

Unberechenbar – zufällig – chaotisch

Die Wissenschaft vom Unendlichen

Ulrich Eckhardt
Universität Hamburg
MIN-Fakultät — Department Mathematik
— Optimierung und Approximation —
Bundesstraße 55 — 20 146 Hamburg
E-Mail: Eckhardt@math.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

1	Das Zeitalter der Berechenbarkeit	1
1.1	Geschichte der Berechenbarkeit	1
1.2	Leibniz	4
1.3	Über Zahlen	5
2	Zufall und Wahrscheinlichkeit	11
2.1	Ein Blick in die Geschichte	15
2.2	Was ist Wahrscheinlichkeit	16
3	Chaos	19
3.1	Chaos in der Mathematik	20
4	Nichtberechenbarkeit	24
4.1	Die Arbeit von Gödel	26
4.2	Die unendliche Bibliothek	28
5	Fazit	30
	Literatur	31

Vortrag am 29. Juli 2008 im Rahmen der Veranstaltung MeerWissen – Von Null bis Unendlich im Freudenhaus Bregenz.

1 Das Zeitalter der Berechenbarkeit

Wir machen es uns nur sehr selten klar: Unser gesamtes Leben hängt davon ab, daß irgendwo in einem unvorstellbaren Umfang Mathematik betrieben und gerechnet wird. Bei der Konstruktion des Airbus A 380 spielten umfangreiche und sehr komplizierte Berechnungen eine wichtige Rolle, denn das Flugverhalten eines derart komplexen Systems läßt sich nicht mehr durch „Versuch und Irrtum“ im Windkanal ermitteln. Mit der Massenproduktion preiswerter digitaler Bausteine in den achtziger Jahren entstand die digitale Nachrichtentechnik, die eine völlig neue Mathematik erforderlich machte. Wenn wir ein Handy benutzen, Digitalfernsehen betrachten oder Musik aus einem MP3-Player hören, dann lösen wir damit eine große Menge von Berechnungen aus, die so kompliziert sind, daß man sie sich vor fünfzig Jahren noch nicht einmal vorstellen konnte. Das GPS-System erfordert ungemein genaue Berechnungen, die in dieser Form auch erst in den letzten Jahrzehnten möglich wurden. Auch in der Medizin stellen Verfahren der Bildverarbeitung etwa bei der Ultraschalldiagnostik, bei der Computertomographie, bei der Kernspintomographie und bei zahlreichen anderen Anwendungen höchste Ansprüche an die verwendete Mathematik. Von Berechnungen der Baustatik hängt buchstäblich unser Leben ab, Wirtschaftsprognosen bilden die Grundlage von wichtigen politischen Entscheidungen, Versicherungen müssen sich eine präzise zahlenmäßige Vorstellung von Risiken machen können, insbesondere auch von ganz neuartigen Risikoszenarien wie etwa durch den Klimawandel verursachte Extremwetterschäden.

Eine besonders beeindruckende Anwendung der Mathematik finden wir in der Raumfahrt. Hier müssen äußerst umfangreiche Berechnungen ausgeführt werden, die ein Höchstmaß an Präzision und numerischer Kunst erfordern. Am 18. Oktober 1997 wurde die Cassini-Raumsonde gestartet. Nach einer Flugzeit von 6 Jahren, 8 Monaten und 17 Tagen (2451 Tagen) erreichte sie die Saturnbahn am rechten Ort mit der rechten Geschwindigkeit am 1. Juli 2004. Man macht sich kaum einen Begriff von der enormen Präzision, die bei diesem Unternehmen einzuhalten war. Der bekannte Freiherr von Münchhausen erzählt von einem Schützen, der vom Balkan aus mit seinem Kuchenreuterschen Gewehr einen Sperling auf dem Straßburger Münster erschöß [7, Zehntes Kapitel]. Eine solche Zielgenauigkeit klingt in der Tat unglaublich. Hätte man die Saturn-Sonde mit der gleichen Präzision abgesandt, dann hätte man einen Fehler von einigen Millionen Kilometer riskieren müssen!

1.1 Geschichte der Berechenbarkeit

Die Vorstellung, daß sich gewisse Dinge mit hoher Genauigkeit berechnen lassen, ist durchaus modern. Im Altertum gab es zwar Berechnungen von Preisen und Planungsrechnungen für militärische und Bauprojekte, aber es herrschte die Vorstellung, daß die Natur prinzipiell nicht berechenbar sei. Selbst astronomische Berechnungen hielt man für lediglich näherungsweise gültig. Dies lag zum einen daran, daß die Theorie der Planetenbewegungen nicht hinreichend genau bekannt war, zum anderen hielt Platon generell die materiellen Dinge für unvollkommen. So schreibt er im *Staat* [42, Siebentes Buch, XI, 530B]:

Aber das Verhältnis von Nacht und Tag, das Verhältnis dieser zum Monat, das des Monates zum Jahre und das der übrigen Gestirne zu jenen und zu einander betreffend, glaubst du, er werde den nicht für einen Einfaltspinsel halten, der da annähme, diese Dinge erfolgten immer auf dieselbe Weise, und die Himmelskörper wichen nie das mindeste ab, da sie ja materiell und sinnlich sichtbar sind, – und der da glaubte, er müsse auf alle Weise suchen, das wahre Sein an ihnen zu erfassen?

Selbst Nikolaus Kopernikus (1473 – 1543) sah die Dinge ganz im Sinne von Platon. Sein „Eckermann“ Georg Joachim Rheticus (1514 – 1576) schreibt dazu [20, S. 175]:

Nicht gern mochte er sich auf kleinste Distanz-Bestimmungen einlassen, wie sie Andere erstrebten, die mit peinlicher Genauigkeit bis auf zwei, drei oder vier Minuten den Ort der Gestirne ermittelt zu haben meinen, während sie zuweilen dabei um ganze Grade abirren. Ich selbst würde hocheifrig sein wie Pythagoras, da er seinen Lehrsatz entdeckte, wenn ich im Stande wäre, meine Ermittlungen bis auf 10 Minuten der Wahrheit nahe zu führen.

Man muß hier hinzufügen, daß eine Beobachtungsgenauigkeit von 10 Bogenminuten zwar zu Kopernikus' Zeit Stand der Kunst war, daß eine solche Beobachtungsgenauigkeit die Leistungen der alten Babylonier und Griechen nicht übertraf und daß die Kopernikanische Theorie gegenüber der Ptolemäischen Theorie weder eine Vereinfachung der Rechnungen noch einen Genauigkeitsgewinn brachte [28, Dritter Teil, II].

Hierzu gehört, daß Kopernikus eine Einladung ablehnte, für das das Laterankonzil 1512–1517 Materialien beizusteuern, die die Grundlage einer Kalenderreform bilden sollten, die dann 1582 durch Papst Gregor XIII. eingeführt wurde. Kopernikus schrieb in der 2. Vorrede zum 1. Buch von *De revolutionibus* [20, S. 311–312]

Daher sagt auch Plutarch an der Stelle, wo er das tropische Sonnenjahr behandelt: Bislang entzieht sich die Bewegung der Gestirne der Kenntnis der Mathematiker. Denn, um gerade das Jahr als Beispiel zu nennen, so halte ich es für bekannt, wie verschieden die Meinungen darüber gewesen sind, so sehr, daß viele daran gezweifelt haben, eine zuverlässige Methode für seine Berechnung finden zu können.

Damit es aber nicht so scheint, als hätte ich mein Ausweichen mit diesen Schwierigkeiten bemänteln wollen, werde ich, wenn Gott, ohne den wir nichts vermögen, mir hilft, von anderen Sternen her eine ausführliche Prüfung dieser Fragen versuchen, da wir um so mehr Hilfsmittel zur Unterstützung unseres Vorhabens besitzen, je größer der Zeitraum ist, der zwischen den Begründern dieser Wissenschaft und uns liegt; denn wir können mit ihren Entdeckungen vergleichen, was wir von neuem gefunden haben. Übrigens gestehe ich, daß ich vieles auf andere Art vortragen werde als die Früheren, natürlich auf Grund ihres Verdienstes, da sie ja zuerst den Weg zur Erforschung dieser Dinge gebahnt haben.

Es ist schon erstaunlich, daß Kopernikus Plutarch von Chäronea (um 45 – um 125 n. Chr.) als Gewährsmann zitiert, damit stellt er sich sicher nicht auf die Höhe seiner Zeit. Als „Hilfsmittel zur Unterstützung unseres Vorhabens“ bedurfte es eines Aufwandes, den ein Schülerzirkel Astronomie ohne Schwierigkeiten zu leisten imstande wäre. Kopernikus scheute einfach die Mühe – er hat nicht eben viel oder gar genau beobachtet [28, Dritter Teil, I, S. 121 f.].

Gerade zu Kopernikus' Zeit war ein Bedürfnis an genaueren astronomischen Prognosen entstanden. Einmal ist eine möglichst präzise Festlegung des Jahres in allen Ackerbau treibenden Kulturen wichtig für die Bestimmung der Zeit der Aussaat. Weiterhin ist in der christlichen Religion das Osterfest von Bedeutung, welches nach Sonnen- und Mondstand definiert wird und – besonders wegen der schwierigen Mondtheorie – hohe Anforderungen an die Prognosegenauigkeit stellt. Schließlich kam „praktischer“ Bedarf von einer ganz anderen Seite: Die Astrologie hatte sich in Kopernikus Zeiten zu einem komplizierten System entwickelt, für das sehr präzise Voraussagen

benötigt wurden, jedenfalls Voraussagen, wie sie weder die Ptolemäische noch die Kopernikanische Theorie zu liefern imstande war [20, S. 151 f.].

Erst Johannes Kepler (1571 – 1630) konnte, aufbauend auf den sehr genauen Beobachtungen von Tycho Brahe (1546 – 1601) die Vorhersagegenauigkeit wesentlich steigern und zudem eine Theorie vorlegen, die diese Präzision erklärte. Auf der Basis der Keplerschen Erkenntnisse konnte dann Isaac Newton (1643 – 1727) seine allgemeine Theorie formulieren. Damit entwickelte sich die Mechanik in einem rasanten Tempo und wurde zur Grundlage des „Zeitalters der Vernunft“, wie man das 17. und 18. Jahrhundert auch genannt hat [36, S. 22]. Diese Vorstellung von der totalen Berechenbarkeit der Welt formulierte Pierre Simon Marquis de Laplace (1749 – 1827) in der Einleitung zu seiner *Théorie analytique des probabilités* aus dem Jahre 1776 wie folgt [35, Text 76]:

Wir müssen aber den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustandes betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kannte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.

Diese „Intelligenz“, die in der Lage ist, Vergangenheit und Zukunft des Universums genau vorherzusagen erhielt den Namen *Laplacescher Dämon*. In diesem Weltbild hat der Zufall als ursachloses Geschehen keinen Platz. Man wird bei diesem Weltbild der absoluten Vorherbestimmung an den Koran erinnert, in dem immer wieder darauf hingewiesen wird, daß nichts geschieht, was nicht im „deutlichen Buche“ aufgezeichnet ist, zum Beispiel in der zehnten Sure [29, 1062]:

Nichts, was in den Himmeln und was auf Erden ist, bleibt deinem Herrn verborgen, und wäre es auch nur so schwer wie eine Ameise. Es gibt nichts, es sei auch kleiner noch oder größer: Es ist in dem deutlichen Buch aufgezeichnet.

Eine bekannte Anekdote charakterisiert die Situation auf dem Höhepunkt des mechanistischen Weltverständnisses sehr treffend [39, S. 40]:

Der französische Mathematiker und Astronom Pierre Simon de Laplace hatte seine »Himmelsmechanik« veröffentlicht. Napoleon ließ es sich nicht nehmen, den Gelehrten zu beglückwünschen: »Ein großartiges Werk, Marquis! Aber warum kommt in einem Buch über den Himmel das Wort Gott überhaupt nicht vor?« »Dieser Hypothese bedurfte ich nicht!« erwiderte Laplace.

Einen letzten Triumph – und seinen Untergang – feierte das mechanistische Weltbild mit der kinetischen Gastheorie durch Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822 – 1888) und Ludwig Eduard Boltzmann (1844 – 1906). Nach dieser Theorie läßt sich das Verhalten von Gasen (und Flüssigkeiten) sehr gut beschreiben, indem man das Gas als ein System von sehr vielen Teilchen beschreibt, die rein mechanisch – etwa wie Billardkugeln – miteinander wechselwirken. Da die Anzahl der Teilchen in einem Gas im allgemeinen sehr groß ist, kann man allerdings „praktisch“ nur statistische Kenngrößen aus diesem Modell extrahieren. Daß es mit diesem Modell praktische Schwierigkeiten geben muß, zeigt eine einfache Überschlagsrechnung: Ein Gas enthält etwa $3 \cdot 10^{19}$ Moleküle/cm³.

Ein Computer, der in einer Sekunde 1 Milliarde Moleküle zählen kann, würde etwa 800 Jahre rechnen müssen, um alle Moleküle eines Kubikzentimeters eines Gases auch nur zu zählen. Eine solche Größenordnung ist mit heutigen Rechnern – und wahrscheinlich auch mit Rechnern einer absehbaren Zukunft – nicht zu beherrschen. Auch der Laplacesche Dämon würde daran scheitern müssen, daß es für seine Aufgabe keine geeigneten Rechner gibt, ganz abgesehen von der Datensammlung – der präzisen Bestimmung von Ort und Geschwindigkeit eines jeden Teilchens im Universum.

Es stellte sich alsbald heraus, daß irgendetwas an diesem Bild nicht stimmte. Die Vorgänge, die durch die Vielteilchentheorie beschrieben werden, weisen eine Vorzugsrichtung auf, die es sonst in der Mechanik nicht gibt. Wenn man einen Film betrachtet, der den Stoß zweier Billardkugeln zeigt oder die Schwingungen eines Pendels oder die Bewegungen von Planeten in ihren Bahnen um die Sonne, dann kann man nicht entscheiden, ob der Film vorwärts oder rückwärts abgespielt wird. Hingegen ist dieser Unterschied augenfällig, wenn der Vorgang des Auflöses von Zucker in Tee oder das heftige Auftreffen eines rohen Eies auf eine Wand [10] rückwärts abgespielt wird. Hier tritt in der Tat ein neues Phänomen auf, das allein auf die hohe Zahl der beteiligten Teilchen zurückzuführen ist – Hegel und die Philosophen des „dialektischen Materialismus“ hätten ihre Freude an diesem Beleg für das Umschlagen von Quantität in Qualität haben können!

1.2 Leibniz

In diesem Zusammenhang ist einer der Großen der deutschen Geistesgeschichte, der universelle und tiefgründige Gelehrte Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), besonders zu erwähnen. In Deutschland war und wird er verkannt, die Herrscher von Hannover „hielten“ sich den Gelehrten, so wie manchmal reiche Leute sich ein Äffchen halten – „es putzt ungemein“ – ohne das mindeste Verständnis für ihn aufzubringen. Um dynastische Ansprüche zu rechtfertigen, wurde ihm 1685 die Erforschung und Darstellung der Geschichte des Welfenhauses aufgetragen, die ihm bis an sein Lebensende wie ein Klotz am Bein hing [18, S. 26]. Sowohl in Hannover als auch in Berlin gründete er eine Akademie, in Hannover allerdings nur eine „Ein-Mann-Akademie“ [18, S. 32], in Berlin litt die Akademie darunter, daß der Kurfürst Friedrich III. von Brandenburg (1688 – 1701) zwar ihrer Gründung zustimmte, aber nicht gewillt war, Geld bereitzustellen [18, S. 33].

Es gehört zu der Verkennung Leibniz', daß später Friedrich II. von Preußen (1712 – 1786) sich Jean-Francois-Marie Voltaire (1694 – 1778) „hielt“, und dieser in seinem Roman *Candide oder der Optimismus* Leibniz' Philosophie verspottete, freilich ohne jeden Versuch, sie verstehen zu wollen.

