Göttern vorbehalten und dem Menschen nicht erlaubt. Aristoteles machte also das, was eine verantwortungsbewußte Bergwacht mit einem durch die Schneeschmelze zerstörten Steig macht: Sie stellt Verbotsschilder auf.

2.3 Euklid

Ich komme jetzt endlich zu „richtiger“ Mathematik. Euklid von Alexandria (365 (?) – 300 v. Chr. (?)) stellte das mathematische Wissen seiner Zeit in den dreizehn Büchern seiner „Elemente“ dar. Nicht alle dort aufgeführten Resultate gehen wirklich auf Euklid zurück und nicht alle dreizehn Bücher stammen von ihm. Auf jeden Fall ist es ihm aber gelungen, durch die systematische Darstellung, durch die Zurückführung auf einfachste „Axiome“ (in heutiger Sprechweise) und durch stringente Beweisführung Maßstäbe zu setzen, die seine Bücher bis ins zwanzigste Jahrhundert hinein als Schullektüre brauchbar machten.

Ein Beispiel für die Wirkung Euklids über die Jahrtausende wird durch den englischen Philosophen Thomas Hobbes (1588 – 1679) gegeben. Sein Biograph, John Aubrey berichtet etwas weitschweifig, aber anschaulich [3, p. 332 f.] (Fußnoten von Aubrey):

** He was (vide his life) 40 yeares ^f old before he looked on geometry; which happened accidentally. Being in a gentleman's library in . . . , Euclids Elements lay open, and 'twas the 47 El.^g libri I. He read the proposition. 'By [†] G—,' sayd he 'this is impossible!' So he reads the demonstration of it, which referred him back to such a proposition; which proposition he read. That referred him back to another, which he also read. Et sic deinceps, that at last he was demonstratively convinced of that trueth. This made him in love with geometry.

I have heard Sir Jonas Moore (and others¹³) say that 'twas a great pity he had not began the study of the mathematics sooner, for such a working head^a would have made a great advancement in it. So had he donne^b, he would not have layn so open to his mathematical antagonists^c. But one may say of him, as one (quaere who) sayes of Jos. Scaliger, that where he erres, he erres so ingeniously, that one had rather erre with him then hitt the mark^d with Clavius. I have heard Mr. Hobbes say* that he was wont to draw lines^e on his thigh and on the sheetes, abed, and^f also multiply and divide. He would often complain that algebra[†] (though of great use) was too much admired, and so followed after, that it made men not contemplate and consider so much the nature and power of lines, which was a great hinderance to the groweth of geometrie; for that though algebra did rarely well and quickly, and easily in right lines, yet 'twould not bite in *solid* (I thinke) geometrie. Quod N.B.

** Memorandum — After he began to reflect on^g the interest of the king of England as touching his affaires between him and the parliament, for ten yeares together his thoughts were much, or almost altogether, unhinged from the mathematiques; but chiefly intent on his *De Cive*, and after that on his *Leviathan*: which was a great puttback to his mathematicall improvement^h — quod N.B. — for in then yeares' (or better) discontinuance of that study (especially) one's mathematiques will become very rustyⁱ.

Sehr viel lakonischer schreibt Hobbes selbst [3, p. 396]:

Anno sequente, qui erat Christi 1629, cum attigisset annum quadragesimum, rogatus a nobilissimo viro domino Gervasio Clinton ut vellet filium adolescentem suum comitari

Footnotes for p. 332:

** MS. Aubr. 9, fol. 36.

[†] He would now and then sweare, by way of emphasis^h.

^fAnthony Wood writes here 'do you not mean 40?' Aubrey had written '4' by a pen-slip; afterwards he corrected it.

^g'Element' used for 'proposition'.

^hSubst. for 'He would now and then use an emphaticall oath.'

¹³ (P. 332.) In MS. Aubr. 6, fol. 1^v, this note: — 'Dr. (John) Pell says that for a man to begin to study mathematics at 40 yeares old, 'tis as if one should at that age learne to play on the lute — applicable to Mr. Thomas Hobbes. Vide vitam Jonae Moore.'

Footnotes for p. 333:

^aDupl. with 'curios witt.

^b'Began it early' is written over, in explanation.

^cDupl. with 'to the witts.'

^dDupl. with 'then doe well.'

*MS. Aubr. 9, fol. 37.

^e'In his bed' followed, scored out.

^fDupl. with 'as.'

**MS Aubr. 9, fol 36^v.

^gDupl. with 'study.'

^hDupl. with 'knowledge.'

ⁱDupl. with 'rubiginous.'

in Galliam, accepit conditionem. In peregrinatione illa inspicere coepit in elementa Euclidis; et delectatus methodo illius non tam ob theoremata illa quam ob artem rationandi diligentissime perlegit.

Es ist schon höchst bemerkenswert: Nach einem Zeitraum von immerhin fast zweitausend Jahren trifft die Lektüre Euklids Hobbes wie der „Schlag des Zitterrochens“ (nach Platons *Menon*). Es gibt wohl kaum ein Buch auf der Welt, welches eine solche Langzeitwirkung besitzt, sieht man von der Bibel ab. Wir sehen uns jetzt zwei Beispiele aus Euklids Buch an.

2.3.1 Der Primzahlsatz

Eine Primzahl ist eine Zahl, das heißt hier eine *natürliche Zahl*, also einer der Zahlen $1, 2, 3, \dots$, die nicht (ohne Rest) durch eine von ihr selbst und Eins verschiedene Zahl geteilt werden kann. Zum Beispiel ist 7 eine Primzahl, denn sie ist nur durch 1 und 7 teilbar, 12 ist keine Primzahl, denn sie ist durch 2, 3, 4 und 6 (und natürlich durch 1 und 12) teilbar. Euklid bewies nun, daß es unendlich viele solcher Primzahlen geben muß. Bemerkenswert ist, daß in Euklids Originaltext das Wort „unendlich“ nicht auftaucht. Aristoteles lebte etwa zeitgleich mit Euklid, aber das Verbot des Unendlichen „lag in der Luft“.

Wir sehen uns zuerst einmal den Originaltext von Euklid an [9, S. 204]:

Neuntes Buch

§20 (L. 18).

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die vorgelegten Primzahlen seien a, b, c . Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als a, b, c .

$a \quad - \quad - \quad - \quad b \quad - \quad - \quad - \quad c \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$
 $E \quad - \quad - \quad - \quad D \quad F \quad g \quad - \quad -$

Man bilde die kleinste von a, b, c gemessene Zahl (VII, 36); sie sei DE , und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist EF

dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als a, b, c , nämlich a, b, c, EF .

Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muß es von irgendeiner Primzahl gemessen werden (VII, 31); es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, daß g mit [205] keiner der Zahlen a, b, c zusammenfällt. Wenn möglich tue es dies nämlich. a, b, c messen nun DE ; auch g müßte dann DE messen. Es mißt aber auch EF . g müßte also auch den Rest, die Einheit DF messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammen; und es ist Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, g — q. e. d.