Leibniz steht am Tor des *Zeitalters der Vernunft*, wie man das 17. und 18. Jahrhundert bezeichnet. Für ihn war das gesamte Universum durch die Vernunft verstehbar – ähnlich wie für Laplace – und war letztlich vernünftig, dies drückt sich aus in dem von Voltaire karikierten Begriff der *prästabilierten Harmonie*. Eine seiner größten Ideen wird uns noch beschäftigen, die Idee von der Formalisierung der menschlichen Vernunft, die er etwa in dem *Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer* (1686) [5, S. 3] und den *Elementa calculi* (1679) [30, S. 97] dargelegt hat. Im erstgenannten Text schreibt er [5, S. 3 f.]:

Ich habe sogar eine erstaunliche Tatsache gefunden, nämlich daß man durch die Zahlen alle Arten von wahren Sätzen und Folgerungen darstellen kann.

...

Das einzige Mittel, unsere Schlußfolgerungen zu verbessern, ist, sie ebenso anschaulich zu machen, wie es die der Mathematiker sind, derart, daß man seinen Irrtum mit den Augen findet und, wenn es Streitigkeiten unter Leuten gibt, man nur zu sagen braucht: „Rechnen wir!“ ohne eine weitere Förmlichkeit, um zu sehen, wer recht hat.

Im letztgenannten Text bringt Leibniz ein Beispiel, welches seine Idee erhellt [30, S. 103].

Zum Beispiel trägt der Begriff des Lebewesens zur Konstitution des Begriffes Mensch bei, und so wird das Zahlzeichen für Lebewesen a (z. B. 2) zusammen mit einer anderen Zahl r (etwa 3) durch Multiplikation die Zahl ar bzw. h (2×3 oder 6) hervorbringen, nämlich das Zahlzeichen für Mensch. Demnach muß die Zahl ar oder h (d. i. 6) durch a (d. i. durch 2) teilbar sein.

Leibniz kam nicht über umfangreiche Materialsammlungen zu seinem Projekt der *characteristica universalis* und *ars inveniendi* [18, S. 83 ff.] hinaus, da er vergeblich Förderer dieser Idee suchte und da, wie wir heute wissen, ein solches Vorhaben grundsätzlich scheitern muß, die technischen Möglichkeiten zur Realisierung wären auch heute bei weitem nicht ausreichend, ganz davon abgesehen, daß es grundsätzliche Probleme gäbe, wie wir noch sehen werden. Es ist interessant, daß Leibniz – auch im Hinblick auf eine Arithmetisierung des vernünftigen Schließens – eine Rechenmaschine erfand, die zu seiner Zeit nicht konstruierbar war, deren moderner Nachbau jedoch durchaus funktioniert.

Eine weitere große Entdeckung Leibniz’ war die Dyadik, die Binärdarstellung von Zahlen [18, S. 103 – 108]. So hat die Zahl 27 im Binärsystem die Darstellung 11011. Die Ziffern 0 und 1 hierbei bedeuten von rechts nach links die Koeffizienten von Zweierpotenzen $2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots$ gemäß

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 \cdot 16 & + & 1 \cdot 8 & + & 0 \cdot 4 & + & 1 \cdot 2 & + & 1 \cdot 1 & = & 27. \end{array}$$

Die modernen Rechenanlagen arbeiten heute ausnahmslos auf der Basis dieser Zahldarstellung.

Es ist in diesem Zusammenhang sehr interessant, daß Leibniz, der sich für China und chinesische Kultur sehr interessierte, einen Zusammenhang zwischen seiner Binärdarstellung und den 64 Hexagrammen (Abbildung 1) des chinesischen Orakelbuchs I-Ging (Yi Jing) herzustellen versuchte [15, S. 291]. Wenn man den unterbrochenen Strichen der Figuren den Wert 0 zuweist und den nicht unterbrochenen Strichen den Wert 1, dann kann man den Hexagrammen, von unten nach oben gelesen, eine Binärzahl zuordnen (Abbildung 2, nach [15, S. 292]).

Für Leibniz’ Philosophie, deren Kerngedanke die *prästabilierte Harmonie* war, konnte es im Universum keinen Zufall geben. So mußte es für ihn einen *zureichenden Grund* geben, daß die Zahl 7, welche in der Bibel so oft genannt wird, die Binärdarstellung 111 hat, worin Leibniz einen deutlichen Bezug auf die Dreieinigkeit sah. Es gibt einen Medaillenenwurf von Leibniz, auf dem die Grundideen der Dyadik dargestellt sind, man kann eine Abbildung davon auf der Rückseite des Buches von Finster und van den Heuvel finden [18].

1.3 Über Zahlen

Wenn wir über Berechenbarkeit reden, dann sind einige Worte über Zahlen, die grundlegenden „Materialien“ jeder Berechnung, angebracht. Für alle diejenigen, die sich für dieses Gebiet inter-

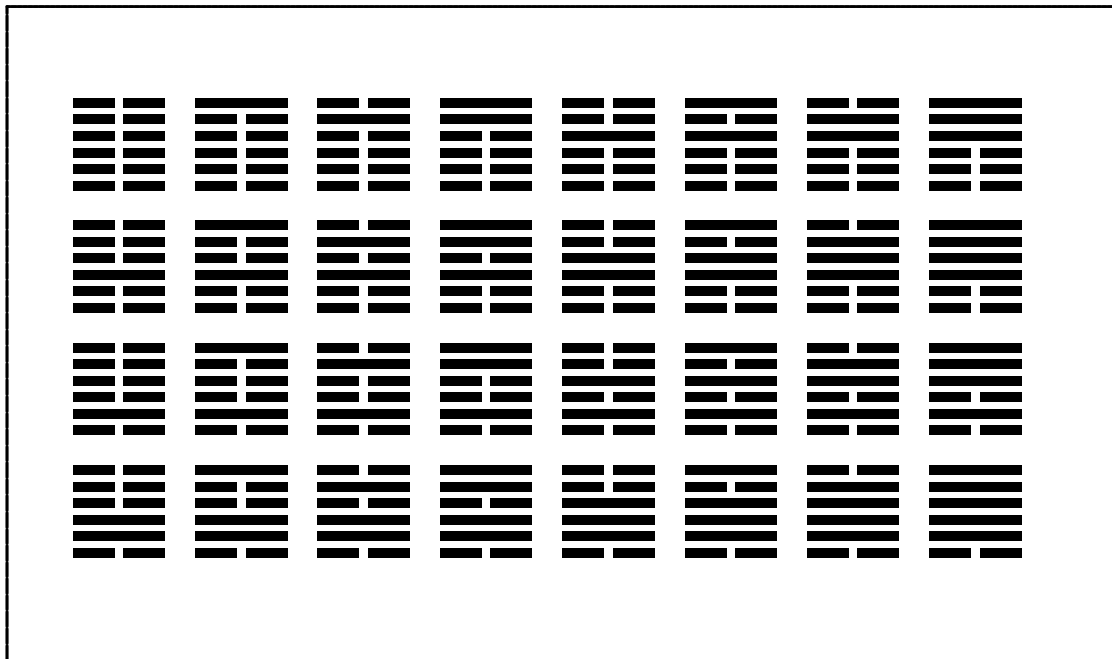


Abbildung 1: Die 64 Hexagramme des I Ging.

essieren, sei auf den Vortrag *Die Wurzeln des Zahlensystems* von Frau Prof. Dr. Christiane Floyd am 12. August 2008 in dieser Veranstaltungsreihe hingewiesen.

Wir alle kennen die sogenannten *natürlichen Zahlen* $1, 2, 3, 4, \dots$. Weiterhin haben wir in der Schule gelernt – mehr oder weniger gut – mit Brüchen oder *rationalen Zahlen* zu rechnen, also mit Ausdrücken der Form $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$. Schließlich kennen wir endliche *Dezimaldarstellungen* von Zahlen wie $1.12, 3.141592654, \dots$. Letztere sind allerdings nichts anderes als rationale Zahlen einer speziellen Form, 1.12 ist nur eine andere Schreibweise für $1\frac{12}{100} = \frac{112}{100}$.

Pythagoras von Samos (580 v. Chr. (?) – 500 v. Chr. (??)) war der Führer einer mystischen Sekte. Von Pythagoras selbst wissen wir allerdings nicht viel. Die Pythagoreer vertraten die Ansicht „alles ist Zahl“. Diese Sichtweise war begründet durch die Beobachtung, daß bei Teilung einer Saite in einfachen rationalen Verhältnissen Töne entstehen, die zusammen mit dem Grundton der ungeteilten Saite eine Harmonie ergeben (z. B. Oktave 1:2, Quinte 2:3, ...). Diese Beobachtung, daß Wohlklang durch Zahlen beschrieben werden kann, muß einen ungeheueren Eindruck gemacht haben. Umso schlimmer für die Pythagoreer, daß ein ganz einfaches geometrisches Konstrukt, die Diagonale eines Quadrats, in keinem rationalen Verhältnis zu dessen Seitenlänge steht. Ein Quadrat der Seitenlänge 1 hat eine Diagonale der Länge $\sqrt{2}$, und wir wissen heute, daß sich $\sqrt{2}$ auf keine Weise mit endlichen Mitteln darstellen läßt. Noch schlimmer, am regelmäßigen Fünfeck, dem Erkennungszeichen der Pythagoreer, tritt das Verhältnis des Goldenen Schnitts $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ auf, ebenfalls eine nicht rationale Zahl. Es wird gesagt, daß Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) zur Strafe dafür, daß er die Entdeckung dieser Inkommensurabilität an Profane weiterverriet, aus der Sekte der Pythagoreer ausgeschlossen wurde und später – als Strafe der erzürnten Götter – bei einem Schiffbruch ertrank. Auch bei dem klassischen *Delischen Problem*,

							
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	10	11	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Abbildung 2: Zuordnung von Binärzahlen zu den Hexagrammen.

der Würfelverdoppelung gelangt man zu einer nicht rationalen Größe, und die Kreiszahl π , das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser eines Kreises erwies sich – allerdings erst im Jahre 1767 durch Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) – als irrational. Man stellte bald fest, daß solche nicht rationalen Zahlen anscheinend keine Sondererscheinungen darstellen, sie traten immer wieder und immer häufiger auf.

Wenn man dem Symbol $\sqrt{2}$ einen Sinn geben möchte, muß man anerkennen, daß es neben den gewöhnlichen rationalen Zahlen auch *irrationale Zahlen* geben muß. Die Gesamtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bezeichnet man heute als die *reellen Zahlen*. Man kann sich nun fragen, inwieweit die Einführung solcher *Monster* wie der Irrationalzahlen in der Tat zwingend ist.

Man könnte sich folgende Auswege aus der Situation vorstellen:

Ignorieren Man setzt einfach fest, daß als Zahlen nur natürliche Zahlen und Brüche erlaubt sind. Einen solchen Ausweg schlug Leopold Kronecker (1823 – 1891) vor. Bekannt ist sein Ausspruch auf der Berliner Naturforscherversammlung 1886 [1, S. 378]: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.“

Wenn man diesen Ausweg konsequent verfolgt, so muß man letztlich akzeptieren, daß der Diagonale eines Quadrats keine Länge zugeordnet werden kann, wohl aber der Diagonale eines Rechtecks mit Seitenverhältnis 3 : 4. Wenn ein Punkt sich zu einem gewissen Zeitpunkt auf einer Seite einer (gedachten) Ebene befindet, zu einem späteren Zeitpunkt auf der anderen, dann möchten wir daraus den Schluß ziehen dürfen, daß er zu irgendeinem dazwischen liegenden Zeitpunkt sich in der Ebene befunden haben muß. Diese Aussage wäre hier nur dann wahr, wenn man nachweisen kann, daß der fragliche Zeitpunkt rational ist, es sei denn, man versteigt sich zu linguistischen Konstrukten wie: „Der Körper befindet sich zu gewissen Zeitpunkten, die sich beliebig wenig unterscheiden, jeweils auf der einen, dann auf der anderen Seite der Ebene.“ Daß der direkte Schluß, daß sich der Körper irgendwann in der Ebene befindet, zulässig ist, wurde erst im Jahre 1817 von Bernard Bolzano (1781 – 1848), der das Tor zur modernen Mathematik geöffnet hat, streng bewiesen [6].

Eine um ihre wichtigsten und interessantesten Resultate amputierte Mathematik wäre für die Mehrheit der Mathematiker – und auch für Physiker und Ingenieure – wenig attraktiv.

Die pragmatische Lösung Man kann eine irrationale Zahl auf keine Weise durch endliche Operationen angeben. Nun kann man alles, was sich mittels Zahlen ausdrücken läßt, mit sehr großer Genauigkeit auch durch rationale Zahlen (beziehungsweise durch endliche Dezimalzahlen) darstellen. In der modernen Physik nimmt man sogar an, daß das ganze Universum „diskret“ ist, das heißt, Raum und Zeit lassen sich nicht beliebig unterteilen,

es bestände demnach also keine physikalische Notwendigkeit, Irrationalzahlen zur Beschreibung der Welt zu verwenden.

Ein Computer rechnet typischerweise mit 19 bis 20 Stellen nach dem Dezimalpunkt, und das dürfte doch für jeden denkbaren Zweck ausreichend sein! Man könnte sich also vorstellen, daß eine gesetzliche Norm eingeführt wird, daß nur Zahlen mit höchstens 20 gültigen Ziffern erlaubt sind.

Hier hätte man das Problem, daß in gewissen Gebieten – und die Raumfahrt gehört dazu – eine derartige Genauigkeit nicht ausreicht. Schlimmer noch, auch in anscheinend ganz „harmlosen“ Gebieten kann es vorkommen, daß sich bei längerer Rechnung die Rundungsfehler so weit verstärken, daß sie das Endresultat total verfälschen. Man müßte also Sondergesetze und Ausnahmeregelungen schaffen, im Extremfall müßte man bei jeder neuen Genauigkeitsanforderung die Mathematiklehrbücher neu schreiben. auch dies will eigentlich niemand.

Die gemäßigt pragmatische Lösung Man könnte Zahlen grundsätzlich mit endlichen Mitteln ausdrücken, aber die Genauigkeit jeweils flexibel der Situation anpassen. Schließlich kann man jede Irrationalzahl mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen annähern. Der *Intuitionismus*, eine von Luitzen Egbertus Brouwer (1881 – 1966) gegründete Richtung, der zeitweise auch Hermann Weyl (1885 – 1955) angehörte, machte sich diese Sicht zu eigen. Es verbleibt auch hier ein unguter Nachgeschmack. Eine Irrationalzahl ist – streng genommen – nach dieser Ansicht nicht existent. Eine solche Aussage: „Man kann etwas, was es nicht gibt, beliebig genau annähern“, klingt nach Mystik! Da ist es schon ehrlicher, man gibt dem Objekt, welches man beliebig genau annähern kann, einen Namen und nennt es eben *Irrationalzahl*!

Tatsächlich wurde bereits seit der Antike das Problem der unbegrenzten Teilbarkeit diskutiert. Zenon von Elea (ca. 490 – 2. H. d. 5. Jhs. v. Chr.) hatte vermittels seiner Paradoxa gezeigt, daß Veränderung nicht möglich sei. Am tiefsinnigsten ist sein *Pfeilparadoxon*. In jedem festgehaltenen Zeitpunkt, also etwa auf einer Momentaufnahme, steht der abgeschossene Pfeil still. Wie kommt es, daß bei der Zusammenfassung aller Momente aus diesen stillstehenden Pfeilen eine bewegter Pfeil wird? Es muß bei dieser Zusammenfassung etwas Neues, eben die Bewegung entstehen, und es ist auch heute noch nicht ganz einfach zu verstehen, wie das genau geschieht.

Die moderne Physik und Mathematik erhielt ihre gegenwärtige Form durch die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und Isaac Newton (1642 – 1727). Hierfür erwies sich der Begriff des Zahlenkontinuums als unerläßlich, man könnte also sagen, daß die Irrationalzahlen letztendlich den Bedürfnissen der Physik ihre Existenz verdanken.

In Ermangelung eines mathematisch einwandfreien Zahlbegriffs stieß diese neue Infinitesimalmathematik auf energischen Widerspruch, insbesondere durch George Berkeley (1685 – 1753), einem Philosophen, Logiker und Mathematiker. George Berkeley kritisierte die neue Theorie in seiner Schrift *The Analyst* von 1734. Er wies darauf hin, daß das Fundament der Infinitesimalrechnung einer wichtigen Grundanforderung für jede mathematische Theorie nicht genüge, ihre Begründung war logisch widersprüchlich. Eine solche Theorie ist schlicht unbrauchbar, jedoch hatten die Newtonianer ein pragmatisches Argument: Sie funktionierte! Dieser Pfahl im Fleische der Mathematik blieb als schmerzhaftes Desideratum bestehen, Das Problem der Begründung der Infinitesimalrechnung blieb bis ins neunzehnte Jahrhundert offen. Es ist interessant, daß sogar Karl Marx (1818 – 1883) um 1850 drei vergebliche Versuche unternahm, die Infinitesimalrechnung „dialektisch“ zu begründen [34]. Eine strenge Grundlegung wurde allerdings bereits von Cauchy (1789–1857) im Jahre 1821 (*Cours d'Analyse*) und später von Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

(1815–1897) gegeben. Einstein bemerkt zur Differentialrechnung, sie sei „... vielleicht der größte gedankliche Schritt, den zu tun einem Menschen je vergönnt war.“ [16, S. 160].

Man muß sich vor Augen halten, was eigentlich beispielsweise bei einer baustatischen Berechnung, bei der Berechnung des Flugverhaltens eines Airbus oder bei Berechnungen im Schiffbau wirklich geschieht. Wir wissen, daß die Festkörper, aus denen ein Gebäude, ein Flugzeug oder ein Schiff hergestellt wird, eine sehr komplizierte Mikrostruktur haben (Atome, Moleküle, Kristalle), daß die Luft, die den Airbus trägt und das Wasser, in dem das Schiff fährt, ebenfalls atomar beziehungsweise molekular aufgebaut sind. Seit Newton tut man so, als wären die festen Körper (ebenso wie Raum und Zeit) Kontinua. Wenn man aber auf einem Computer Modellrechnungen anstellt, dann „diskretisiert“ man, das heißt, man zerlegt den gedachten kontinuierlichen Körper in endlich viele kleine Teilkörperchen, die allerdings nichts mit den Atomen, Molekülen oder Kristallen zu tun haben, sie werden nach rechentechnischer Zweckmäßigkeit gewählt. Die Resultate interpretiert man dann wieder vor dem Hintergrund einer kontinuierlichen Theorie. Trotz dieser Umwege und Hilfskonstruktionen erweist sich das Resultat, also die Vorhersage über die Standfestigkeit des Gebäudes, das Flugverhalten des Flugzeugs oder das Fahrverhalten des Schiffes im allgemeinen als sehr zuverlässig. Gelegentliche Fehlrechnungen, die auf diese Mehrfachübersetzung von Diskreten ins Kontinuierliche und umgekehrt zurückzuführen sind – solche kommen durchaus vor, und ich habe eine Sammlung von sehr schönen Beispielen – sind ausgesprochen selten.

Aufbauend auf den Arbeiten von Bernard Bolzano (1781 – 1848) schuf Georg Cantor (1845 – 1918) die Mengenlehre. Auch dabei gab den Anstoß ein für die Physik und Technik relevantes Konstrukt, die sogenannten Fourierreihen, die insbesondere eine wichtige Rolle in der Signalverarbeitung spielen. In einer Arbeit aus dem Jahre 1872 wurde Georg Cantor in diesem Kontext zu der Notwendigkeit geführt, eine Begründung der reellen Zahlen zu geben. Man kann also ohne Übertreibung sagen, daß Radio, Fernsehen, Handys, GPS-Navigationssysteme und MP3-Player ihre Existenz der Einführung von Irrationalzahlen verdanken. Cantor, Richard Dedekind (1831 – 1916) in einem 1888 erschienenen Buch, sowie die schon erwähnten Mathematiker Cauchy und Weierstraß erarbeiteten dann schließlich die moderne Grundlage für die reellen Zahlen.

Der Preis für dieses neue Konzept war sehr hoch: Sobald man sich ernsthaft mit diesen Zahlen beschäftigte hatte man sich mit den Paradoxien des Unendlichen auseinanderzusetzen. Für die reellen Zahlen bedeutet dies, daß man hinnehmen muß, daß es in einem sehr präzisen Sinne „unendlich viel mehr“ Irrationalzahlen gibt als rationale Zahlen. Die uns vertrauten rationalen Zahlen – und es sind die einzigen Zahlen, mit denen wir wirklich umgehen können – sind außerordentlich selten im Zahlenreich, sie sind eher exotische Ausnahmefälle. Man kann versuchen, das Zenonsche Pfeilparadoxon dadurch zu „erklären“, daß die Zusammenfügung dieser gigantischen Überunendlichkeit von einzelnen Zeitmomenten in der Tat eine neue Qualität ergibt.

Man muß sagen, daß mit der Einführung des „aktual Unendlichen“ durch Georg Cantor die Mathematik endgültig „ihre Unschuld verloren“ hat. Diese Aussage wird ein wenig relativiert durch die Erkenntnis, daß auch die nach Kronecker von Gott geschaffenen natürlichen Zahlen ebenfalls auf tiefliegende Paradoxa führen.

Zum Schluß noch eine Überlegung, die ein Beispiel geben soll für die Art der exotischen Probleme, die bei der Beschäftigung mit dem Unendlichen auftreten können.

Wie bereits erwähnt, ist die Kreiszahl π eine Irrationalzahl, das heißt, die Dezimaldarstellung von π bricht nicht ab. Der japanische Mathematiker Yasumasa Kanada hat im Jahre 1999 nicht weniger als 206 158 430 000 ($2.06 \cdot 10^{11}$ oder 206 Milliarden) Stellen nach dem Dezimalpunkt berechnet. Der bereits erwähnte holländische Mathematiker und Philosoph Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966) hat einmal die Frage gestellt, ob es in der Dezimalbruchentwicklung

eine Folge von zehn aufeinanderfolgenden Nullen gebe. Ich vermute, daß man eine solche Folge bereits gefunden hat. Auch Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) hat in seinen *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* die Frage nach der Existenz eines Musters von Ziffern in der Dezimalbruchentwicklung von π immer wieder diskutiert [50]. Wir stellen uns eine ähnliche Frage, nämlich, ob in der Dezimalbruchentwicklung von π die aus 447 Ziffern bestehende Folge

```
065109032065110102097110103032115099104117102032071111116116032072
105109109101108032117110100032069114100101046032085110100032100105
101032069114100101032119097114032119129115116032117110100032108101
101114044032117110100032101115032119097114032102105110115116101114
032097117102032100101114032084105101102101059032117110100032100101
114032071101105115116032071111116116101115032115099104119101098116
101032097117102032100101109032087097115115101114046
```

auftritt. Da wir ja – zumindest prinzipiell – beliebig lange Teilfolgen der Dezimalbruchentwicklung von π untersuchen können, ist es lediglich ein technisches Problem, daß unsere Folge recht lang zu sein scheint.

Das Auftreten dieser Folge wäre – aus Gründen, die gleich preisgegeben werden sollen – eine kleine Sensation und sicher eine Schlagzeile wert. Ein *Beweis* dafür, daß gerade diese Folge nicht auftreten *kann* wäre ebenso sensationell, aber für uns Mathematiker noch aufregender. Brouwer war der Hauptvertreter des „Intuitionismus“, also einer Denkrichtung, die nur anerkennen wollte, was tatsächlich konstruktiv herzeigbar ist. So erklärte er die Aussage „Unsere Folge tritt entweder in der Dezimalbruchentwicklung von π auf oder sie tritt nicht auf“ für nicht zulässig. Er erlaubte die Aussage, daß die Folge auftritt – sofern dieses Faktum in der Tat durch eine Rechnung nachgewiesen werden kann. Brouwer hätte auch einen strengen Beweis, daß die Folge nicht auftreten kann, unter Umständen akzeptiert. Er hätte jedoch auch ein Drittes zugelassen: Daß wir einerseits eine solche Teilfolge nicht finden können – vielleicht deshalb, weil es sie in irgendeinem Sinne eben nicht „gibt“ –, daß wir aber andererseits keinen schlüssigen Beweis für die Nichtexistenz finden können – vielleicht deshalb, weil die Nichtexistenz der Teilfolgen nicht aus den Gesetzen der Mathematik folgt, sondern „zufällig“ wahr ist.

Diese strenge Denkhaltung – nur das existiert, was man „sehen und anfassen“, und vielleicht streng beweisen kann – vermeidet gewisse Schwierigkeiten in der Begründung der Mathematik, nimmt uns Mathematikern aber unsere schönsten Spielzeuge weg.

Was hat es nun mit der genannten Ziffernfolge auf sich? Auf unseren Computern werden Texte nach dem ASCII-Code (American Standard Code for Information Interchange) verschlüsselt, nach dem jedem zulässigen Textzeichen eine Zahl zwischen 0 (= 000) und 255 zugeordnet wird. Dieser Code ist weltweit verbreitet und gilt als „Quasistandard“ für Textkommunikation. Wenn man unsere Ziffernfolge in Dreiergruppen einteilt und in einer Tabelle nach den zugehörigen Zeichen nachschaut, dann ergibt sich die Dechiffrierung nach Tabelle 1, also den Text von Gen 1,1–2:

Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde. Und die Erde war wüst und leer, und es war finster auf der Tiefe; und der Geist Gottes schwebte auf dem Wasser.

Die Dezimalbruchentwicklung von π ist ewig, da Euklid seine Geometrie nicht in dieser Welt sondern in einer Platonischen idealen Welt angesiedelt hat. Der hier vorgestellte Text war – sofern er überhaupt in der Dezimalbruchentwicklung von π vorkommt – schon vor dem Urknall „vorhanden“ und wird auch dann noch existieren, wenn der letzte Stern unseres Universums erkaltet ist!

065	109	032	065	110	102	097	110	103	032	115
A	m		A	n	f	a	n	g		s
099	104	117	102	032	071	111	116	116	032	072
c	h	u	f		G	o	t	t		H
105	109	109	101	108	032	117	110	100	032	069
i	m	m	e	l		u	n	d		E
114	100	101	046	032	085	110	100	032	100	105
r	d	e	.		U	n	d		d	i
101	032	069	114	100	101	032	119	097	114	032
e		E	r	d	e		w	a	r	
119	129	115	116	032	117	110	100	032	108	101
w	ü	s	t		u	n	d		l	e
101	114	044	032	117	110	100	032	101	115	032
e	r	,		u	n	d		e	s	
119	097	114	032	102	105	110	115	116	101	114
w	a	r		f	i	n	s	t	e	r
032	097	117	102	032	100	101	114	032	084	105
	a	u	f		d	e	r		T	i
101	102	101	059	032	117	110	100	032	100	101
e	f	e	;		u	n	d		d	e
114	032	071	101	105	115	116	032	071	111	116
r		G	e	i	s	t		G	o	t
116	101	115	032	115	099	104	119	101	098	116
t	e	s		s	c	h	w	e	b	t
101	032	097	117	102	032	100	101	109	032	087
e		a	u	f		d	e	m		W
097	115	115	101	114	046					
a	s	s	e	r	.					

Tabelle 1: Interpretation der Ziffernfolge als ASCII-Text.

2 Zufall und Wahrscheinlichkeit

Die Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“ haben in der Mathematik eine andere Bedeutung als im täglichen Leben oder in Philosophie oder Theologie. Etymologisch leitet sich das Wort *Zufall* von dem lateinischen *accidens* her, und dieses Wort ist aus der Zusammensetzung von *ad* ‚zu‘ und *cadere* ‚fallen‘ entstanden [27]. Das Wort *wahrscheinlich* leitet sich aus dem lateinischen *vērīsimilis* her, also etwas, das „der Wahrheit ähnlich ist“, was „den Schein der Wahrheit hat“.

Die Begriffe „Zufall“, „Wahrscheinlichkeit“ und der technische Terminus „Statistik“ werden in der Umgangssprache und in der Öffentlichkeit häufig mißbräuchlich benutzt. In den Büchern der Autoren Hans-Peter Beck-Bornholdt und Hans-Hermann Dubben, die beide am Universitätskrankenhaus Hamburg-Eppendorf das Fach Biophysik und Strahlenbiologie vertreten, werden zahlreiche Beispiele für statistisch unsaubere Erhebungen, wahrscheinlichkeitstheoretische Fehlschlüsse und fahrlässige bis vorsätzliche Falschinterpretationen von Wahrscheinlichkeitsaussagen gegeben (zitiert sei hier nur das Buch *Der Hund, der Eier legt* [4]). An sich ist dies nicht verwunderlich, da sowohl die Erhebung als auch die Interpretation von statistischen Daten in Medizin, Psychologie, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften, aber auch in der Politik und in den Medien zum weitaus überwiegenden Anteil von Laien ausgeführt wird, die bestenfalls einen Schnellkurs

in Statistik besucht haben.

Gelegentlich wird das Wort „Wahrscheinlichkeit“ verwendet, um einer Aussage den Anschein eines gewichtigen wissenschaftlichen Resultats zu verleihen. Dies scheint der Fall zu sein, wenn im Wetterbericht die Aussage „Regenwahrscheinlichkeit siebzig Prozent“ zu hören ist. Zwar hat diese Aussage eine wohlbestimmte Bedeutung, jedoch wird sie mangels Interpretation von fast allen Zuhörern falsch verstanden [43, S. 27].

In seinem amüsanten Buch *Das Ziegenproblem* beschreibt Gero von Randow, der ebenfalls kein Fachstatistiker, sondern ein interessierter Laie ist, wie er sich über den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ sachkundig machte [43, S. 14]:

Erste Begegnung mit der Wahrscheinlichkeit

«Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System, das uns beim Raten hilft», schrieb der große Physiker Richard Feynman (1918–1988).

Wer daraufhin hoffnungsfroh im Brockhaus unter «Wahrscheinlichkeit» nachschlägt, wird jedoch mit philosophischen Streitfragen und der Drohung konfrontiert, daß eine mathematische Definition des Begriffes «sehr komplizierter mengentheoretischer Untersuchungen» bedürfe. Ingenieure wiederum, die traditionsgemäß in die <Hütte> gucken, das enzyklopädische Handbuch der Ingenieurwissenschaften, müssen dort erfahren: «Es gibt keine gleichzeitig anschauliche wie umfassende und exakte Definition der Wahrscheinlichkeit.»

Es scheint also schwierig zu werden!

In der Alltagssprache bezeichnen wir häufig etwas als „wahrscheinlich“, wenn wir sein Eintreffen für möglich halten, aber nicht für unbedingt zwingend. So steht in einem Buch über Wissenschaftstheorie [36, S. 33]:

Man wird sich also mit der Feststellung zufriedengeben müssen, daß aller **Wahrscheinlichkeit** nach Thales als erster die Möglichkeit gesehen hat, theoretische Sätze (und das heißt für den Fall der Geometrie: Sätze über *ideale Gegenstände*) zu formulieren.

Wir haben hier also den Begriff der Wahrscheinlichkeit als den Gegensatz zu dem Begriff der Notwendigkeit, also des Wissens auf der Grundlage allgemeiner Gesetze.

Häufig wird durch das Wort „Zufall“ ein Ereignis beschrieben, welches unerwartet kommt, welches man aber bei besserer Information hätte voraussehen können. Betrachten wir als Beispiel die Geschichte eines Reisenden, der eine fremde Stadt besucht hat:

Es war höchste Zeit, wenn ich meinen Zug noch erreichen wollte. Weit und breit war kein Taxi zu sehen, aber **zufällig** kam ein Bus.

Natürlich kam der Bus nicht zufällig, sein Erscheinen zu der bestimmten Zeit am bestimmten Ort war schon seit Monaten festgelegt, der Reisende kannte nur den Fahrplan nicht. Hier steht das Wort „Zufall“ für „Nichtwissen“ aus Mangel an Information.

Wahrscheinlichkeit und Zufall können aber auch verwendet werden, um komplizierte Vorgänge für die praktische Verwendung handhabbar zu machen. Obwohl meine Lebensversicherungsgesellschaft mehr Daten über mich (und andere) akquiriert hat, als ich mir träumen lasse, wird sie sich bei der Festlegung der Versicherungsprämie doch der sogenannten *Sterbetafeln* bedienen, weil dies den Vorgang erheblich vereinfacht. Karl Marx schreibt hierzu [33, S. 218]:

Jeder Mensch stirbt täglich um 24 Stunden ab. Man sieht aber keinem Menschen genau an, wieviele Tage er bereits verstorben ist. Dies verhindert Lebensversicherungsgesellschaften jedoch nicht, aus dem Durchschnittsleben der Menschen sehr sichere, und was noch viel mehr ist, sehr profitliche Schlüsse zu ziehn.