Was geht hier vor? In moderner Sprechweise argumentiert Euklid so: Gesetzt, es gebe nur endlich viele Primzahlen. Dann könnte man diese vollständig etwa in eine Liste schreiben [a, b, c im Text]. Nun bilden wir das Produkt aller dieser Primzahlen [DE] und addieren 1, das heißt, [DF] hinzu. Wir betrachten die so erhaltene Zahl [EF]. Diese Zahl ist entweder eine Primzahl, dann

wäre unsere Liste nicht vollständig, denn diese Zahl ist sicher nicht in unserer Liste enthalten. Da wir aber die Liste als vollständig angenommen hatten, liegt ein Widerspruch vor, das heißt, unsere Ausgangsannahme, daß die Liste alle Primzahlen enthalte, muß falsch gewesen sein.

Nun nehmen wir also an, daß EF keine Primzahl sei. Dann hat sie einen echten Teiler g , das heißt, g ist von EF und 1 verschieden, und wir dürfen annehmen, daß g seinerseits Primzahl sei (sonst dividieren wir die Zahl g durch einen ihrer echten Teile und so fort, bis wir schließlich bei einer Primzahl landen, die dann auch echter Teiler von EF ist; dieser Schluß muß noch bewiesen werden, der Beweis ist einfach, wir setzen ihn hier einmal als geführt voraus). g kann aber mit keiner der Zahlen der Liste identisch sein, denn wenn man EF durch eine der Zahlen der Liste dividiert, dann bleibt – nach Konstruktion – der Divisionsrest 1. Damit muß g eine Primzahl sein, die nicht in der Liste aufgeführt ist, und dies widerspricht der Vollständigkeit der Liste.

Bemerkenswert ist hier die Argumentation von Euklid. Der moderne Logiker Lorenzen [20] schlägt vor, logische Deduktionen in Form eines „Rechtsstreits“ zu behandeln. Man hat hier einen *Proponenten*, der behauptet, es gebe keine endliche vollständige Liste von Primzahlen und einen *Opponenten*, der das Gegenteil behauptet. Der Proponent geht hier erst einmal zum Schein auf das Argument des Opponenten ein: „Laß’ uns für einen Moment annehmen, du habest Recht, es gebe also nur eine endliche Anzahl von Primzahlen. Dann könnte man diese soch sicher in einer – möglicherweise sehr umfangreichen – Liste vollständig aufführen.“ Die Argumentation wird so weit fortgesetzt, bis man bei einem Widerspruch angelangt ist. Ein Widerspruch kann aber in einem logischen System nicht zugelassen werden – darüber später mehr – und es bleibt dem Opponenten nur ein Ausweg, nämlich zuzugeben, daß die Ausgangsannahme falsch war.

2.3.2 Die Euklidischen Axiome der Geometrie

Die größte Leistung Euklids ist die *Axiomatik*. Euklid stellte an den Beginn seiner Mathematik eine saubere Aufzählung derjenigen Tatsachen, die er als Grundlage seiner Beweisführungen voraussetzt. Diese *Postulate* oder, nach heutigen Sprachgebrauch *Axiome* bedürfen des Beweises nicht. Man findet zahlreiche Darstellungen, in denen die Axiome als „unmittelbar evident“ bezeichnet werden, jedoch trifft dies ihre Funktion nicht, sie sind vielmehr die „Spielregeln“ des „Spiels“ Mathematik. Die Regeln des Schachspiels bedürfen ebensowenig einer „ontologische“ Begründung, welches Pferd springt wohl in Springerzügen einher? Solche Regeln sind nahezu völlig willkürlich, man könnte sie auch anders festlegen (nur sollte man das Spiel dann nicht „Schach“ nennen).

Wir sehen wieder bei Euklid nach. Die berühmten Euklidischen Axiome, welche die Geometrie begründen, sind [9, S. 419 ff.] (Fußnoten ebenda):

Gefordert sein soll

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,¹³⁾
2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,¹⁴⁾

¹³⁾[S. 419] **Post. 1.** Statt „die“ läßt sich auch „eine Strecke“ übersetzen – das Fehlen des Artikels im Griechischen hat nicht dieselbe Bedeutung wie im Deutschen; doch hebt Proklos ausdrücklich hervor, die Fassung des Satzes schließe die Eindeutigkeit ein. Vom Lineal wird nicht gesprochen, ebensowenig später vom Zirkel.

¹⁴⁾[S. 419] **Post. 2** soll nach Proklos wieder die Eindeutigkeit der durch Verlängerung der Strecke entstehenden Geraden festlegen; trotzdem versucht er die Eindeutigkeit zu beweisen unter Benutzung des Schlusses von I, Def. 17, der dadurch den Wert eines Postulats erhalte; ein verwandter Beweisversuch im Raum findet sich sogar bei Euklid selbst XI, 1, wobei freilich die Möglichkeit, daß die Stelle eingeschoben ist, besteht. Gebraucht wird die Tatsache der Eindeutigkeit schon in I, 1.

3. *Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis ziehen kann,*¹⁵⁾
4. *(Ax. 10) Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*¹⁶⁾
5. *(Ax 11) Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die zwei Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*¹⁷⁾

Ich möchte hier diese Axiome nicht ausführlich kommentieren, sondern nur auf drei Dinge hinweisen:

- Nirgends in den Axiomen ist von Unendlichem die Rede, insbesondere spricht Euklid niemals von *Geraden*, das heißt, von beiderseits unendlichen Gebilden, sondern von *Strecken*, oder *geraden Linien* im Sinne von endlichen Geradenstücken.
- Die ersten vier Axiome sind lakonisch, knapp und wirklich selbstverständlich. Sie bedürfen keines Kommentars.
- Es ist in den Axiomen nicht von Zirkel oder Lineal die Rede, wie in manchen Publikationen über Geometrie. Euklid abstrahiert so weit wie nur möglich von den Realitäten der „Welt“ und siedelt seine Konstrukte ganz bewußt im Reiche der Mathematik an.

Das fünfte Axiom ist in mehrfacher Hinsicht „verdächtig“. Zum einen macht es zu viele Worte. Man gewinnt den Eindruck, daß hier um etwas herumgeredet wird, im klaren Gegensatz zu den ersten Axiomen. Dieser linguistische Einwand ist natürlich kein mathematisch brauchbares Argument, rechtfertigt vielleicht nur ein gewisses Unbehagen.

Weiterhin: In zahlreichen – manchmal auch seriös gemeinten – Darstellungen wird dieses Axiom auch als „Parallelenaxiom“ apostrophiert. Es fällt auf, daß bei Euklid das Wort „Parallele“ nicht auftritt. Es wird häufig auch noch gesagt, daß Parallele zwei Geraden sind, die sich nicht schneiden. Nach allem, was wir nun wissen, hätte Euklid eine solche Charakterisierung noch nicht einmal denken wollen. Was heißt es, daß sich zwei Geraden nicht schneiden? Das heißt, das man, wie weit sie man auch immer verfolgt, niemals einen Schnittpunkt finden wird. wenn

¹⁵⁾[S. 419] **Post. 3** fordert weniger als üblich; der Radius geht vom Mittelpunkt aus. Die Konstruierbarkeit des Kreises aus Mittelpunkt und getrennt gegebenem Radius wird erst in I, 2 auf dieses Postulat zurückgeführt.