Bei dieser Verwendung ist Wahrscheinlichkeit einfach eine Datenkompression.

In seinem Buch *Zufall und Notwendigkeit* bringt Jacques Monod zur Illustration des „wirklichen“ Zufalls eine Geschichte [37, S. 107]:

Doch in anderen Situationen nimmt der Zufallsbegriff eine nicht mehr bloß operationale, sondern eine wesensmäßige Bedeutung an. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn man von »wesensmäßiger Koinzidenz« sprechen kann; ein solches unabhängiges Zusammentreffen resultiert aus der Überschneidung zweier voneinander völlig unabhängiger Kausalketten. Nehmen wir zum Beispiel an, Dr. Müller sei zu einem dringenden Besuch bei einem Neuerkrankten gerufen worden, während der Klempner Krause mit der dringenden Reparatur am Dach eines Nachbargebäudes beschäftigt ist. Während Dr. Müller unten am Hause vorbeigeht, läßt der Klempner durch Unachtsamkeit seinen Hammer fallen; die (deterministisch bestimmte) Bahn des Hammers kreuzt die des Arztes, der mit zertrümmerten Schädel stirbt.

In der Welt von Leibniz und Laplace wäre das Zusammentreffen des Hammers mit dem Schädel des Arztes schon am ersten Schöpfungstage vorherberechenbar gewesen. Wir werden uns noch fragen müssen, ob es wirklich einen „echten“ Zufall geben kann. Noch im Jahre 1908 schrieb der Mathematiker Henri Poincaré (1854 – 1912) [35, Text 114]:

Eine sehr kleine Ursache, die für uns unbemerkt bleibt, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir unbedingt bemerken müssen, und dann sagen wir, daß dieser Effekt vom Zufall abhängt. Würden wir die Gesetze der Natur und den Zustand des Universums für einen gewissen Zeitpunkt genau kennen, so könnten wir den Zustand dieses Universums für irgendeinen einem späteren Zeitpunkt genau voraussagen. Aber selbst wenn die Naturgesetze für uns kein Geheimnis mehr enthielten, können wir doch den Anfangszustand immer nur *näherungsweise* kennen. Wenn wir dadurch in den Stand gesetzt werden, den späteren Zustand mit demselben *Näherungsgrade* vorauszusagen, so ist das alles, was man verlangen kann; wir sagen dann: die Erscheinung wurde vorausgesagt, sie wird durch Gesetze bestimmt. Aber so ist es nicht immer; es kann der Fall eintreten, daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen; Ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum für die letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich und wir haben eine »zufällige Erscheinung«.

Diese Aussage von Poincaré ist in vieler Hinsicht sehr interessant. Zunächst einmal wird hier deutlich unterschieden zwischen theoretischer Vorhersagbarkeit und der praktischen Unmöglichkeit, Ausgangsdaten beliebiger Genauigkeit zu beschaffen. Dieser Gesichtspunkt wird uns noch beschäftigen. Poincaré deutet hier an, daß für ihn Zufall auf der praktischen Unmöglichkeit der Vorhersage beruht, das heißt, für ihn ist Zufall ein anderer Ausdruck für Nichtwissen oder doch nicht genaues Wissen.

Wir kehren zum „echten“ Zufall zurück. Bereits im Jahre 1900 stellte Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947) die Grundlagen zur Quantentheorie auf, wofür er 1918 den Nobelpreis

erhielt. Noch waren die Folgen dieser neuen Sicht auf die Physik nicht absehbar, erst als Max Born (1882 – 1970) im Jahre 1926 eine statistische Interpretation der Quantentheorie lieferte, wurde diese die Grundlage der sogenannten „Kopenhagener Deutung“, die im wesentlichen in den Jahren 1926 und 1927 von Niels Henrik David Bohr (1885 – 1962) und Werner Karl Heisenberg (1901 – 1976) geschaffen wurde. Nach dieser Deutung sind die Quantenphänomene grundsätzlich unvorhersagbar und stellen damit den Einbruch des echten Zufalls in die Physik dar. Es ist bekannt, daß gerade Albert Einstein (1879 – 1955), der einer der Begründer der Quantentheorie ist, sich vehement und entschieden gegen die statistische Deutung wehrte. In einem Brief an Max Born (1882 – 1970) vom 29. 4. 1924 schreibt er [17, S. 118]:

Bohrs Meinung über die Strahlung interessiert mich sehr. Aber zu einem Verzicht auf die strenge Kausalität möchte ich mich nicht treiben lassen, bevor man sich nicht noch ganz anders dagegen gewehrt hat als bisher. Der Gedanke, daß ein einem Strahl ausgesetztes Elektron *aus freiem Entschluß* den Augenblick und die Richtung wählt, in der es fortspringen will, ist mir unerträglich. Wenn schon, dann möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter in einer Spielbank sein als Physiker. Meine Versuche, den Quanten greifbare Gestalt zu geben, sind allerdings immer wieder gescheitert, aber die Hoffnung gebe ich noch lange nicht auf, und wenns garnicht gehen will, dann bleibt doch der Trost, daß der Mißerfolg nur an mir liegt.

Diesen verzweifelten Ausbruch, aus dem auch die verbissene Energie hervorgeht, mit der Einstein immer wieder nach „verborgenen Parametern“ hinter den statistischen Phänomenen der Quantentheorie gesucht hat, kommentiert Born in einer Anmerkung zu diesem Brief aus dem Jahre 1965 [17, S. 119]:

Neben Persönlichem enthält er ein physikalisch-philosophisches Glaubensbekenntnis, die Ablehnung statistischer Gesetze als letzte Grundlage der Physik. Dieses Thema wird immer wieder auftauchen und zu einer harten Diskussion mit mir führen. Gleich hier will ich sagen, was der letzte Grund dieses Zwiespalts ist. Einstein war fest überzeugt, daß uns die Physik Kenntnisse von der objektiv existierenden Außenwelt liefere. Mit vielen andern Physikern bin ich langsam durch die Erfahrungen im Gebiete der atomaren Quantenerscheinungen dazu bekehrt worden, daß das nicht so ist, daß wir nur in jedem Zeitpunkt eine rohe, angenäherte Kenntnis der objektiven Welt haben und aus dieser nach bestimmten Regeln, den Wahrscheinlichkeitsgesetzen der Quantenmechanik, auf unbekannte (z. B. zukünftige) Zustände schließen können.

Bekannt wurde der Ausspruch Einsteins aus einem Brief vom 4. 12. 1926 an Max Born [17, S. 129 f.]

Die Quantenmechanik ist sehr achtung-gebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das doch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß *der* nicht würfelt.

Zu diesem Brief merkt Born an [17, S. 130]:

Das Urteil Einsteins über die Quantenmechanik war ein harter Schlag für mich: er lehnte sie ab – zwar ohne eigentliche Begründung, vielmehr unter Berufung auf eine

»innere Stimme«. Diese Ablehnung spielt in späteren Briefen eine große Rolle. Sie beruht auf einer tiefen philosophischen Meinungsverschiedenheit, die Einstein von der jüngeren Generation trennte, zu der ich mich auch zählte, obwohl ich nur wenige Jahre jünger war als Einstein.

Werfen wir erst einmal einen Blick in die Geschichte!

2.1 Ein Blick in die Geschichte

Aristoteles (384 v. Chr. – 322 v. Chr.) unterscheidet zwischen notwendigen Vorgängen und kontingenten oder zufälligen Vorgängen. Im *Organon* gibt er ein Beispiel [2, Kategorien, 9. Kapitel, S. 65]:

Ich meine, dass z.B. es notwendig ist, dass morgen eine Seeschlacht entweder geschehen oder nicht-geschehen wird; aber deshalb ist es nicht notwendig, dass morgen eine Seeschlacht erfolgen wird; und es ist auch nicht notwendig, dass sie nicht-erfolgen wird; nur dass sie *entweder* erfolgt *oder* nicht-erfolgt ist notwendig.

Es ist interessant, daß Aristoteles als Beispiel für einen notwendigen Vorgang eine logische Tautologie anführt, die in jedem denkbaren Universum gültig ist. Wir würden als notwendig jeden naturgesetzlich bestimmten Vorgang bezeichnen, zum Beispiel die Tatsache, daß ein Gegenstand, den man losläßt, zu Boden fällt. Die nicht notwendigen Vorgänge behandelt Aristoteles ebenso wie in dem Zitat auf Seite 12: Es handelt sich um Vorgänge, die eintreten können, die aber auch nicht eintreten können. Solche Ereignisse nennt er auch zufällig.

Nach Aristoteles sind zufällige Ereignisse nicht durch Gesetze determiniert, können also nicht Gegenstand von Wissenschaft sein. In seiner *Metaphysik* schreibt er demgemäß kurz und knapp [3, III. Teil Einteilung und Objekt der Wissenschaft, S. 90]:

Damit mag die Frage nach dem Zufall und dem Grunde seines Vorkommens erledigt und erwiesen sein, daß es vom Zufall keine wissenschaftliche Erkenntnis gibt.

Diese Einstellung blieb bis in die Neuzeit, und erst im vierzehnten Jahrhundert begann man, sich mit zufälligen Ereignissen mathematisch zu befassen.

Der Mathematiker Luca Pacioli (etwa 1445 – nach 1514) veröffentlichte im Jahre 1494 ein Lehrbuch *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* [8, 57. Kapitel]. In diesem Buch gab Pacioli auch eine Anleitung zur doppelten Buchführung. Es ist recht interessant, Pacioli mit Kopernikus zu vergleichen, der etwa zur gleichen Zeit lebte. Wenn Pacioli heute wieder zum Leben erweckt werden könnte, dann wäre er nach einer kurzen Einweisung in der Lage, alle Details einer modernen Buchhaltung zu verstehen und nachzuvollziehen – mit Ausnahme der benutzten Computer. Kopernikus hingegen hätte nicht die mindeste Chance, etwa die eingangs erwähnten Bahnberechnungen der Cassini-Raumsonde zu verstehen. Dies Beispiel mag die ungeheure Entwicklung, die die Himmelmechanik und auch die Mathematik seit Kopernikus' Zeiten durchlaufen hat, verdeutlichen.

In seinem Buch geht Pacioli auch auf eine Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Auch hier ist der praktische Anstoß, der zu einer neuen Mathematik führte, eher banal. Pacioli untersuchte die folgende Frage [8, S. 327]:

Ein Spiel, welches auf 6 gewonnene Punkte gespielt wird, muss in einem Augenblicke abgebrochen werden, in welchem der eine Spieler auf 5, der andere auf 2 steht; wie ist der Einsatz zwischen ihnen zu theilen?

Die Lösung, die Pacioli vorschlug, nämlich den Einsatz im Verhältnis 5 zu 2 zu teilen, ist offenbar nicht richtig. Man kann dies leicht sehen, wenn man einen extremen Fall betrachtet. Wenn der eine Spieler nur einen Punkt erreicht hätte und der andere noch keinen, dann müßte nach Pacioli's Vorschlag der erste Spieler den ganzen Einsatz erhalten.

Im Jahre 1539 erschien das Buch *Practica Arithmetica generalis* von Geronimo Cardano (1501 – 1576) [8, 65. Kapitel]. In diesem Buch wurde ein anderer Vorschlag, der ebenfalls nicht befriedigend war, zur Lösung der Aufgabe vorgestellt. Cardano kritisierte an dem Pacioli'schen Ansatz, daß die Zahl 6 bei der Berechnung nicht verwendet wird. Problemdata, die nicht in die Berechnung eingehen, sind allemal verdächtig.

Auch der bedeutende Mathematiker, Theologe und Philosoph Blaise Pascal (1623 – 1662) beschäftigte sich etwa im Jahre 1654 auf Anregung des Spielers De Mére mit der Aufgabe von Pacioli. Pascal gab die „moderne“ Lösung an.

Den Beginn der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie kann man auf das Jahr 1713 datieren, in dem das Buch *Ars Conjectandi* des Baseler Mathematikers Jakob I. Bernoulli (1655 – 1705), also acht Jahre nach seinem Tode, erschien. Bernoulli faßte die Ergebnisse früherer Autoren zusammen und entwickelte diese weiter. Wichtig ist, daß Bernoulli zeigte, wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnen kann. Damit wurde die moderne mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie begründet.

2.2 Was ist Wahrscheinlichkeit

Wir haben alle in der Schule gelernt, was die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist. Zum Beispiel gibt es beim Würfeln sechs mögliche Resultate, nämlich die Augenzahlen von 1 bis 6. Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl, etwa die 6, zu würfeln, berechnet sich aus dem Quotienten der Anzahl der „günstigen“ Fälle – dies ist hier ein Fall, nämlich der Wurf einer 6 – und der Anzahl der möglichen Fälle, hier also sechs Fälle.

Beim näheren Überlegen stößt man alsbald auf Schwierigkeiten mit dieser Erklärung. Wir müssen voraussetzen, daß der Würfel „fair“ sei. Es gibt ein Zauberküchlein Trickwürfel, die bevorzugt eine bestimmte Augenzahl anzeigen. Solch ein Würfel wäre nicht geeignet zu Definition der Wahrscheinlichkeit. Man könnte jetzt physikalische Bedingungen angeben, unter denen ein Würfel „fair“ ist (etwa homogene Massenverteilung), und man könnte nach Art des *Urmeters*, welches in Paris aufbewahrt wird, einen *Urwürfel* in einem Museum aufbewahren. Einen solchen Weg über die „Materie“ möchte man in der Mathematik nicht einschlagen, wir brauchen eine abstrakte „Platonische“ Definition. Diese könnte etwa lauten, daß ein „fairer“ Würfel einer ist, bei dem alle Augenzahlen gleich wahrscheinlich auftreten. Dies wäre aber eine zirkuläre Definition: Zur Begriffsbestimmung der Wahrscheinlichkeit setzen wir voraus, daß der Würfel „fair“ ist, und dieser Begriff wird unter Verwendung des Wortes „gleichwahrscheinlich“ eingeführt.

Man könnte natürlich einfach sagen, daß ein Würfel „fair“ ist, wenn bei einer „großen“ Anzahl von Würfeln die geworfenen Augenzahlen etwa mit einer Häufigkeit von $\frac{1}{6}$ auftreten.

In Abbildung 3 ist das Resultat eines Würfel-experiments gezeigt. Es wurden auf einem Rechner 2000 Würfe mit einem fairen Würfel simuliert. Nach jedem Wurf wurde berechnet, wie oft unter

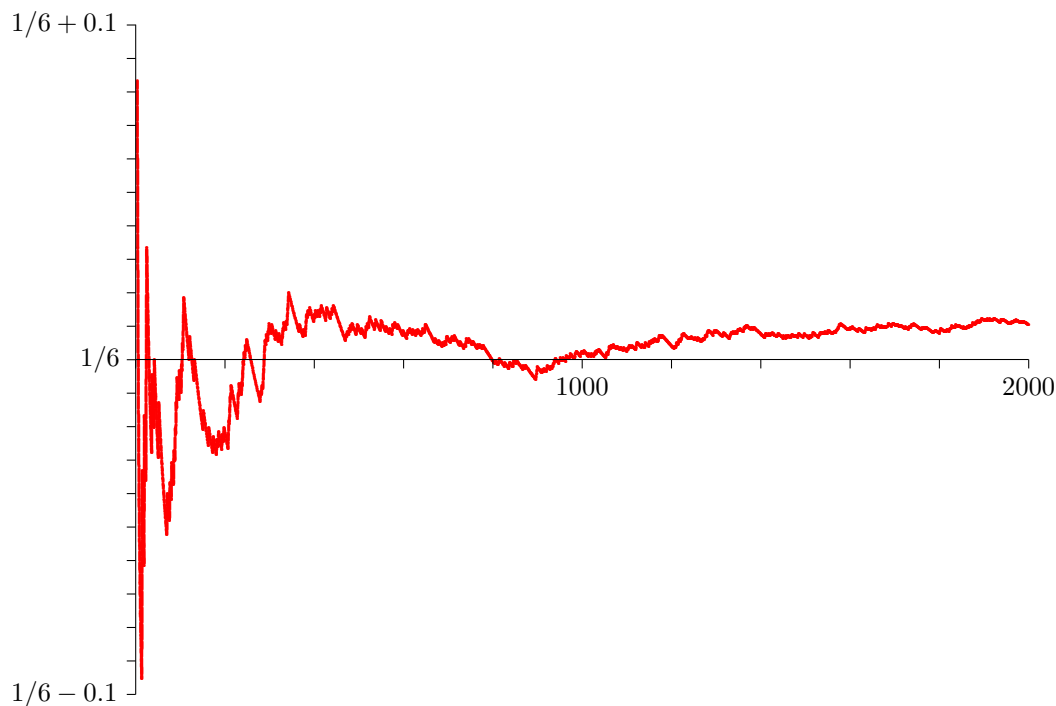


Abbildung 3: Die mittlere Anzahl der Augenzahl 6 bei einem Würfelexperiment.

den bis zu diesem Wurf erschienenen Augenzahlen die 6 vorkam und dieser Wert wurde durch die Gesamtzahl der bis dahin getätigten Würfe dividiert. Bei einem fairen Würfel müßte sich der Quotient dem Wert $\frac{1}{6}$ annähern. Wie die Abbildung zeigt, liegt der Quotient bei 2000 Würfeln etwas zu hoch. Ist also der verwendete Würfel nicht fair? Eine genaue Analyse der Würfe ergibt, daß bei 2000 Würfeln 354-mal die 6 auftrat, das heißt, unter 2000 Würfeln trat 20-mal zu oft die 6 auf. Dies ist durchaus normal, es hat eben „zufällig“ eine „Glückssträhne“ von 6-er-Würfeln gegeben. Wenn man das Experiment neu startet, dann ergibt sich unter Umständen, also „normalerweise“, ein völlig anderes Bild, es kann ebensogut vorkommen, daß unter 2000 weiteren Würfeln die 6 seltener auftritt, als dem erwarteten Mittelwert entspricht. Wie könnte man nun testen, ob der Würfel wirklich „fair“ ist? Man könnte natürlich wesentlich öfter würfeln, das wird allerdings irgendwann langweilig, und es kann durchaus „zufällig“ geschehen, daß bei einem solchen Experiment die Häufigkeit der 6 nach unten oder oben abweicht. Die Mathematiker und Philosophen Richard von Mises (1883 – 1953), Hans Reichenbach (1891 – 1953) und Rudolf Carnap (1891 – 1970) begründeten einen Wahrscheinlichkeitsbegriff, der auf einer Grenzwertüberlegung beruht (Man vergleiche hierzu die ausgezeichnete Darstellung von Carnap [9, Teil I]). Hier tritt uns also wieder das Unendliche als ein Hilfsmittel entgegen, um begrifflichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen. Eine solche Einführung der Wahrscheinlichkeit ist logisch einwandfrei, jedoch praktisch nicht ausführbar.

Es gibt ein weiteres Problem bei der Definition von Wahrscheinlichkeiten. Wenn man die kombinatorische Definition, also die genannte, die sich mit relativen Häufigkeiten befaßt, verwendet, dann wird es schwierig bei Vorgängen, die unendlich viele Möglichkeiten zulassen. Bei der oben erwähnten „Regenwahrscheinlichkeit“ ist es nicht möglich, „günstige“ und „mögliche“ Fälle aufzuzeigen. Ebensolche Probleme treten auf, wenn man solche Begriffe wie Erkrankungswahrscheinlichkeiten,

Unfallwahrscheinlichkeiten oder auch Wahrscheinlichkeiten von Gewinnen oder Verlusten an der Börse benutzt.

Bei der Berechnung einer Wahrscheinlichkeit hat man ähnliche Probleme, wie sie bei der Festlegung von Flächeninhalten oder Rauminhalten auftreten. Tatsächlich kann man beispielsweise einen Flächeninhalt durch ein Zufallsexperiment ermitteln. In Abbildung 4 ist grün schraffiert eine parabolisch berandete Fläche gegeben. Wenn man in dem umschreibenden Rechteck Punkte mit zufälligen Koordinaten ausstreut und auszählt, welcher Anteil davon in die zu messende Fläche fällt, so erhält man aus dem Quotienten der Anzahl der Punkte in der Fläche zur Gesamtzahl eine Näherung für das Verhältnis des Flächeninhalts der Figur zu dem Flächeninhalt des umschreibenden Rechtecks. In Abbildung 5 sind die sich ergebenden Mittelwerte für bis zu 100 zufällig gewählte Punkte dargestellt. Wie man sieht, konvergieren die Näherungen (zufällig) sehr gut gegen den „richtigen“ Wert $\frac{4}{3}$ (das umschreibende Rechteck soll dabei eine Länge von 2 und eine Höhe von 1 haben). Diese Methode der Inhaltsbestimmung durch Zufallszahlen ist in der Physik sehr beliebt und unter dem Namen *Monte-Carlo-Methode* bekannt.

Eine andere Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit präzise zu definieren, besteht darin, daß man sich zunächst nicht darum bekümmert, *wie* die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmt werden sollte, sondern man überlegt, welche Eigenschaften die Wahrscheinlichkeit haben soll und wie man mit Wahrscheinlichkeiten rechnet. Dies hatte ja auch schon Bernoulli getan. Diese moderne *axiomatische* Methode wird heute gelehrt. Sie hat viel zu tun mit der Bestimmung von Flächen- oder Rauminhalten. Im 20. Jahrhundert entdeckte man, daß die Begriffe des Inhalts von Flächen, des Volumens von Körpern oder der Länge von Kurven längst nicht so einfach sind, wie man vermuten möchte. Es treten Paradoxa auf, die ganz typisch für den Umgang mit dem Unendlichen sind. Aus den Bemühungen, diese Begriffe – und natürlich auch die der Wahrscheinlichkeitstheorie sauber festzulegen, entstand die *Maßtheorie*. Die Entwicklung dieser Theorie ist verknüpft mit den Namen Émile Félix Édouard Justin Borel (1871 – 1956), Constantin Carathéodory (1873 – 1950), Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), Stefan Banach (1892 – 1945), Stanislaw Marcin Ulam (1909 – 1984) und anderen.

Eine sehr interessante moderne Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie hat mit der Informationstheorie und Informatik zu tun. Sie wurde von dem bedeutenden und außerordentlich vielseitigen russischen Mathematiker Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903 – 1987) eingeführt. Einer der bedeutendsten noch lebenden Forscher auf diesem Gebiet ist Gregory Chaitin [11, 12, 13]. Die zugrundeliegende Idee ist eigentlich recht einfach. Wenn man eine Folge von Zahlen übermitteln möchte, dann kann man dies auf verschiedene Weise tun. Wenn ich jemandem die sämtlichen Nummern des Hamburger Telefonbuches senden möchte, dann besteht die einzige Methode darin, alle Nummern, so wie sie sind, zu übermitteln. Wenn ich aber jemanden sämtliche Primzahlen unter zehn Millionen übermitteln möchte, dann kann ich das recht einfach und kurz tun, indem ich ein kleines Programm schreibe, mit dessen Hilfe der Empfänger diese Primzahlen ausrechnen kann. In der algorithmischen Wahrscheinlichkeitstheorie wird nun eine Zahlenfolge zufällig genannt, wenn die sparsamste Möglichkeit, sie zu übermitteln, die Angabe der einzelnen Mitglieder der Folge ist. Sobald die Folge irgendwelche Regelmäßigkeiten aufweist, ist es zweckmäßiger, das „Bildungsgesetz“ zu übermitteln. Diese Definition ist hochinteressant, jedoch hat sie ebenfalls ihre Probleme. Die in obigen Beispielen benutzten „Zufallszahlen“ wurden mit einem sehr kurzen Standardprogramm berechnet, sie sind also nach der Kolmogorowschen Definition ganz sicher keine Zufallszahlen.

Zum Abschluß noch eine originelle Verwendung des Zufalls auf einem Gebiet, wo er eigentlich nicht hingehört. In der Zahlentheorie interessiert man sich besonders für *Primzahlen*, das sind natürliche Zahlen, die keine echten Teiler haben, zum Beispiel die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Man weiß seit Euklid, daß es unendlich viele solche Zahlen gibt, aber man hätte gerne so etwas

wie „Bildungsgesetze“ dieser Zahlen. Man weiß aber nur relativ wenig über deren Vorkommen und Eigenschaften. Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) kam im Alter von etwa fünfzehn Jahren auf die Idee, die Primzahlen als „zufällig“ zu betrachten und nach ihrer Verteilung zu fragen. Nennt man $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen bis zu der Zahl n (also etwa $\pi(20) = 8$), dann wäre der Quotient $\pi(n)/n$ die „Wahrscheinlichkeit“, unter den Zahlen bis n eine Primzahl zu finden. Gauß schrieb über diese Idee an den Astronomen Johann Franz Encke (1791 – 1865) am 24. Dezember 1849 [51, S. 212, Anmerkung 6]:

Die gütige Mitteilung über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eigenen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war, noch ehe ich mit feineren Untersuchungen aus der höheren Arithmetik mich befaßt hatte, eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in den einzelnen Chiliaden [Tausendern] abzählte und die Resultate auf einem der angehefteten weißen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald, daß unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmus verkehrt proportional sei, so daß die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral $\int \frac{dn}{\log n}$ ausgedrückt werde ... [gemeint ist hier der Logarithmus zur Basis e]. In späterer Zeit, als mir die in Vegas' Tafeln (von 1796) abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, was jenes Verhältnis bestätigte. Eine große Freude machte mir 1813 die Erscheinung von Chernacs cribrum [Sieb], und ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hier bald dort eine Chiliade abzuzählen; ich ließ jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich Goldschmidts Arbeitsamkeit, teils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, teils nach Burckhardts Tafeln die Abzählung weiter forzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt und mit dem Integralwert verglichen. Ich setze hier nur einen kleinen Extrakt her:

Unter	gibt es Primzahlen:	Integralwert:
500 000	41 556	41 606.4
1 000 000	78 501	79 627.5
1 500 000	114 112	114 263.1
2 000 000	148 883	149 054.8
2 500 000	183 016	183 245.0
3 000 000	216 745	216 970.6 ...

Wie groß das Interesse war, das noch der greise Gauß dem Verteilungsgesetz der Primzahlen entgegenbrachte, zeigt die Tatsache, daß auf seine Veranlassung hin der Hamburger Rechenkünstler Dase Primzahlentafeln von 6 000 000 bis 8 000 000 aufstellte.

3 Chaos

Das Wort *Chaos* hat in der Umgangssprache sowie in der Theologie und Philosophie eine völlig andere Bedeutung als in der Mathematik. Unter Chaos verstehen wir etwas Ungeordnetes etwas

Gesetz- und Regelloses. In zahlreichen Religionen ist das Chaos das „Rohmaterial“ der Schöpfung. Interessant ist, daß im Alten Testament dieser Begriff als Resultat des Schöpfungsprozesses auftritt. Es heißt in GEN 1,1–2:

Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde.

Und die Erde war wüst und leer, und es war finster auf der Tiefe; und der Geist Gottes schwebte auf dem Wasser.

Dieser Begriff „wüst und leer“ wird von manchen Theologen als „Chaos“ interpretiert.

In der *Theogonie* von Hesiod [21, 116] heißt es

Wahrlich, zuerst entstand das Chaos und später die Erde, ...

und [21, 123]

Aus dem Chaos entstanden die Nacht und des Erebos Dunkel; ...

Allerdings hat bei Hesiod das Wort Chaos noch die Bedeutung von „Abgrund“ oder „Leere“. Erst bei Ovid erhielt dieses Wort die heutige Bedeutung, es heißt zu Beginn der *Metamorphosen* [40]

Vor dem Meer und der Erd' und dem allumschließenden Himmel,
War im ganzen Bezirk der Natur ein einziger Anblick,
Chaos genannt, ein roher und ungeordneter Klumpen:
Nichts mehr, als untätige Last, nur zusammengewirrte
Und mißhellige Samen der nicht einträchtigen Dinge.

In der Schrift *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* läßt Kant das Universum sich vom anfänglichen Chaos zum letzten Chaos hin entwickeln. Er schreibt [25] (zitiert nach [26, Bd. I, S. 219–400]; Hervorhebung von Kant):

... es ist ein Gott eben deswegen, weil die Natur auch selbst im Chaos nicht anders als regelmäßig und ordentlich verfahren kann.

Es ist in diesem Zusammenhang recht interessant, daß die moderne Kosmogonie, also die Wissenschaft von der Entstehung des Universums, den Anfangszustand der Welt als hochgeordnet, also gerade *nicht* chaotisch ansieht [10].

3.1 Chaos in der Mathematik

Die sogenannte *Chaostheorie* ist ein sehr junger Zweig der Mathematik. Der Begriff entstand erst als Fachterminus in den siebziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts. Es gab dann eine Chaos-Euphorie, „Chaosforschung“ und „Chaosforschungsinstitute“ entstanden allenthalben. Man versuchte, alle Erscheinungen in Natur und Technik, aber auch in den Sozialwissenschaften „aus Einem Punkte zu kurieren“. Es hat sich alsbald herausgestellt, daß wichtige Begriffe der Chaostheorie schon seit längerer Zeit in der Mathematik Bestand gehabt hatten, so daß die Theorie nicht mehr ganz so „modern“ und neu erschien. Inzwischen hat sich die Situation – wie

es bei zahllosen anderen „Modetorheiten“ in der Mathematik der Fall war – beruhigt und die Forschung ist in ein ruhigeres Fahrwasser eingemündet. Was noch vor einem Jahrzehnt als „Chaosforschung“ propagiert wurde, ist jetzt die seriösere – und weniger spektakulär auftretende – Theorie der dynamischen Systeme geworden.

Was bezeichnen nun Mathematiker als *Chaos*? Wir betrachten zuerst einmal ein ganz einfaches und recht instruktives Beispiel, die sogenannte *Bäckertransformation*: Stellen wir uns vor, ein Bäcker bearbeitet seinen Teig. Wir nehmen an, der Bäcker interessiere sich für Mathematik und gehe daher streng methodisch vor und bearbeite den Teig auf eine vereinfachte Weise, die mathematisch verstehbar ist. Nehmen wir einmal an, der Teig habe zunächst rechteckige Form, wobei die Längsseite – der einfacheren Rechnung wegen – 1 m lang sei. Der Bäcker rollt den Teig so aus, daß dessen Länge sich verdoppelt, wobei die Breite nicht geändert werde. Damit hat dann der Bäcker ein 2 m langes Teigstück. Dieses wird nun in der Mitte gefaltet, womit der Bäcker wieder ein 1 m langes Stück Teig hat, und der Vorgang wird wieder und wieder ausgeführt.

Nun einige Formeln: Es bezeichne x die Position eines Punktes (etwa eines Mohnkorns) auf dem Teig, etwa vom linken Ende aus gemessen. Wir interessieren uns nicht für den Abstand des Punktes von der Längsseite des Teiges. Nach dem Ausrollen (Richtung nach rechts) hat der Punkt die Position $2x$. Nun kommt das Zusammenfalten: liegt die neue Position links von der Mitte des ausgerollten Teigrechtecks, dann bleibt sie nach dem Zusammenfalten an der gleichen Stelle. Ist sie in die rechte Hälfte gewandert, dann wird sie an der Mitte „gespiegelt“. Um die Übersicht zu behalten, bezeichnen wir die Position nach dem r -ten Ausrollen und Zusammenfalten mit x_r , es ist also $x_0 = x$. Dann wird

$$x_{r+1} = \begin{cases} 2 \cdot x_r & \text{falls } x_r \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2 \cdot x_r & \text{falls } x_r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man kann nun einen festen Anfangspunkt betrachten und sein „Schicksal“ während der wiederholten Bearbeitungsvorgänge (*Iterationen*) untersuchen. In Abbildung 6 ist dargestellt, an welcher Stelle sich ein Punkt bei jedem Bearbeitungsvorgang befindet, der anfangs die Position $x_0 = 0.001$ gehabt hat. Bei einer Anfangslänge des Teigs von 1 m befindet sich der Punkt also zu Beginn des Prozesses 1 mm vom linken Ende entfernt.