¹⁶⁾[S. 419] **Post. 4** hätte nach einer von Zeuthen aufgestellten, später allerdings geänderten Ansicht den Zweck, die Eindeutigkeit der Streckenverlängerung (unbestimmter Länge) zu sichern. Nimmt man dies nicht an, so ist die Einordnung dieses Satzes unter die Postulate schwer zu rechtfertigen; Proklos führt einen Deckungsbeweis. Vermutlich wird die Tatsache, daß der rechte Winkel durch seine Unveränderlichkeit sich als Maß eignet, hier festgelegt als Vorbereitung auf das folgende Postulat.

¹⁷⁾[S. 419] **Post. 5** wird, obwohl die guten Handschriften und die alten Kommentare es an dieser Stelle bringen, in den älteren gedruckten Ausgaben als **11. Axiom** geführt. Herangezogen wird es zuerst in I, 29, dort, um die Existenz eines Schnittpunktes zu sichern, also als Postulat, nicht als Axiom.

Der Satz hat nicht das unmittelbar Einleuchtende der übrigen Grundsätze; so hat man, zumal man ihn als Umkehrung eines beweisbaren Satzes (I, 28) erkannte, seit dem Altertum immer [420] wieder versucht, ihn zu beweisen. Dies gelang nur bei Ausrückung gewisser anderer Grundsätze. Von diesen haben manche, z. B. Wallis' Forderung der Existenz ähnlicher Figuren, den Vorzug größerer Anschaulichkeit; an logischem Wert übertrifft das Euklidische Postulat, in dem nur die Angabe der Seite des Treffens wegen I, 16 überflüssig ist (Dijksterhuis), die meisten Ersatzpostulate, wird von keinem übertroffen.

Die Notwendigkeit eines Parallelenpostulats zur sicheren Fundierung der damals anerkannten Geometrie klar erfaßt zu haben, ist wahrscheinlich Euklids persönliches Verdienst. Die Nichteuklidischen Geometrien sind entstanden aus der durch vergebliche Beweisversuche vorbereiteten Erkenntnis der Unbeweisbarkeit des Euklidischen Postulats.

man also – wie in dem Gedicht über die zwei Parallelen von Christian Morgenstern – die beiden Geraden über einige Lichtjahre verfolgt hat und feststellt, daß sie sich auf dieser Strecke nicht geschnitten haben, dann ist diese Feststellung völlig belanglos, denn nach Verlauf des folgenden Lichtjahres könnten sie sich durchaus noch schneiden. Das heißt, wenn man **definiert**, Parallelen sind Geraden, die sich nicht schneiden, dann ist diese Definition nicht brauchbar, weil nicht nachprüfbar. Euklid definiert später Parallelen als Geradenpaare, bei denen die Winkelsumme bei Schnitt mit einer geraden Linie gerade gleich zwei Rechten ist. Er **beweist** dann, daß sich solche Geradenpaare nicht schneiden können.

Bemerkenswert an diesem Axiomensystem ist, daß es *widerspruchsfrei* ist, das heißt, aus den Axiomen läßt sich kein Widerspruch der Form „Die Aussage A läßt sich durch erlaubte logische Schritte aus dem System herleiten; Die Aussage, NICHT A läßt sich durch erlaubte logische Schritte herleiten“ erzeugen. Wir werden dies später noch genauer untersuchen. Auf jeden Fall wäre ein nicht widerspruchsfreies Axiomensystem wertlos.

Weiterhin ist das Euklidische Axiomensystem *minimal*. Man kann keines der ersten vier Axiome aus den anderen drei herleiten. Anders ist es mit dem fünften Axiom. Seit Euklids Zeiten haben zahllose Mathematiker vergeblich versucht, das fünfte Axiom aus den anderen herzuleiten. Erst in der Neuzeit gelang es Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Nikolai Iwanowitsch Lobaschewski (1792–1856) und János von Bolyai (1802–1860), zu zeigen, daß das Parallelenaxiom tatsächlich unabhängig von den anderen Axiomen ist. Das heißt, man kann das Axiom den anderen hinzufügen und erhält dann die bekannte Euklidische Geometrie, man kann es aber auch weglassen und erhält dann die Nichteuklidischen Geometrien, die, wie erwähnt, in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielen.

Bemerkenswert ist, daß dieses innermathematische Resultat Rückwirkungen auf die Philosophie hatte. Immanuel Kant (1724–1804) hatte die Frage gestellt: Wie sind synthetische Urteile a priori möglich? Seine Antwort war, daß unsere reinen Anschauungen von Raum und Zeit synthetisch a priori sind.

Nachdem Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie für unser Universum negiert hatte, wurde Kritik an diesen Vorstellungen Kants laut, da Kant von der Euklidischen Geometrie als Grundlage unserer Raumvorstellungen ausging. Mir erscheinen solche Vorwürfe als zumindest vorschnell. Wir haben zum Beispiel die angeborene Fähigkeit, Parallelen zu „sehen“ („Das Bild hängt schief“). Es ist nicht leicht einsehbar, welchen Evolutionsvorteil die Fähigkeit darstellt, Geraden – auch unterbrochene kollineare Geradenstücke, das heißt, auf einer gemeinsamen Geraden liegend – mit hoher Genauigkeit wahrzunehmen und sensibel auf Abweichungen von der Parallelität (und auch von der Rechtwinkligkeit) zu reagieren.

Man findet bei Euklid noch eine Reihe von Aussagen, die von ihm als *Axiome* bezeichnet werden, wie etwa, daß das Ganze größer ist als sein Teil. Derartige Aussagen werden heute mit Vorsicht behandelt. Friedrich Engels hat heftig gegen dagegen polemisiert [6, S. 46]:

Die mathematischen Axiome sind die Ausdrücke des höchst dürftigen Gedankeninhalts, den die Mathematik der Logik entlehnen muß.

Allerdings hatte Engels – trotz seiner recht intensiven Bemühungen um die Mathematik, die nach eigenem Bekunden „den Teil von acht Jahren“ [6, S. 10] umfaßten – wohl nur sehr nebelhafte Vorstellungen von Mathematik.

Euklid formuliert auch *Definitionen*, etwa „Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat“ [9, S. 418], die ebenfalls vielfach Anlaß zu Mißverständnissen gegeben haben. In der modernen, „stromlini-

enförmigen“ Mathematik wird man derartige Definitionen nicht finden, auch hierauf gehen wir später noch ein.

Anhang: Einige Kostproben mathematischen Denkens

A Eine Aufgabe von Emil Artin

Die folgende Aufgabe wird dem Mathematiker Emil Artin (1898 – 1962) zugeschrieben (siehe etwa [40, S. 76], [43, Nr. 89]). Artin war einer der bedeutendsten Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts und lehrte (auch) in Hamburg. Die Aufgabe zeigt sehr schön, was Mathematik ist: Anstelle von blindem Probieren die überraschende Idee, die zum Ziele führt. Gerade wegen dieser Fähigkeit, die „richtige“ Idee zu haben, sind Mathematiker in der Industrie als „Problemlöser“ oder als Berater sehr beliebt.