Auf den ersten Blick macht die Folge der Iterierten – nach einem regulären Start, etwa nach der zehnten Iteration – einen regellosen Eindruck, genau das, was wir von einem Chaos erwarten würden. Wenn man allerdings genauer hinsieht, dann stellt man fest, daß die Position der fünften Iterierten mit der der 54. Iterierten übereinstimmt. Das heißt, die Folge wird ab der fünften Iteration periodisch mit der Periode 49. Dies sieht allerdings weniger nach Chaos aus, sondern eher nach Ordnung. Wir halten aber erst einmal fest, daß ein Charakteristikum von Chaos die Regellosigkeit ist, das Fehlen einer (wenn auch vielleicht nicht auf den ersten Blick) erkennbaren Gesetzmäßigkeit. Diese vage Formulierung, die wir hier benutzt haben, läßt sich natürlich in der Mathematik quantifizieren.

Ein weiteres Charakteristikum des Chaos ist in Abbildung 7 dargestellt. Hier sind die Positionen von zwei Punkten angegeben, die sich anfänglich nur wenig voneinander unterscheiden. Man sieht, daß etwa bis zur fünfzehnten Iteration die Punkte ganz ähnliche Positionen einnehmen, daß ihre Verläufe danach aber sehr schnell völlig unterschiedlich werden. Der „gestörte“ Anfangswert ist 0.0010001, unterscheidet sich also von dem „ungestörten“ Wert 0.001 aus Abbildung 6 nur um $\frac{1}{10}$ Promille. Übrigens wird auch die zweite Folge schließlich periodisch, aber mit einer Periodenlänge von 31 250.

Als zweites Kennzeichen des Chaos haben wir also eine außerordentliche Empfindlichkeit des Ite-

rationsverlaufes bezüglich kleiner Störungen des Startwerts. Man kann das auch so formulieren: Nach einer gewissen Anzahl von Iterationen kann man nur mit sehr hohem Aufwand (und das heißt, mit einer sehr hohen, nicht realistischen Rechengenauigkeit beziehungsweise Meßgenauigkeit) auf den Startwert schließen. Das heißt, die Punkte aus dem hinreichend oft wiederholt ausgerollten Teig haben die Anfänge ihrer Geschichte „vergessen“.

Bevor wir ein weiteres Beispiel betrachten, einige Anmerkungen zu den Eigenschaften der Bäckertransformation. Es war aufgefallen, daß die beiden Beispielfolgen letztendlich periodisch werden. Man kann leicht zeigen, daß für jeden rationalen Startwert die Iterationsfolge periodisch wird. Für irrationale Startwerte hingegen wird die Folge nicht periodisch. Man kann (irrationale) Startwerte finden, so daß die Folge der Iterierten jedem Wert zwischen 0 und 1 beliebig nahe kommt. Auch dies wird häufig bei chaotischen Folgen beobachtet, man hat zwar keine strenge Periodizität, aber die Iterierten „besuchen“ jeden Punkt immer wieder.

Eine weitere interessante Eigenschaft der Bäckertransformation sei noch erwähnt. Man kann endlich viele Punkte zwischen 0 und 1 finden, so daß

- Der Abstand eines solchen Punktes zu dem ihm am nächsten liegenden aus der endlichen Punktmenge „beliebig klein“ ist, das heißt, kleiner als eine vorgegebene positive Zahl,
- Der Abstand eines jeden Punktes zwischen 0 und 1 von dem ihm am nächsten liegenden Punkt der endlichen Punktmenge ebenfalls „beliebig klein“ ist,
- Nach einer bestimmten Zahl von Iterationen der Bäckertransformation sämtliche Punkte der endlichen Punktmenge genau ihre Ausgangspositionen einnehmen.

Dieses Phänomen wurde zuerst von Jules-Henri Poincaré (1854 – 1912) untersucht und wird als *Poincarésche Wiederkehr* bezeichnet. Aus dem „Nebel des Chaos“ taucht immer wieder der „Schatten der Ausgangskonfiguration“ auf, allerdings gestört durch das chaotische Verhalten der „meisten“ Punkte. Man kann die Anzahl der endlich vielen Punkte beliebig groß wählen, es können also durchaus „sehr viele“ Punkte sein. Diese kehren periodisch in ihre Ausgangspositionen zurück, während die anderen Punkte chaotisch durcheinanderwirbeln. Ein beeindruckendes Beispiel einer solchen Wiederkehr findet man in dem Artikel von Crutchfield et al. [14, S. 79].

Es ist also hier nicht nur so, daß eng benachbarte Punkte zu verschiedenen Verläufen der Iteration führen, auch die Charakteristika der Iterationsfolgen werden im allgemeinen durchaus unterschiedlich sein. Ein Punkt mit rationalen Koordinaten, der einem Punkt mit irrationalen Koordinaten beliebig nahe liegt, wird eine periodische Folge erzeugen, letzterer aber eine nichtperiodische Folge. Was bedeutet dies für den „realen“ Kuchenteig? Man könnte etwa so argumentieren daß der Teig aus endlich vielen Molekülen besteht, und daß deshalb derart subtile Überlegungen nicht angemessen seien. Andererseits, wer kann garantieren, daß sich alle diese Moleküle in Punkten mit rationalen Koordinaten befinden? In der modernen Physik wird bezweifelt, daß der Raum beliebig teilbar sein kann. Wäre er es, muß man irrationale Koordinaten zulassen. Ist er es nicht, dann hört ab einer gewissen Feinheit der Unterteilung der Begriff „Raum“ auf, physikalisch sinnvoll zu sein und die „Position“ eines Teilchen ist dann unbestimmt.

Eine weitere, zunächst irritierende Eigenschaft der Bäckertransformation: Für die Berechnung der hier angegebenen Werte mußte ein kleiner numerischer „Trick“ angewandt werden. Wenn man zum Beispiel die Folge von Abbildung 6 „naiv“ auf einem Rechner ausrechnet, dann stellt man fest, daß die 74. Iterierte und alle weiteren den Wert Null haben. Die Zahl 0.001 ist nämlich auf einem Rechner nicht exakt darstellbar, sondern nur näherungsweise. Dies liegt daran, daß die Rechner die Leibnizsche Binärarithmetik benutzen, die wir schon in Abschnitt 1.2 kennengelernt

haben. Brüche, die Zweierpotenzen als Nenner haben, also eine der Zahlen (1), 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., werden durch die Bäckertransformation nach einer gewissen Anzahl von Iterationen in die Null überführt. Wir haben hier also die exotische Situation, daß die Bäckertransformation „echtes“ Chaos erzeugen kann, jedoch nicht auf normalen Rechnern, sondern nur auf „platonischen“ Rechnern, die mit Irrationalzahlen umgehen können. Auf „real existierenden“ Rechnern werden nach einer gewissen Anzahl von Iterationen alle Punkte auf den Nullpunkt abgebildet, und dies widerspricht jeder physikalischen Realität (und jeder Erfahrung im Bäckereigewerbe).

Eines der frühesten Beispiele für das Auftreten von chaotischen Zuständen wurde von Edward Norton Lorenz (* 1917), einem Meteorologen vom MIT, angegeben. Lorenz hatte dieses Beispiel in den sechziger Jahren beim Studium einer vereinfachten Variante der Klimagleichungen gefunden [32]. Da die Gleichungen von Lorenz recht kompliziert sind, betrachten wir hier ein anderes System, welches aus der Populationsdynamik stammt und auf Pierre-François Verhulst (1804–1849) zurückgeht [49]. Bezeichnet man die Stärke einer Tierpopulation (normiert auf Werte zwischen 0 und 1) in der n -ten Periode mit x_n , dann ist nach dieser Gleichung die Populationsstärke in der darauffolgenden Periode nach der sogenannten *Verhulst-Gleichung* gegeben durch

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n).$$

Hierbei ist r eine fest gegebene reelle Zahl, die die Überlebensfähigkeit der Population charakterisiert. Wenn man r zwischen 0 und 4 wählt, dann liegen die Werte x_n sämtlich zwischen 0 und 1, sofern man mit einem Startwert zwischen 0 und 1 begonnen hat, die durch die Verhulst-Gleichung gegebene Folge ist also „sinnvoll“. Speziell gilt nun:

$0 \leq r \leq 1$ Die Population stirbt aus.

$1 < r \leq 2$ Die Population strebt („monoton“) gegen den Grenzwert $\bar{x} = \frac{r-1}{r}$.

$2 < r \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ Die Populationsgröße oszilliert zwischen zwei Häufungspunkten (doppeltperiodisch).

$1 + \sqrt{6} < r \leq 3.54$ vier Häufungspunkte.

$3.54 < r$ 8, 16, 32, ... Häufungspunkte.

$r > \approx 3.57$ Chaos.

Uns interessiert hier nur der letztgenannte Fall. Wenn wir etwa $r = 3.98$ setzen und mit einer Populationsgröße $x_0 = 0.8$ anfangen, dann erhalten wir eine Kurve, die intuitiv „chaotisch“ aussieht (rote Kurve in Abbildung 8), das heißt, die Kurve zeigt keine erkennbare Gesetzmäßigkeit.

Wenn wir jetzt den Anfangswert auf $x_0 = 0.8001$ ändern, also um 0.0125 %, dann erhalten wir die grüne Kurve in Abbildung 8. Wir stellen fest, daß die beiden Kurven für die Anfangsgenerationen (bis etwa $n = 10$) recht gut übereinstimmen, daß sie sich aber dann mehr und mehr dramatisch unterscheiden. Eine sehr kleine Änderung der Ausgangsdaten hat also auch hier – nach einer gewissen Zeit – zu einer sehr großen Änderung des Systemverhaltens geführt.

Bislang hielt man eigentlich dieses Beispiel für unrealistisch, denn es war keine Tierpopulation bekannt, für die ein solch großer Wert von r das Verhalten beschreibt. Allenfalls mit künstlicher „Nachhilfe“ gelang es Jim Cushing im Jahre 1997 unter sehr speziellen Bedingungen chaotische Populationsdynamik bei Mehlkäfern nachzuweisen [46, S. 179 ff.] „Normale“ Tierpopulationen

haben einen relativ kleinen Wert von r , und ihr Verhalten ist weniger spektakulär, man beobachtet langfristig Stabilität oder auch Oszillationen der Populationsgröße. Unlängst hat jedoch eine internationale Forschergruppe aus den Niederlanden, Deutschland und den USA ein solches chaotisches Verhalten an verschiedenen Planktonpopulationen beobachtet [24]. Dies scheint mir ein weiterer Beleg zu dafür sein, daß manchmal die Gleichungen klüger sind, als ihre Erfinder.

Lorentz prägte für das Phänomen der sensiblen Abhängigkeit von den Ausgangsdaten bei der Entwicklung eines chaotischen Systems den Namen *Schmetterlingseffekt* und illustrierte diesen Effekt recht plastisch durch die Formulierung:

Der Flügelschlag eines Schmetterlings im Amazonas-Urwald kann einen Orkan in Europa auslösen.

Es ist interessant, daß Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) schon vor zweihundert Jahren einen ähnlichen solchen Effekt recht plastisch beschrieben hat (Sudelbücher, Heft D [55] [31, Band I, S. 239]):

Wenn ich dieses Buch nicht geschrieben hätte, so würde heute über 1000 Jahre abends zwischen 6 und 7 z.E. in mancher Stadt in Deutschland von ganzen andern Dingen gesprochen worden sein, als wirklich gesprochen werden wird. Hätte ich zu Vardöhus einen Kirschkern in die See geworfen, so hätte der Tropfen Seewasser den Myn Heer am Kap von der Nase wischt nicht gnau an dem Ort gesessen.

Das von Lorenz angegebene Beispiel der dramatischen Auswirkungen eines Schmetterlingsflügelschlags ist eine sehr schöne Metapher, aber sicher nicht realistisch. Man weiß jedoch, daß dergleichen chaotische Phänomene für das Wettergeschehen eine erhebliche Rolle spielen. Zu derartigen Vorgängen gehört zum Beispiel die Turbulenz von Flüssigkeiten und Gasen. Anfang des Jahres 2007, am 18. Januar, gab es in Hamburg eine Sturmwarnung, und man empfahl, nach Möglichkeit in den Gebäuden zu bleiben. Ich hatte an diesem Tage eine Wanderung mit einigen Freunden unternommen. Wir erlebten zwar Dauerregen, aber nicht einmal einen nennenswerten Wind. Zwar hatte es durchaus den Orkan *Kyrill* mit starken Sturmschäden gegeben, aber dieser hatte einen anderen Weg genommen, als dies vorhergesagt worden war. Mitte Mai des gleichen Jahres konnte ich bei einer Rennsteigwanderung in Thüringen die Schäden, die dieser Orkan dort im Walde angerichtet hatte, sehen. Vielleicht hat irgendein „Schmetterlingsflügel“ dafür gesorgt, daß der Sturm von seinem Weg abgelenkt worden ist und uns unbehelligt ließ. Es leuchtet ein, daß chaotische Phänomene sich weitgehend der Berechenbarkeit entziehen. Wir hatten bei der Bäcker-Transformation und der Verhulst-Gleichung gesehen, daß man den Anfangswert mit einer unrealistisch hohen Genauigkeit kennen mußte, um die Entwicklung über eine größere Anzahl von Perioden zuverlässig vorhersagen zu können. Das heißt, die Zukunft des Systems ist „praktisch“ unverhersagbar.

4 Nichtberechenbarkeit

Wir hatten gesehen, daß man bis ins zwanzigste Jahrhundert hinein davon überzeugt war, daß grundsätzlich alles berechenbar sei. Es wurde von verschiedenen Mathematikern in einer gewaltigen Anstrengung versucht, wenigstens für die Mathematik eine solide und unerschütterliche Grundlage zu schaffen. Man war allgemein zu der Überzeugung gelangt, daß die Grundlagen und das Methodenarsenal der Mathematik weitgehend bekannt seien. Es verblieb demnach nur noch

die Aufgabe, diese Grundlagen und Methoden zusammenzustellen, sie zu klassifizieren und zu systematisieren. Man sah die Mathematik ähnlich wie einen – freilich sehr großen, sogar unendlich großen – Barockpark, in dem alles nach bekannten Prinzipien geordnet war und von dem man nur noch den Plan und einen Katalog erstellen mußte, was nicht ausschloß, daß man immer wieder neue und interessante Ecken und Winkel im Park geben konnte, die sich aber den bekannten allgemeinen Prinzipien des Parks unterordnen mußten. Es ist interessant, daß Ende des neunzehnten Jahrhunderts ähnliche Vorstellungen in der Physik geäußert wurden, wie die folgende bekannte Anekdote sehr schön illustriert [39, S. 98–99]:

Max Planck hatte 1879 in München seine Dissertation verteidigt und mußte sich nun entscheiden, auf welchem Gebiet er künftig arbeiten wollte. Von seinem Lehrer Philipp von Jolly hoffte er Rat für eine wissenschaftliche Laufbahn zu erhalten. Der bekannte Gelehrte fragte ihn, was er sich denn selbst für Gedanken darüber gemacht habe. Planck hatte seine Vorliebe für theoretische Physik längst entdeckt und sprach das auch sofort aus. Doch von Jolly winkte ab. »Theoretische Physik, das ist ja ein ganz schönes Fach . . . Aber grundsätzlich Neues werden Sie darin kaum mehr leisten können . . . Man kann wohl hier und da in dem einen oder anderen Winkel ein Stäubchen noch auskehren. Aber was prinzipiell Neues, das werden Sie nicht finden.«

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) schrieb – neben anderen bedeutenden Beiträgen zu diesem Thema – sein zweibändiges Werk *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903). Darin versuchte er, die Mathematik auf der Logik aufzubauen. Ein ähnliches Anliegen hatten die dreibändigen *Principia Mathematica* von Alfred North Whitehead (1861 – 1947) und Bertrand, Earl Russell (1872 – 1970) die 1910–1913 erschienen. David Hilbert (1862 – 1943), der wahrscheinlich größte und vielseitigste Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts, entwarf ein Programm der *formalistischen* Begründung der Mathematik. In seiner Vorstellung mußte es möglich sein, die Mathematik so weit zu formalisieren, daß sie – wie wir heute sagen würden – auf einem Computer automatisch ausführbar wird. Hilbert war der entschiedenste Vertreter der Ansicht, daß in der Mathematik letztlich *alles* streng bewiesen werden könne. Von ihm stammt das Zitat [22, S. 963]:

Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Lösung:

Wir müssen wissen,
wir werden wissen.

Dieses Zitat wurde auch auf Hilberts Grabstein gesetzt. Es ist im Jahre 1930 publiziert worden. Die Ironie der Geschichte wollte es, daß ein Jahr später eine Arbeit von Kurt Gödel erschien [19], die allen diesen Bestrebungen endgültig ein Ende bereitete. In dieser Arbeit bewies Gödel, daß derartige Vorhaben grundsätzlich zum Scheitern verurteilt sind, und das in einem derart totalen Sinne, daß diese Nachricht die gesamte Grundlagenforschung der Mathematik nachhaltig erschütterte.

Die verschiedenen Versuche der exakten und zweifelsfreien Begründung der Mathematik erinnern sehr stark an das Bestreben von Leibniz, die Sprache zu formalisieren. Gödel hat Leibniz in seinen Arbeiten häufig zitiert, so daß man davon ausgehen darf, daß er die diesbezüglichen Ideen Leibniz’ gekannt hat. Wir werden noch sehen, daß diese Ähnlichkeit der Vorgehensweise tiefer geht, als der erste Blick vermuten läßt.

4.1 Die Arbeit von Gödel

Wir wollen hier einen kurzen Blick auf die Arbeit von Gödel werfen. Es ist nicht möglich, auf Einzelheiten einzugehen, die Arbeit umfaßt 26 Seiten, und sie ist in ihren wesentlichen Teilen äußerst nichtredundant geschrieben, das heißt, ohne überflüssige Worte oder Zusatzklärungen. In dem – für Mathematiker – populärwissenschaftlichen Buch von Nagel und Newman [38] über Gödels Arbeit steht als erster Satz des Abschnitts VII. *Der Gödelsche Beweis* recht lapidar:

Gödels Arbeit ist schwierig.

Ich gebe hier eine sehr stark – vielleicht sogar unzulässig – verkürzte Darstellung des Gödel-schen Gedankenganges, wohl wissend, daß ich dabei das Beste dieser „grandiosen intellektuellen Sinfonie“ [38, S. 93] unterdrücken muß.

Die erste Idee Gödels sieht recht harmlos aus. Er formuliert einen Satz der „natürlichen“ Sprache:

Dieser Satz ist nicht beweisbar.

Eine solche Aussage nennt man *selbstbezüglich*, das heißt, wir haben einen Satz, der etwas über sich selbst aussagt. Seit dem Altertum sind solche Sätze untersucht worden, zum Teil als Beispiele für unseriöse Sophismen, zum Teil als seriöse logische Probleme. Gödel nennt in seiner Arbeit andere, ähnliche Antinomien und weist darauf hin, daß sich „überhaupt jede epistemologische Antinomie zu einem derartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden [läßt].“

Vor etwa zwanzig Jahren erschien der Bestseller *Gödel, Escher, Bach* von Douglas Hofstadter [23]. Dieses Buch thematisiert das Problem der selbstbezüglichen Aussagen und stellt eine sehr amüsante Lektüre dar, ich bezweifle jedoch, daß sehr viele der Käufer das Buch auch wirklich gelesen haben.

Es ist klar, daß der Gödelsche Satz zu Schwierigkeiten führen muß. Wäre er in irgendeinem Sinne – das heißt, in einem logischen Schlußsystem – beweisbar, dann wäre er innerhalb dieses Systems wahr, da er aber aussagt, daß er eben nicht beweisbar ist, würde dies zu einem Widerspruch führen, und seit Aristoteles weiß man, daß ein logisches System, welches auch nur einen Widerspruch enthält, unbrauchbar ist, weil sich in ihm jede Aussage beweisen läßt.

Der selbstbezügliche Satz von Gödel ist in der „natürlichen“ Sprache formuliert. In der Mathematik spricht man von der *Metasprache*, das ist eine reduzierte und formalisierte Teilsprache der Umgangssprache, die geeignet ist, „über“ Mathematik zu sprechen. Diese Sprache benutzen wir in Vorlesungen, sie dient zur Bequemlichkeit und Praktikabilität der Kommunikation über Mathematik, und sie ist – wenigstens im Prinzip – so weit normiert und formalisiert, daß sie nötigenfalls und bei richtigem Gebrauch in exakte Formeln und deren korrekte Handhabung übersetzt werden kann. Dies gilt jedoch nicht für unseren selbstbezüglichen Satz. Die Formalisierung der Mathematik, die im wesentlichen auf der Logik basiert, läßt keine Selbstbezüglichkeit zu, eine solche würde zu einem *Teufelskreis* (nach Bertrand Russell, vgl. [45, Abschnitt 5.3]) führen. Die erste Konstruktion von Gödel bestand dahin, seinen Satz in die Sprache der formalen Logik zu übersetzen. Dazu muß seine Selbstbezüglichkeit eliminiert werden. Dies geschieht auf relativ komplizierte Weise, und für Einzelheiten sei auf das 7. Kapitel des Buches von Nagel und Newman [38] verwiesen. Man gelangt schließlich zu einer logischen Formel, die auf der Ebene der mathematischen Logik die Aussage des Satzes formuliert.

Es kommt nun noch ein zweiter „Trick“ von Gödel hinzu. Gödel hat ein System entworfen, das an Leibniz’ *ars inveniendi* erinnert (siehe Abschnitt 1.2). Er ordnete jeder logischen Formel eine Zahl zu, so daß

- Zu jedem logischen Ausdruck eine wohlbestimmte Zahl gehört,
- Aus der Zahl sich der logische Ausdruck wieder rekonstruieren läßt,
- Jeder logischen Operation eine arithmetische Operation entspricht (im wesentlichen eine Multiplikation oder Division).

In Tabelle 2 sind die drei Argumentationsebenen des Gödelschen Beweises schematisch dargestellt. Die beiden unteren Ebenen, die der Arithmetik und die der Logik, entsprechen einander umkehrbar, das heißt, zu jeder logischen Formel gehört eine wohlbestimmte Zahl und für jede Zahl kann man entscheiden, ob sie Gödel-Zahl einer logischen Formel ist. In diesem Falle gehört zu ihr eine wohlbestimmte logische Formel. Dabei muß nicht jeder Zahl eine sinnvolle logische Formel entsprechen und nicht jede logische Formel muß sinnvoll sein. Die Beziehung von Metamathematik zur Logik und Mathematik ist komplizierter, wie wir gesehen haben. Jede mathematisch-logische Aussage läßt sich metamathematisch eindeutig formulieren – genau das tun wir ja in unseren Vorlesungen –, aber nicht jeder metamathematischen Aussage entspricht eine (korrekt konstruierte) Formel der Logik. Dies ist der Grund dafür, daß bei der Formulierung des selbstbezüglichen Gödelschen Satzes relativ schwierige begriffliche Probleme auftreten. Ist eine metamathematische Aussage aber wahr und entspricht ihr eine logische Formel, dann muß diese auch wahr sein.

Metamathematik	Dieser Satz ist nicht beweisbar.
↑ ↓	
Logik – Mathematik	$(x) \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 13, n))$
↕	
Arithmetik	N

Tabelle 2: Schematische Darstellung der Argumentationsebenen in Gödels Beweis.

Die Formel in der zweiten Zeile der zweiten Spalte der Tabelle stammt aus dem Buche von Nagel und Newman [38, Formel (G), S. 88] und hat hier nur die Bedeutung eines „Platzhalters“. N ist die Gödel-Zahl der Formel.

Als nächstes zeigte Gödel, daß sich die seinem Satz entsprechende Formel genau dann beweisen läßt, wenn sich ihre Negation beweisen läßt. Dies können wir anhand des metamathematischen Satzes nachvollziehen, und wir haben dies oben getan: Wenn es einen Beweis des Satzes gäbe, dann wäre seine „Bedeutung“ wahr, und diese ist ja gerade, daß der Satz *nicht* beweisbar ist. Könnte man umgekehrt die Negation des Gödelschen Satzes beweisen, also die Tatsache, daß er beweisbar ist, dann kämen wir wieder zum gleichen Widerspruch.

Nun ist aber der Satz von Gödel ohne jeden Zweifel wahr. Wäre er nämlich nicht wahr, dann wäre seine Aussage falsch, aber wie wir gesehen haben, kann dies nicht sein.

Wir haben damit (freilich in einer sehr groben Skizze) gezeigt, daß es (mindestens) eine Aussage gibt, die wahr ist, aber nicht formal beweisbar. Wegen der Gödelschen Konstruktion kann diese

Aussage als eine Aussage über die Arithmetik interpretiert werden. Man sagt auch, die Arithmetik sei *unvollständig*. Dieses Ergebnis von Gödel hat sehr weitreichende Folgen. Eine davon ist bereits bei Gödel zu finden. Wir haben gesehen, daß die Widerspruchsfreiheit eines logischen Systems eine unverzichtbare Forderung ist. Nun hat Gödel in seiner Arbeit auch gezeigt, daß man einen formalen Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nicht erbringen kann. Sein Resultat läßt sich so formulieren: Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, dann kann ihre Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen werden.

Der französische Mathematiker André Weil (1906 – 1998) hat diese wahrhaft groteske und in einem gewissen Sinne verzeifelte Situation in einem Ausspruch charakterisiert, der scherzhaft als *Principle of Existence of Heaven and Hell* bekannt wurde: „Gott existiert, weil die Mathematik konsistent ist; der Teufel existiert, weil wir es nicht beweisen können.“ Ähnlich äußerte sich Bertrand Russell (1872 – 1970), allerdings lange vor Gödel, in seiner Schrift *Mysticism and Logic*, welche 1917 erschienen war [44, S. 75]: „Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.“

Roger Penrose hat aus dem Gödelschen Beweis eine interessante Schlußfolgerung herleiten können [41]. Der bedeutende englische Mathematiker Alan Turing (1912 – 1954) hatte im Jahre 1937 einen wichtigen Artikel veröffentlicht [48]. Darin ging es um die Fähigkeiten von allgemeinen Computern. Turing stellte eine „Papier-und-Bleistift“-Maschine vor, die äußerst einfach ist, so daß man über sie allgemeine Aussagen machen kann, die andererseits so allgemein ist, daß man mit ihr jeden beliebigen Computer simulieren kann. Turing bewies ein ähnliches Resultat wie Gödel, etwas plakativ gesagt, daß es mathematische Aufgabenstellungen gibt, die ein Computer nicht lösen kann. Durch eine geeignete Modifikation des Gödelschen und Turingschen Beweisverfahrens konnte Penrose zeigen, daß es Probleme gibt, die ein Mensch (auf der metamathematischen Ebene) als wahr erkennen kann, die aber ein Computer nicht entscheiden kann. Penrose zieht daraus sehr interessante Schlüsse über das Problem des menschlichen Bewußtseins. Anscheinend sind wir eben doch keine Maschinen!

4.2 Die unendliche Bibliothek

An dieser Stelle noch einen kurzen Exkurs in ein Gebiet, welches einen gewissen Zusammenhang mit den Problemen dieses Abschnitts hat und welches in der Kulturgeschichte immer wieder auftrat. In seinem Buch *Die Suche nach der vollkommenen Sprache* schildert Umberto Eco verschiedene Ansätze, „automatisch“, also gewissermaßen mit einem Computer, Wissen zu generieren [15]. Wir hatten schon Leibniz kennengelernt mit seiner *ars inveniendi*. Der katalanische Dichter und Mystiker Raimundus Lullus (1235 – 1315) hatte bereits versucht, durch mechanische Geräte Wahrheiten zu finden. In dem Buch *Gullivers Reisen* von Jonathan Swift (1667 – 1745) [47, Dritter Teil, Fünftes Kapitel] wird ein Besuch in der Akademie von Lagado geschildert:

Der erste Professor, den ich sah, befand sich in einem großen Zimmer und war von vierzig Schülern umgeben. Nach der gewöhnlichen Begrüßung bemerkte er, daß ich erstlich einen Rahmen betrachtete, welcher den größten Teil des Zimmers in Länge und Breite ausfüllte, und sagte: ich wundere mich vielleicht, daß er sich mit einem Projekt beschäftige, die spekulativen Wissenschaften durch praktische und mechanische Operationen zu verbessern. Die Welt werde aber bald die Nützlichkeit dieses Verfahrens bemerken. Er schmeichle sich mit dem Gedanken, daß eine höhere und edlere Idee noch nie aus dem Gehirn eines Menschen entsprungen sei. Ein jeder wisse, wie viel Mühe die gewöhnliche Erlernung der Künste und Wissenschaften erfordere;

er sei überzeugt, durch seine Erfindung werde die ungebildetste Person bei mäßigen Kosten und bei nur einiger körperlicher Anstrengung Bücher über Philosophie, Poesie, Staatskunst, Gesetze, Mathematik und Theologie ohne die geringste Hilfe von Geist oder Studium schreiben können. Er führte mich an einen Rahmen, wo alle seine Schüler in Reihen aufgestellt waren. Der Rahmen war zwanzig Quadratfuß groß und befand sich in der Mitte des Zimmers. Die Oberfläche bestand aus einzelnen Holzstücken von der Dicke eines Würfels, von denen jedoch einzelne größer als die anderen waren. Sie waren sämtlich durch dünne Drähte miteinander verknüpft. Diese Holzstücke waren an jeder Fläche mit überklebtem Papier bedeckt, und auf diesen Papieren waren alle Worte der Landessprache, und zwar in den verschiedenen Modis, in Konjugationen und Deklinationen, jedoch ohne alle Ordnung aufgeschrieben. Der Professor bat mich, achtzugeben, da er nun seine Maschine in Bewegung setzen wolle. Jeder Zögling nahm auf seinen Befehl einen eisernen Griff zur Hand, von denen vierzig am Rande des Rahmens befestigt waren. Durch eine plötzliche Umdrehung wurde dann die ganze Anordnung der Wörter verändert. Alsdann befahl er sechsenddreißig der jungen Leute, die verschiedenen Zeilen langsam zu lesen, und wann sie drei oder vier Wörter herausgefunden hatten, die einen Satz bilden konnten, diktierten sie dieselben den vier anderen, welche sie niederschrieben. Diese Arbeit wurde drei- oder viermal wiederholt. Die Maschine war aber so eingerichtet, daß die Wörter bei jeder Umdrehung einen neuen Platz einnahmen, sobald der Holzwürfel sich von oben nach unten drehte.

Sechs Stunden mußten die Schüler täglich bei dieser Arbeit zubringen. Der Professor zeigte mir mehrere Folianten, welche auf diese Weise mit Bruchstücken von Sätzen gefüllt waren und die er zusammenstellen wollte. Aus diesem reichen Material werde er der Welt ein vollständiges System aller Wissenschaften und Künste geben; ein Verfahren, das er jedoch verbessern und schneller beenden könne, wenn das Publikum ein Kapital zusammenbringen wolle, um fünfhundert solcher Rahmen in Lagado zu errichten, und wenn man die Unternehmer veranlassen werde, ihre verschiedenen Sammlungen zu einer gemeinsamen zu vereinigen.

Er gab mir die Versicherung, diese Erfindung habe schon von Jugend auf alle seine Gedanken in Anspruch genommen; er habe seinen Rahmen so eingerichtet, daß er den ganzen Sprachreichtum umfasse, und sogar das allgemeine Verhältnis berechne, welches in Büchern hinsichtlich der Anzahl von Partikeln, Haupt- und Zeitwörtern und anderen Satzteilen statfinde.

Der argentinische Schriftsteller und Philosoph Jorge Luis Borges (1899 – 1986) schildert in seinem Essay *Die Bibliothek von Babel* eine unendliche Bibliothek, die ihre Existenz höchstwahrscheinlich dem Fleiße des Professors aus Lagado verdankt. Die bekannte Bibliothek in Ecos *Der Name der Rose* ist der Borgesschen Bibliothek recht ähnlich. Es befinden sich in der Bibliothek von Babel unzählige – möglicherweise sogar unendlich viele – Bücher, und ein Problem ist, unter allen den sinnlosen Druckerzeugnissen die wirklich wichtigen und interessanten Bücher herauszufinden. Eine kleine Kostprobe aus dem Essay:

Vor fünfhundert Jahren stieß der Chef eines höheren Sechsecks¹ auf ein Buch, das so verworren war wie alle übrigen, das jedoch zwei Seiten gleichlautender Zeilen von

¹Ursprünglich kam auf je drei Sechsecke ein Mensch. Fälle von Selbstmord und Lungenkrankheit haben dieses Maßverhältnis zerstört. Unsäglich schwermütige Erinnerung: manchmal bin ich nächtelang über blanke Gänge und Treppen geirrt, ohne einen einzigen Bibliothekar zu finden.

wahrscheinlicher Lesbarkeit aufwies. Er zeigte seinen Fund einem ambulanten Entzifferer, der nach der Sprachform auf Portugiesisch riet; andere deuteten ihn auf Jiddisch. Vor Ablauf eines Jahrhunderts ließ sich der Sprachcharakter eindeutig bestimmen: es handelte sich um einen samojedisch-litauischen Dialekt des Guarani mit einem Einschlag von klassischem Arabisch. Auch der Inhalt wurde entziffert: es waren drei Figuren der kombinatorischen Analysis, dargestellt an Beispielen sich ins Unendliche wiederholender Variationen.