Hier ist die Aufgabe: Wenn man ein Feld, welches aus 8×8 Quadraten in der Art eines Schachbretts zusammengesetzt ist, mit 1×2 -Dominosteinen lückenlos und vollständig überdecken möchte, dann ist dies kein Problem (siehe Abbildung 4). Man überdeckt beispielsweise mit vier Dominosteinen (hochkant) die erste Spalte des Bretts, danach ebenso die zweite und so weiter.

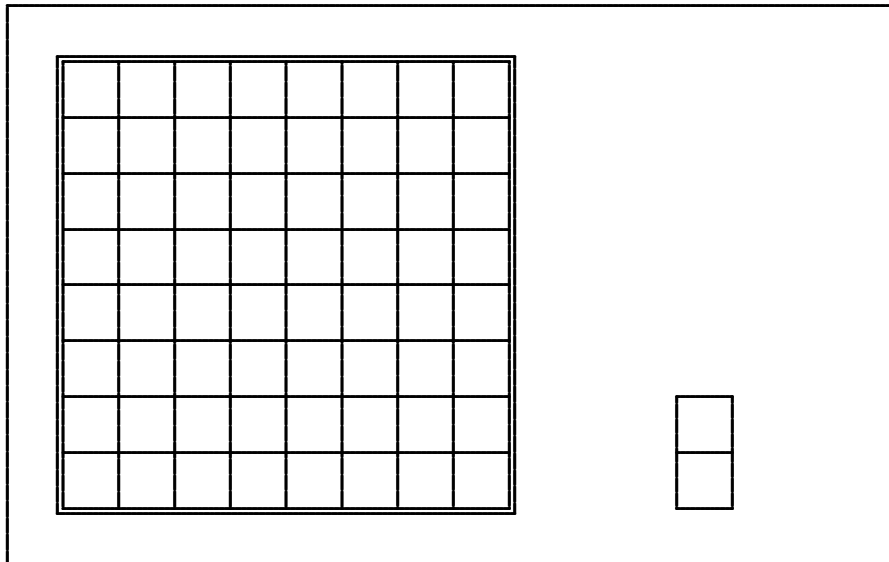


Abbildung 4: Kann man das 8×8 -Feld mit 1×2 -Dominosteinen vollständig und lückenlos überdecken?

Nun wird die Aufgabe leicht modifiziert: Von dem 8×8 -Feld werden zwei einander gegenüberliegende Felder herausgeschnitten. Wie sieht die Lösung der Aufgabe nun aus? (Abbildung 5).

Hier hilft Probieren nichts! Man kann nämlich zeigen, daß die Aufgabe **keine** Lösung hat. Das heißt, ein Mißerfolg beim Probieren besagt ja nur, daß man die „richtige“ Lösung nur noch nicht gefunden hat. Was wir jetzt brauchen, ist eine gute Idee!

Hier ist diese Idee: Man denke sich die Felder des Bretts nach Art eines Schachbretts abwechselnd gefärbt (Abbildung 6).

Wenn man nach Vorbild der Abbildung einfärbt, dann wird alles sehr einfach. Man hat 32 gefärbte Felder und 30 ungefärbte. Jeder Dominostein überdeckt aber ein gefärbtes und ein ungefärbtes Feld. Damit ist gezeigt, daß die Aufgabe nicht lösbar sein kann.

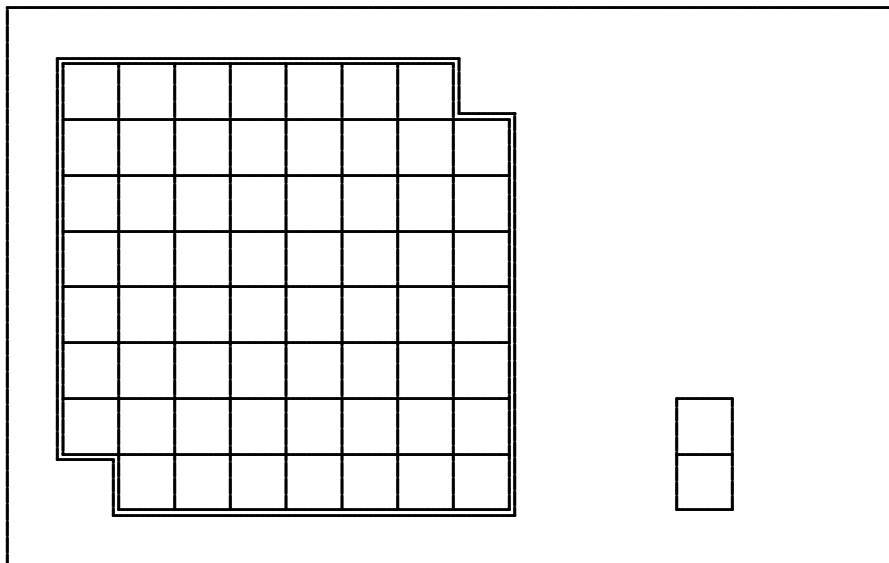


Abbildung 5: Kann man auch dieses Feld mit 1×2 -Dominosteinen vollständig und lückenlos überdecken?

Das Besondere an dieser Aufgabe ist, daß hier bewiesen wird, daß die Aufgabe **nicht** lösbar ist, es wird also die Nichtexistenz eines Objekts, nämlich einer Lösung, nachgewiesen. Auf ähnliche Weise kann man leider nicht zeigen, daß Einhörner nicht existieren!

B Ein Betrüger beim Juwelier

Die folgende Aufgabe ist ein „Evergreen“ unter den Scherzaufgaben. Es gibt sie in unzähligen Varianten. Die vorliegende Form und ihre Lösung stammt aus einem Buch von Wolff aus dem Jahre 1929 [41, S. 158]. Ich habe den Text nicht modernisiert, also beispielsweise Mark durch Euro ersetzt – weil die Aufgabe so auch ein hübsches, wenn auch etwas angestaubtes historisches Dokument ist. Besonders die von Wolff angegebene Lösung ist in ihrer Formulierung bemerkenswert.

Zu einem Juwelier kam ein Herr, der ein Armband zu kaufen wünschte. Der Juwelier legte ihm mehrere Stücke zur Auswahl vor, und der Herr entschied sich schließlich für ein Armband im Preise von 60 Mark. Zur Bezahlung gab er dem Juwelier einen Hundertmarkschein. Der Juwelier hatte kein Kleingeld in der Kasse und schickte daher den Lehrling mit dem Hundertmarkschein zum Nachbar mit der Bitte, den Schein zu wechseln. Der Lehrling kam mit dem Wechselgeld zurück, der Juwelier packte dem Käufer das Armband ein, gab ihm auf die gezahlten 100 Mark noch 40 Mark heraus, und der Käufer verließ den Laden. Nach einer Stunde kam jedoch der Nachbar, der den Hundertmarkschein gewechselt hatte, behauptete, daß der Hundertmarkschein falsch wäre und verlangte Ersatz. Der Juwelier überzeugte sich von der Richtigkeit der Behauptung und mußte dem Nachbar schweren Herzens die 100 Mark zurückzahlen. Wie groß war der gesamte Schaden, den der Juwelier bei dem Geschäft gehabt hatte.

Lösung (S. 163 f.)

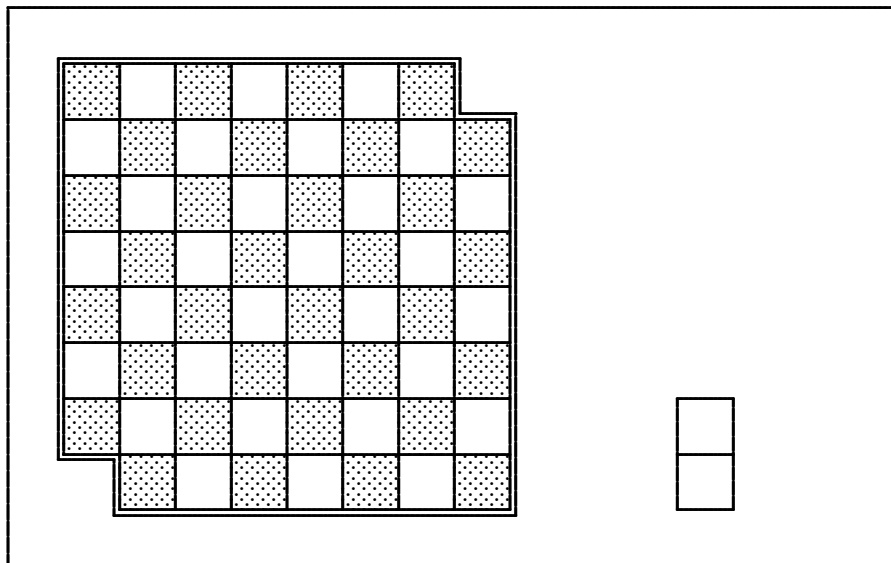


Abbildung 6: Die Lösungsidee.

Die Aufgabe ist ein schönes Beispiel für einen Trugschluß bei der Modellierung: Es wird perfekt richtig gerechnet, aber mit für die Lösung bedeutungslosen Zahlen. Es gab einmal ein Werbeposter der Firma IBM mit der Aufschrift: *Wer einem Computer Unsinn erzählt, muß immer damit rechnen.* Hier der Text von Wolff:

Der Schaden des Juweliers beträgt 100 Mark. Denn er selbst hatte bei dem Geschäft zunächst 100 Mark eingenommen, nämlich die 100 Mark, die ihm der gefällige Nachbar für den falschen Hundertmarkschein gab, hat selbst aber fortgegeben das Armband im Werte von 60 Mark, die 40 Mark, die er dem faulen Kunden bei dem Kauf noch bar herausgab, und endlich 100 Mark, die er dem Nachbarn erstatten mußte, zusammen 200 Mark, so daß er bei dem Geschäft 100 Mark eingebüßt hat, nicht mehr und nicht weniger. Trotzdem wird der Schaden des Juweliers oftmals auch anders angegeben, und nach einer Veröffentlichung dieser Aufgabe in einem Unterhaltungsblatt erhielt ich mehrere Dutzend von Zuschriften, in denen die mitgeteilte Lösung für falsch erklärt wurde. Mit merkwürdiger Übereinstimmung rechneten die meisten der Einsender mir vor: Wert des gelieferten Armbandes 60 Mark; herausgegebenes Wechselgeld 40 Mark; Einlösung des falschen Hundertmarkscheines 100 Mark, macht zusammen 200 Mark! Wer hat also recht? Nun, der Widerspruch ist ohne Schwierigkeit zu lösen. Alles, was in jener Gegenrechnung angeführt worden ist, stimmt, nur haben die Herren Kritiker vergessen, die 100 Mark in Rechnung zu stellen, die der Juwelier von dem gefälligen Nachbarn für den falschen Schein erhalten hatte. Diese 100 Mark von dem eben berechneten Betrage von 200 Mark in Abzug gebracht, bleiben wiederum nur 100 Mark Schaden des Juweliers übrig; es wird beim besten Willen nicht mehr. In ähnlicher Weise rechnen andere Opponenten immer einen Posten zuwenig oder zuviel. Der Direktor einer Aktiengesellschaft rechnete mir haarscharf vor, daß der Schaden des Juweliers 140 Mark betrage, und ein Einsender gab das Höchstgebot mit 360 Mark angeblichen Schadens des Juweliers ab. Man kann übrigens die Lösung der Aufgabe auch gänzlich ohne Rechnung, auf rein logischem Wege, finden, wenn man sich folgendes vergegenwärtigt: Wäre der Hundertmarkschein echt gewesen, so hätte der Juwelier natürlich überhaupt keinen Schaden gehabt, also kann sein Schaden natürlich nur so groß sein wie der Nominalbetrag des falschen Hundertmarkscheins. Oder man kann auch schließen: Der diebische Käufer hat bei der Sache gerade 100 Mark, nämlich das Armband von

60 Mark und 40 Mark bar, ergattert, und mehr als dieser durch Betrug sich angeeignet hat, kann natürlich der Schaden des Betrogenen nicht sein. Manche Unzufriedene endlich halten der Lösung noch entgegen, daß der Schaden des Juweliers weniger als 100 Mark betragen habe, weil davon der Verdienst, der in dem Verkaufspreis von 60 Mark für das Armband eingerechnet ist, in Abzug gebracht werden müsse. Auch dieser Einwand ist nicht stichhaltig, denn der Juwelier hat durch den Diebstahl nicht nur das, was ihm das Armband selbst gekostet hat, sondern natürlich auch den Verdienst verloren, den er bei regulärem Verkauf des Stückes erzielt haben würde. Also, es bleibt bei den 100 Mark Schaden!

C Die Königsberger Brücken

Diese Aufgabe ist ein berühmter „Klassiker“. Ihre Lösung wurde von dem großen Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783) gefunden. Die Stadt Königsberg liegt an dem Fluß Pregel. Durch den Fluß wird die Stadt in vier Teile geteilt. Zwischen den einzelnen Stadtteilen gibt es sieben Brücken, wie in Abbildung 7.a) dargestellt ist. Es war nun im Jahre 1736 – also vor über 250 Jahren – die Aufgabe gestellt worden, einen Spazierweg durch Königsberg zu finden, der über jede der Brücken führt, dabei darf aber keine mehr als einmal überschritten werden.

Man könnte jetzt einen Stift nehmen und einfach ausprobieren, ob man einen solchen Spazierweg finden kann. Wenn es einen solchen Weg gibt, dann wird man ihn auch sicherlich irgendwann durch Probieren finden. Allerdings, man muß unter Umständen, je nach Geschick, schon eine große Zahl von möglichen Wegen untersuchen. Außerdem halten wir Mathematiker eine Lösung, die durch einfaches Ausprobieren gefunden wird, für nicht besonders schön. Und was ist, wenn es *keinen* solchen Weg gibt? Das könnte man auf diese Weise niemals herausfinden.

Euler war einer der größten Mathematiker seiner Zeit. Er hat auch hier eine hervorragende Idee gehabt, die für die Mathematik nachhaltige Folgen hatte. Er hat nachgedacht und dabei zuerst einmal festgestellt, daß es bei dieser Aufgabe nicht darauf ankommt, wie genau man sich in den Stadtteilen bewegt, ob man auf geradem Weg der Brücke zueilt oder längs der Straßen geht oder aber vielleicht noch einen kleinen Rundgang einlegt. Wirklich wichtig ist nur, über welche Brücke man schließlich den Fluß überquert.

In Abbildung 7.b) sind die möglichen geraden Wege von einem festen Punkt eines jeden Stadtteils zur jeweils nächsten Brücke eingezeichnet. Als zweite Überlegung: Es ist nun nicht mehr so wichtig, wie der Fluß zwischen den Brücken genau verläuft, wir können ihn uns also auch „wegdenken“. Es bleiben dann allein die Brücken und die vier festen Punkte in den Stadtteilen. (Abbildung 7.c)).

Jetzt können wir auch noch die geknickten Wege durch gerade Linien ersetzen, wir müssen uns nur merken, daß zu jeder geraden Linie in Abbildung 7.c) eine Brücke gehört. Damit erhalten wir die nun schon sehr übersichtliche Abbildung 7.d).

Betrachten wir nun einmal den Punkt 4 der Abbildung. In diesen Punkt münden drei Wege ein, das heißt, dieser Stadtteil ist über drei Brücken mit den anderen Stadtteilen verbunden. Wenn wir „irgendwie“ zu diesem Stadtteil kommen, dann haben wir eine Brücke überschritten. Wenn wir dann den Stadtteil verlassen, dann ist das nur über eine zweite Brücke möglich. Es verbleibt also nur noch eine Brücke, die noch nicht benutzt wurde. Wenn wir diese irgendwann benutzen, dann sind wir auf dem Stadtteil 4 „gefangen“, denn alle drei Brücken wurden dann schon benutzt. Man könnte sich natürlich vorstellen, daß unsere Wanderung im Stadtteil 4 begann. In diesem Falle hätten wir keine Probleme: Wir könnten den Stadtteil auf einer Brücke verlassen, auf einer

anderen wieder betreten und dann auf der dritten verlassen, und danach brauchten wir ihn nicht mehr aufzusuchen. Ein solcher Stadtteil, der über drei Brücken mit den anderen Stadtteilen verbunden ist, kann höchstens noch Anfangs- oder Endpunkt des Weges sein. Nun sind aber die beiden Stadtteile **1** und **3** ebenfalls nur über jeweils drei Brücken erreichbar, Stadtteil **5** über fünf Brücken. Also muß der Anfangs- oder der Endpunkt in **1**, **3** oder **4** liegen, es gibt aber nur einen Anfangs- und einen Endpunkt. Wir haben also einen Stadtteil, welcher über drei Brücken erreichbar ist, zuviel!

Der Kernpunkt dieser Überlegung Eulers ist, daß es hierbei nicht auf die genaue gegenseitige Position, also beispielsweise die Abstände der einzelnen Objekte ankommt, sondern nur auf die Beziehungen untereinander. Der Teil der Mathematik, der sich mit solchen Eigenschaften, die nur von der Lage, nicht aber von den „metrischen“ Gegebenheiten abhängen, nennt man die *Topologie*. Euler gilt wegen dieser und anderer Überlegungen als der Gründer der Topologie.

Übrigens: Von dieser Tatsache, daß für manche Fragestellungen die „metrische Struktur“ keine Rolle spielt, sondern nur die topologische Struktur, macht das Streckenschema des HVV Gebrauch. In dem Schema der Bahnlinien haben die Abstände der Stationen nichts mit den wahren Abständen zu tun, wichtig ist nur, daß das Schema übersichtlich ist.

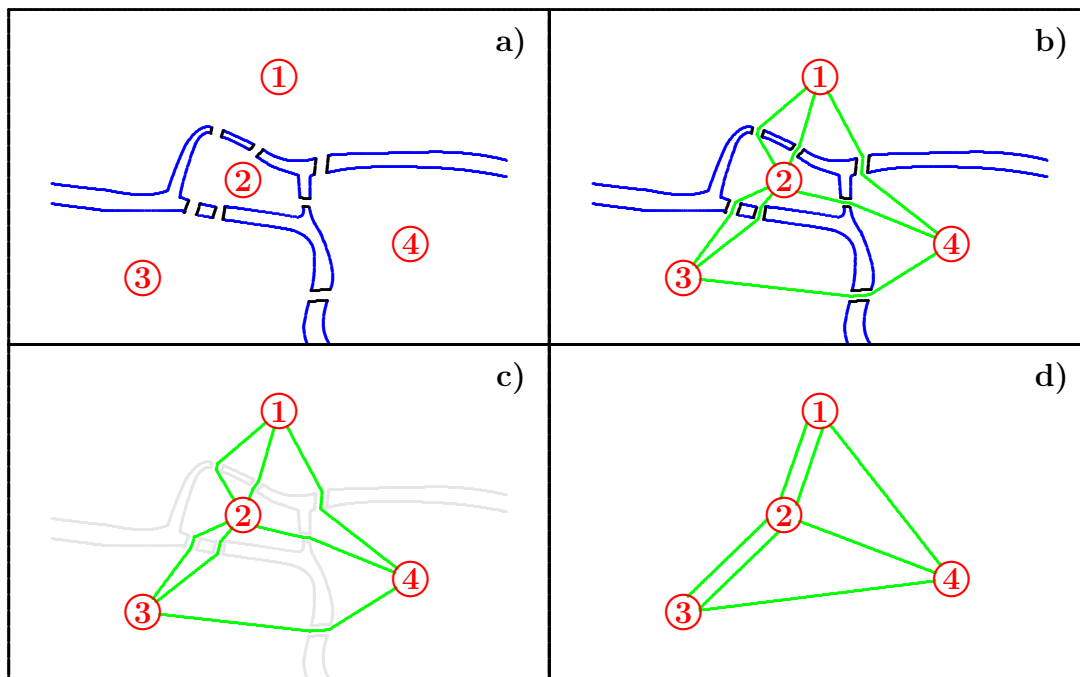


Abbildung 7: Das Königsberger Brückenproblem.

- a) Der Fluß Pregel teilt die Stadt Königsberg in vier Stadtteile, die mit den Ziffern **1** bis **4** bezeichnet sind. Zwischen den Stadtteilen gibt es insgesamt sieben Brücken.
- b) Die Wege zwischen den Stadtteilen über die sieben Brücken.
- c) Schema der Wege, Fluß und Brücken ausgeblendet.
- d) Gleiches Schema mit begradigten Wegen.

D Rechnen mit Psephoi

Die Pythagoreer benutzten zur Darstellung von Zahlen Zählsteinchen, sogenannte *Psephoi*. Es ist erstaunlich, was man alles beweisen kann durch Legen von solchen Steinen und durch anschauliches Schließen alles machen kann. Wir betrachten hier die Folgende Aufgabe:

Es sind alle Zahlen bis zu einer Zahl n aufzuaddieren.

Nach einer Anekdote (die wahrscheinlich – wie alle Anekdoten – nicht der historischen Wahrheit entspricht) hat der neunjährige Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), als er von seinem Lehrer die Aufgabe erhielt, alle Zahlen von 1 bis 40 aufzuaddieren, die Antwort zum Erstaunen des Lehrers sofort und ohne mühsames Rechnen gegeben. Wir sehen uns einmal n , wie es die Pythagoreer geschafft haben. Zunächst haben sie sich die Aufgabenstellung durch Psephoi veranschaulicht. Abbildung 8 zeigt eine mögliche Anordnung für den Fall $n = 8$.

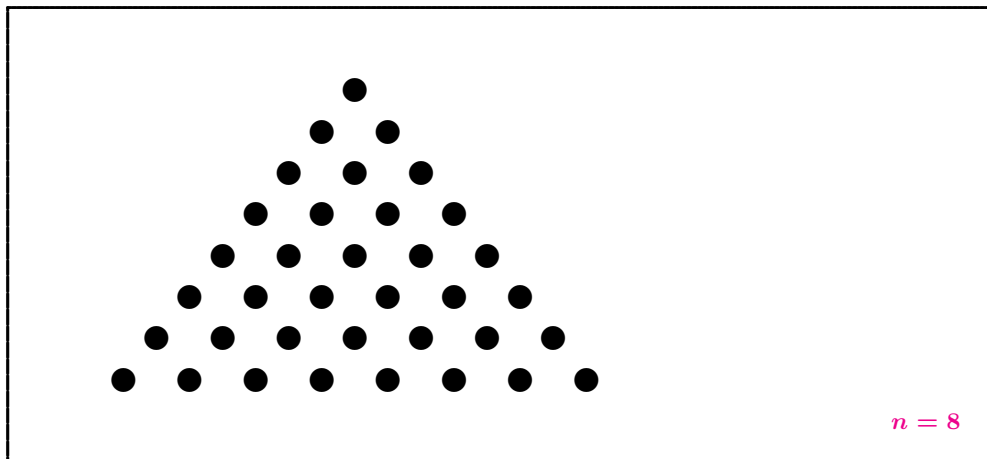


Abbildung 8: Veranschaulichung der Aufgabenstellung durch Psephoi.

Und nun kommt die Idee: Man ergänzt die untere Reihe, die acht Steinchen enthät, durch einen weiteren Stein anderer Farbe und hat somit neun Steine in der ersten Reihe liegen. In der zweiten Reihe legt man zwei Zählsteinchen dazu und erhält wieder neun Steinchen. Offenbar kann man so immer weiter fortfahren (Abbildung 9). Wie endet der Prozeß? Wir haben n Reihen mit je $n + 1$ Psephoi und wir haben genau n Steinchen hinzugefügt. Damit erhalten wir unmittelbar die Lösung

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

In der Gauß-Biographie von Worbs [42] wird anschaulich geschildert, wie sich im Kopfe des Schülers die Zahlen ungruppierten. Die 40 und die 1 ergaben als Summe 41, ebenso 39 und 2 und so weiter. Der junge Gauß mußte also nur noch überlegen, wie oft man diesen Paarungsvorgang ausführen kann. Offenbar zwanzig mal. Damit war die Aufgabe gelöst!

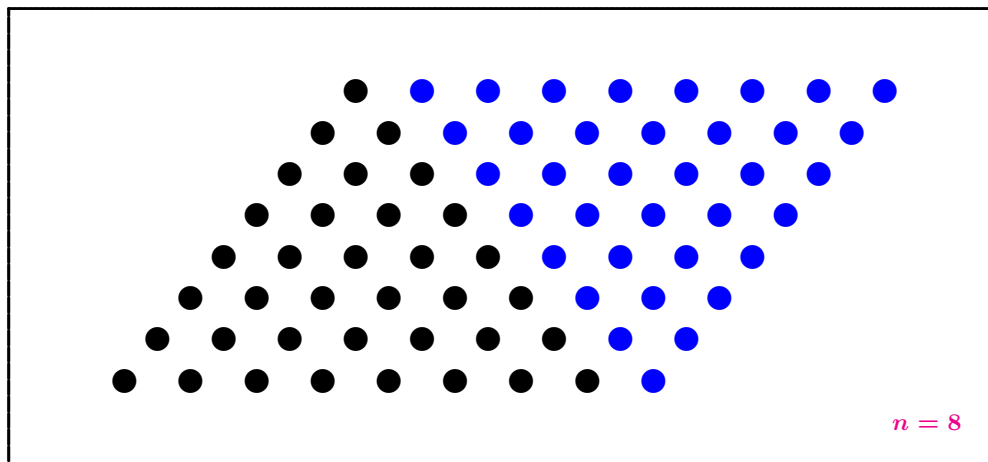


Abbildung 9: Trick: Ergänzung der Konfiguration.

Literatur

- [1] K. Absolon. Dokumente und Beweise der Fähigkeiten des fossilen Menschen zu zählen im mährischen Paläolithikum. *Artibus Asiae*, 20(2/3):123–150, 1957.
- [2] Elena Cassin, Jean Bottéro, and Jean Vercoutter, Hrsg. *Die Altorientalischen Reiche I. Vom Paläolithikum bis zur Mitte des 2. Jahrtausends*. Fischer Weltgeschichte, Band 2. Fischer Bücherei KG, Frankfurt am Main, 1965.
- [3] Andrew Clark, editor. ‘*Brief Lives,*’ chiefly of Contemporaries, set down by John Aubrey, between the Years 1669 & 1696, volume I. (A – H). At the Clarendon Press, Oxford, 1898. edited from the author’s MSs. by Andrew Clark.
- [4] Albrecht Dürer. *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen und gantzen corporen, durch Albrecht Dürer zusammen gezogen und zu nutz allen kunstliebhabenden mit zugehörigen figuren in truck gebracht im jar MDXXV von 1525 (rev. Ausgabe 1538)*. Hieronymus Andreae, Nürnberg, 1525.
- [5] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 17:891–921, 1905.
- [6] Friedrich Engels. *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft* («*Anti-Dühring*»). Dietz Verlag, Berlin, 1960.
- [7] Adolf Erman. *Die Literatur der Aegypter. Gedichte, Erzählungen und Lehrbücher aus dem 3. und 2. Jahrtausend v. Chr.* J. C. Hinrichs’sche Buchhandlung, Leipzig, 1923. Unveränderter Nachdruck: Zentralantiquariat der Deutschen Demokratischen Republik, Leipzig, 1978.
- [8] M. C. Escher. *Graphik und Zeichnungen. Mit einer Einleitung und Bilderläuterungen des Künstlers*. Heinz Moos Verlag, München, vierzehnte unveränderte Auflage, 1980.
- [9] Euklid. *Die Elemente. Buch I–XIII. Herausgegeben und ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 3., unveränderte Auflage, 1969.

- [10] Leonhard Euler. *Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie*. Edition Vieweg, Band 3. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1986. Aus dem Französischen übersetzt. Eingeleitet und erläutert von Andreas Speiser.
- [11] Hammurabi. *Codex Hammurabi. Die Gesetzesstele Hammurabis*. In der Übersetzung von Wilhelm Eilers. marixverlag GmbH, Wiesbaden, 2009.
- [12] Reuben Hersh. *What is Mathematics, Really?* Oxford University Press (USA), Oxford, New York, Tokyo, 1997.
- [13] Harro Heuser. *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [14] Georges Ifrah. *Universalgeschichte der Zahlen. Mit Tabellen und Zeichnungen des Autors*. Campus-Verlag, Frankfurt, 1986. Aus dem Französischen von Alexander von Platen.
- [15] Annette Imhausen. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives and old sources. *The Mathematical Intelligencer*, 28(1):19–27, 2006.
- [16] Wenzel Jamnitzer. *Perspectiva Corporum Regularium. Das ist / Ein fleysige Fürweysung / Wie die Fünff Regulirten Körper / darvon Plato inn Timaeo / Vnnd Euclides inn sein Elementis schreibt / etc. Durch einen sonderlichen / neuen / behenden vnd gerechten weg / der vor nie im gebrauch ist gesehen worden / gar Künstlich inn die Perspectiua gebracht / Vnd darzu ein schöne Anleytung / wie auß denselbigen Fünff Körpern one Endt / gar viel andere Körper / mancherley Art vnd gestalt / gemacht / vnnd gefunden werden mögen. Allen Liebhabern der freyen Kunst zu Ehrn / durch Wentzeln Jamnitzer / burgern und goldtschmid in Nürnberg / mit Göttlicher hülff an tag geben. etc. Mit Röm: Kayserlicher May: befreynung / Inn 35. Jaren nicht nach zudrucken. Ann. M. D. LXVIII. autonome welt der kunst. verlag biermann + boukes, frankfurt, 1972. Reprint.*
- [17] Joachim Jungius. Über den propädeutischen Nutzen der Mathematik für das Studium der Philosophie. Rede, gehalten am 19. März 1629 beim Antritt des Rektorates in Hamburg. Herausgegeben und übersetzt von Johannes Lemcke und Adolf Meyer, Hamburg. In Adolf Meyer, editor, *Beiträge zur Jungius-Forschung. Prolegomena zu der von der Hamburgischen Universität beschlossenen Ausgabe der Werke von Joachim Jungius (1587–1657)*, Festschrift der Hamburgischen Universität anlässlich ihres zehnjährigen Bestehens, S. 94–120. Paul Hartung Verlag, Hamburg, 1929.
- [18] Donald E. Knuth. Ancient Babylonian algorithms. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 15:671–677, 1972. Errata: *Communications of the Association for Computing Machinery*, 19:108, 1976.
- [19] James Krüss. *Polulangrische Lieder. Gesammelt, herausgegeben und mit einer Vorbemerkung, Anmerkungen, Fußnoten, Zeichnungen und einem Literaturverzeichnis versehen von James Krüss*. Damokles Verlag, Ahrensburg – Paris, 1968.
- [20] Paul Lorenzen and Kuno Lorenz. *Dialogische Logik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1978.
- [21] Conroy Maddox, Hrsg. *Dali*. TASCHEN COMICS Verlag GmbH & Co/KG, Köln, 2. Auflage, Juli 1985.

- [22] James Clerk Maxwell. *Über Faradays Kraftlinien. Über physikalische Kraftlinien*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 69 (Reprint der Bände 69 und 102). Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995.
- [23] Wolfgang Metzler. Schöpferische Tätigkeit in Mathematik und Musik. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XXII:53–65, 2003.
- [24] Wilfried Neumaier. Tonsysteme – ein interessantes Kapitel der Musik-Mathematik-Geschichte. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XXII:5–26, 2003.
- [25] Dominic Olivastro. *Das chinesische Dreieck. Die kniffligsten mathematischen Rätsel aus 10 000 Jahren. Aus dem Amerikanischen von Michael Schmidt*. Dromersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, 1995.
- [26] Wolfgang Promies, Hrsg. *Georg Christoph Lichtenberg, Schriften und Briefe. Dritter Band: Aufsätze, Entwürfe, Gedichte, Erklärung der Hogarthschen Kupferstiche*. Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1998.
- [27] Wolfgang Promies, Hrsg. *Georg Christoph Lichtenberg, Schriften und Briefe. Zweiter Band: Sudelbücher II. Materialhefte, Tagebücher*. Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1998.
- [28] Knut Radbruch. Mathematik in der Lyrik. In A. Beutelspacher u.a., editor, *Überblicke Mathematik 1997*. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1997.
- [29] Gay Robins and Charles Shute. *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*. The Trustees of the British Museum, London, 1987.
- [30] Ernst Rohmer, Hrsg. *Das lyrische Holzbein. Deutsche Unsinnspoesie*. area verlag gmbh, Erfstadt, 2004.
- [31] Bertrand Russell. *The Principles of Mathematics*. George Allen & Unwin Ltd, London, 2. ed., repr. edition, 1950.
- [32] R. M. Sainsbury. *Paradoxien*. Reclams Universal-Bibliothek Nr. 8881. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1993.
- [33] Paul Arthur Schilpp, Hrsg. *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher. Eine Auswahl. Facetten der Physik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1983.
- [34] Denise Schmandt-Besserat. The earliest precursor of writing. *Scientific American*, 238(6):38–47, June 1978.
- [35] Denise Schmandt-Besserat. Vom Ursprung der Schrift. *Spektrum der Wissenschaft*, S. 5–12, Dezember 1978.
- [36] Albrecht Schneider and Rolf Bader. Akustische Grundlagen musikalischer Klänge. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XXII:27–44, 2003.
- [37] Arnold Sommerfeld. *Vorlesungen ber theoretische Physik, Band III. Elektrodynamik. Revidiert von F. Bopp und J. Meixner*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M., 1977.
- [38] Manfred Stahnke. Ein Tonsystem für eine „Internetoper“. *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XXII:45–51, 2003.

- [39] Lorenz Stöer. *Geometria et Perspectiva. Hier Inn Etliche Zerbrochne Gebew / den Schreiner jn eigelegter Arbeit dienstlich / auch vil andern Liebhabern zu sonder gefallen geordnet vnnd gestellt / Durch Lorentz Stöer Maller Burger jnn Augspurg. Mit Rö: Kay: Maj: etc. aller genedigstẽ Priuilegio nit nachzetruckhen, 1567.* autonome welt der kunst. verlag biermann + boukes, frankfurt, 1972. Reprint.
- [40] Christian Thiel. *Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik.* Wissenschaft im 20. Jahrhundert. Transdisziplinäre Reflexionen. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1995.
- [41] Th. Wolff. *Der Wettlauf mit der Schildkröte. Gelöste und ungelöste Probleme.* August Scherl G. m. b. H., Berlin S W, 1929.
- [42] Erich Worbs. *Carl Friedrich Gauß. Ein Lebensbild.* Koehler & Amelang, Leipzig, Zweite, verbesserte Auflage, 1955.
- [43] Zweistein. *99 Logeleien von Zweistein mit ihren Antworten. Ein Wegner Buch!* Christian Wegner Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 4. Auflage, 1969.