Bei Borges haben alle Bücher der Bibliothek ein festes Format: „jedes Buch besteht aus einhundertundzehn Seiten, jede Seite aus vierzig Zeilen, jede Zeile aus achtzig Buchstaben von schwarzer Farbe“. Damit ist aber die Gesamtzahl der Bücher endlich, wenn sie auch ungeheuer groß ist. Man kann leicht abschätzen, daß unser gesamtes bekanntes Universum nicht Platz genug hätte für alle diese Bücher (dies ist eine Situation, die jedem Liebhaber von Büchern wohlvertraut ist). Wenn wir diese Beschränkung aufheben und beliebig dicke Bücher zulassen, dann werden wir sofort von dem eiskalten Hauch des Unendlichen getroffen. Man kann nämlich zeigen – und diese Konstruktion geht auf Georg Cantor (1845 – 1918) zurück – daß die Bibliothek nicht *alle* Bücher enthalten kann. Angenommen, wir hätten die Bücher der Bibliothek nach irgendeinem Schema geordnet. Wir könnten nun alle Bücher in eine Liste eintragen, in der ersten Zeile steht das erste Buch (die Zeile wäre dann eben recht lang), in der zweiten das zweite Buch und so weiter. In Abbildung 9 ist der Anfang einer solchen Liste dargestellt.

Nun konstruieren wir ein Buch, welches mit Sicherheit noch nicht in der Liste aufgeführt ist. Dazu nehmen wir den ersten Buchstaben des ersten Buches, in unserem Beispiel ein A. Wir beginnen unser neu zu schreibendes Buch mit einem anderen Buchstaben, etwa mit einem D. Als zweiten Buchstaben unseres Buches wählen wir einen, der vom zweiten Buchstaben des zweiten Buches der Liste verschieden ist, und so weiter. Wir erhalten damit eine Folge von Buchstaben, von der wir sicher sein können, daß sie unter den ersten untersuchten Büchern nicht vorkommen. Denken wir uns jetzt diesen Prozeß ins Unendliche fortgesetzt – oder doch wenigstens so weit, daß die vorhandenen Bücher aufgebraucht sind – dann haben wir in der Tat ein Buch, welches sich von jedem Buch der Liste in mindestens einem Buchstaben unterscheidet. Wir haben also gezeigt, daß es keinen solchen Katalog aller Bücher geben kann! Auf diese Weise hat Georg Cantor gezeigt, daß es „unendlich viel mehr“ irrationale Zahlen als rationale Zahlen geben muß, denn die rationalen Zahlen lassen sich ebenfalls lückenlos und vollständig in eine Liste eintragen.

Auch diese Situation der unendlichen Bibliothek erinnert an das „deutliche Buch“ des Koran [29, 344]:

... Vor ihm, welcher die Geheimnisse kennt, vor ihm ist nichts verborgen, was in den Himmeln und auf Erden ist, und sei es auch nur so leicht wie eine Ameise; sei es aber auch noch kleiner oder auch schwerer, so ist es doch in dem deutlichen Buche seiner Ratschlüsse aufgezeichnet;

Unsere Konstruktion hat vielleicht gezeigt, daß dieses wahrhaft unendliche Buch nicht in unserer Liste enthalten sein muß, es kann zu der überwiegenden Mehrheit derjenigen Bücher gehören, für die in unserem Katalog kein Platz vorhanden ist.

5 Fazit

Wir fassen zusammen:

- Das Unendliche ist in die Mathematik eingebrochen trotz zögerlicher Akzeptanz und manchmal verzeifelter Gegenwehr der Mathematiker.
- Berechenbarkeit – Zufall – Chaos – Nichtberechenbarkeit führen notwendig und zwangsläufig immer wieder auf das Unendliche.
- Der Preis für die Einführung des Unendlichen ist hoch: Von Zenon von Elea bis auf den heutigen Tag lauern Paradoxa überall am Wegrand.
- Die Beschäftigung mit dem Unendlichen ist eine schwierige Gratwanderung zwischen dem Paradoxon und faszinierenden Entdeckungen.

Die Resultate von Gödel und Turing zeigen:

- Das Universum der Mathematik ist unendlich im Gegensatz zu unserer Erde oder dem physikalischen Universum. Die Ernüchterung, die dem Zeitalter der Entdeckungen folgte und die Enttäuschung, als man entdeckte, daß unser Universum räumlich und zeitlich begrenzt zu sein scheint, kann es in der Mathematik nicht geben.
- Einerseits wissen wir jetzt, daß es immer ein „Ignorabimus“ geben wird, daß nach 1 Kor 13,9 unser Wissen immer Stückwerk bleiben muß, andererseits heißt das, daß das Abenteuer Mathematik niemals enden wird.
- Es gibt hinter dem Horizont immer wieder neue Inseln im unendlichen Ozean des (noch) nicht Bekannten oder Berechneten.

Hatten wir die Situation der Mathematik vor dem Jahre 1931 auf Seite 25 mit einem geordneten Barockpark verglichen, so stellt sie sich heute als ein unendlicher Dschungel dar, von dem wir gerade eine Lichtung erforscht und vermessen haben. Diese Situation ist verheißungsvoll und faszinierend, das Abenteuer Mathematik bleibt immer wieder neu und spannend. Dies scheint auch für die nichtmathematischen Wissenschaften eine zutreffende Beschreibung des gegenwärtigen Standes zu sein. Der polnische Schriftsteller und Philosoph Stanisław Lem formulierte dies – etwas pessimistisch – in einem Interview in *Universitas* (46 (Juli 1991) 698) so:

Der Fortschritt des Wissens ist im Grunde ein dauernder Zuwachs an immer neuen Rätseln, von denen wir vorher keine Ahnung hatten. Das heißt: Wir wissen schon sehr viel darüber, wieviel wir noch nicht wissen – wir erkennen unsere Ignoranz immer besser.

Literatur

- [1] W. Ahrens. *Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte*. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1904.
- [2] Aristoteles. *Kategorien oder Lehre von den Grundbegriffen. Hermeneutica oder Lehre vom Urtheil. Übersetzt und erläutert von J. H. von Kirchmann*. Philosophische Bibliothek, Bd. 70. Erich Koschny, Leipzig, 1876.
- [3] Aristoteles. *Metaphysik. Ins Deutsche übertragen von Adolf Lasson*. Eugen Diederichs, Jena, 1907.

- [4] Hans-Peter Beck-Bornholdt and Hans-Hermann Dubben. *Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken*. rororo Taschenbücher Nr. 61154. Rowohlt, Reinbek, 2001.
- [5] Karol Berka and Lothar Kreiser. *Logik-Texte. Kommentierte Ausgabe zur Geschichte der modernen Logik*. Akademie-Verlag, 1971.
- [6] Bernard Bolzano. Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. *Abhandlungen der Königlich Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften 3. Folge*, 5, 1. Abteilung:1–60, 1817.
- [7] Gottfried August Bürger. *Wunderbare Reisen zu Wasser und zu Lande. Feldzüge und lustige Abenteuer des Freiherrn von Münchhausen, wie er dieselben bei der Flasche im Zirkel seiner Freunde selbst zu erzählen pflegt*. Insel, Frankfurt am Main, 1976.
- [8] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band: Von 1200 – 1668*. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, unveränderter Neudruck der zweiten Auflage, 1913.
- [9] Rudolf Carnap. *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften*. Ullstein Materialien, Ullstein Buch Nr. 35243. Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt/Main, Berlin, 1986.
- [10] Sean M. Carroll. Der kosmische Ursprung des Zeitpfeils. *Spektrum der Wissenschaft*, August 2008:26–34.
- [11] Gregory J. Chaitin. Randomness and mathematical proof. *Scientific American*, 232(5):47–52, May 1975.
- [12] Gregory J. Chaitin. Algorithmic information theory. *IBM Journal of Research and Development*, 21:350–359, July 1977.
- [13] Gregory J. Chaitin. Grenzen der Berechenbarkeit. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 2004:86–93.
- [14] James P. Crutchfield, J. Doyne Farmer, Norman H. Packard, and Robert S. Shaw. Chaos. *Spektrum der Wissenschaft*, Februar 1987:78–90.
- [15] Umberto Eco. *Die Suche nach der vollkommenen Sprache. Aus dem Italienischen von Burkhard Kroeber*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1997.
- [16] Albert Einstein. *Mein Weltbild. Herausgegeben von Carl Seelig, Neue, vom Verfasser durchgesehene und wesentlich erweiterte Auflage*. Ullstein Buch Nr. 65. Ullstein GmbH, Frankfurt/M – Berlin – Wien, 1970.
- [17] Albert Einstein and Max Born. *Briefwechsel 1916–1955. Geleitwort von Bertrand Russell, Vorwort von Werner Heisenberg*. Ullstein-Buch; Nr. 34345: Ullstein-Sachbuch. Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt am Main, Berlin, 1986.
- [18] Reinhard Finster and Gerd van den Heuvel. *Gottfried Wilhelm Leibniz in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten*. rowohlts monographien 50481. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 5. Auflage Januar 2005, Oktober 1990.
- [19] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931.

- [20] Jürgen Hamel. *Nicolaus Copernicus, Leben, Werk und Wirkung. Mit einem Geleitwort von Owen Gingerich*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin · Oxford, 1994.
- [21] Hesiod. *Sämtliche Werke. Deutsch von Thassilo von Scheffer. Mit einer Übersetzung der Bruchstücke aus den Frauenkatalogen herausgegeben von Ernst Günther Schmidt*. Sammlung Dieterich, Band 38. Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Leipzig, 2. Auflage, 1965.
- [22] David Hilbert. Naturerkennen und Logik. *Die Naturwissenschaften*, 18(47–49):959–963, 28. November 1930.
- [23] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band. Aus dem Amerikanischen von Philipp Wolff-Windegg und Hermann Feuersee unter Mitwirkung von Werner Alexi, Ronald Jonkers und Günter Jung*. Verlag Klett-Cotta, Stuttgart, 1985.
- [24] Klaus Jöhnk. Chaos in Planktongemeinschaften (Forschung aktuell). *Spektrum der Wissenschaft*, Juli 2008:16,17,19.
- [25] Immanuel Kant. *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt*. bey Johann Friedrich Petersen, Königsberg und Leipzig, 1755.
- [26] Immanuel Kant. *Werke in zwölf Bänden. Theorie-Werkausgabe, herausgegeben von Wilhelm Weischedel*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1968.
- [27] Kluge. *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. Bearbeitet von Elmar Seebold*. Walter de Gruyter, Berlin · New York, 23., erweiterte Auflage, 1999.
- [28] Arthur Koestler. *Die Nachtwandler. Entstehungsgeschichte unserer Welterkenntnis*. suhrkamp taschenbuch 579. Suhrkamp Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main, 1980.
- [29] *Der Koran. Das heilige Buch des Islam. Nach der Übertragung von Ludwig Ullmann neu bearbeitet und erläutert von L. W.-Winter*. Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1959.
- [30] *Leibniz. Ausgewählt und vorgestellt von Thomas Leinkauf*. Philosophie jetzt! 30691. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München, Mai 2000.
- [31] Georg Christoph Lichtenberg. *Schriften und Briefe. Erster Band: Sudelbücher, Zweiter Band: Sudelbücher II. Materialhefte, Tagebücher, Dritter Band: Aufsätze, Entwürfe, Gedichte, Erklärung der Hogarthschen Kupferstiche, Vierter Band: Briefe, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band I und Band II von Wolfgang Promies, Schriften und Briefe. Kommentar zu Band III. Herausgegeben von Wolfgang Promies*. Zweitausendeins, Frankfurt am Main, 6. Auflage, 1998.
- [32] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, March 1963.
- [33] Karl Marx. *Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie, Erster Band (= Band 23 der Werke von Marx und Engels). Buch I: Der Produktionsprozeß des Kapitals. Nach der vierten, von Friedrich Engels durchgesehenen und herausgegebenen Auflage, Hamburg, Verlag von Otto Meissner, 1890*. Dietz Verlag, Berlin, 1962.

- [34] Karl Marx. *Mathematische Manuskripte. Herausgegeben, eingeleitet und kommentiert von Wolfgang Endemann.* Scriptor-Taschenbücher Sozialwissenschaften; S 10: Beiträge zur Theorie der Gesellschaft. Scriptor-Verlag, Kronberg, Ts., 1974.
- [35] Karl von Meyenn, editor. *Lust an der Erkenntnis. Triumph und Krise der Mechanik. Ein Lesebuch zur Geschichte der Physik.* Serie Piper, 1146. R. Piper Verlag, München, Zürich, Februar 1990.
- [36] Jürgen Mittelstraß. *Die Möglichkeit von Wissenschaft.* suhrkamp taschenbuch wissenschaft 62. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1974.
- [37] Jaques Monod. *Zufall und Notwendigkeit. Philosophische Fragen der modernen Biologie. Deutsch von Friedrich Giese, Vorrede zur deutschen Ausgabe von Manfred Eigen.* dtv 1069. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1975.
- [38] Ernest Nagel and James E. Newman. *Der Gödelsche Beweis. Deutsche Übersetzung Hubert Schleichert.* Scientia Nova. R. Oldenbourg Verlag, München, 4., unveränderte Auflage, 1987.
- [39] Ewald Oetzel and Wolfgang Polte. *Der gescholtene Thales. Anekdotisches um Gelehrte und Gelehrte aus zwei Jahrtausenden. Mit Illustrationen von Manfred Bofinger.* Urania-Verlag, Leipzig · Jena · Berlin, 1989.
- [40] Publius Ovidius Naso. *Metamorphosen (Verwandlungen). Übersetzung Johann Heinrich Voß, 1798, mit Ergänzungen von Reinhart Suchier, 1889.* Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1990.
- [41] Roger Penrose. *Computerdenken, des Kaisers neue Kleider oder Die Debatte um künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik, Mit einem Vorwort von Martin Gardner und einem Vorwort zur deutschen Ausgabe von Dieter Wandschneider.* Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, Heidelberg, 1991.
- [42] Platon. *Sämtliche Werke in drei Bänden.* Verlag Jakob Hegner, Köln und Olten, 5. Auflage, 1967.
- [43] Gero von Randow. *Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten.* rororo science, 61905. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek, 2004.
- [44] Bertrand Russell. *Mysticism and Logic and other Essays.* Allen & Unwin, London, 2nd edition, 1950.
- [45] R. M. Sainsbury. *Paradoxien.* Reclams Universal-Bibliothek Nr. 8881. Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1993.
- [46] Ian Stewart. *Das Rätsel der Schneeflocke. Die Mathematik der Natur, Aus dem Englischen von Andrea Kamphuis, Brigitte Post, Regina Schneider und Sebastian Vogel.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg · Berlin, 2002.
- [47] Jonathan Swift. *Gullivers Reisen. Reisen in verschiedene fernliegende Länder der Erde von Lemuel Gulliver, erst Wundarzt, später Kapitän verschiedener Schiffe.* Die Fischer Bibliothek der hundert Bücher, Exempla classica 15. Fischer Bücherei KG, Frankfurt am Main und Hamburg, 1960.
- [48] Alan M. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 42:230–265, 1937.

- [49] Pierre-François Verhulst. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Corresp. Math. Phys.*, 10:113–121, 1838.
- [50] Ludwig Wittgenstein. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Herausgegeben von G. E. M. Anscombe, Rush Rhees, G. H. von Wright.* Werkausgabe, Band 6, suhrkamp taschenbuch wissenschaft stw 506. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 5. Auflage, 1994.
- [51] Erich Worbs. *Carl Friedrich Gauß. Ein Lebensbild.* Koehler & Amelang, Leipzig, Zweite, verbesserte Auflage, 1955.

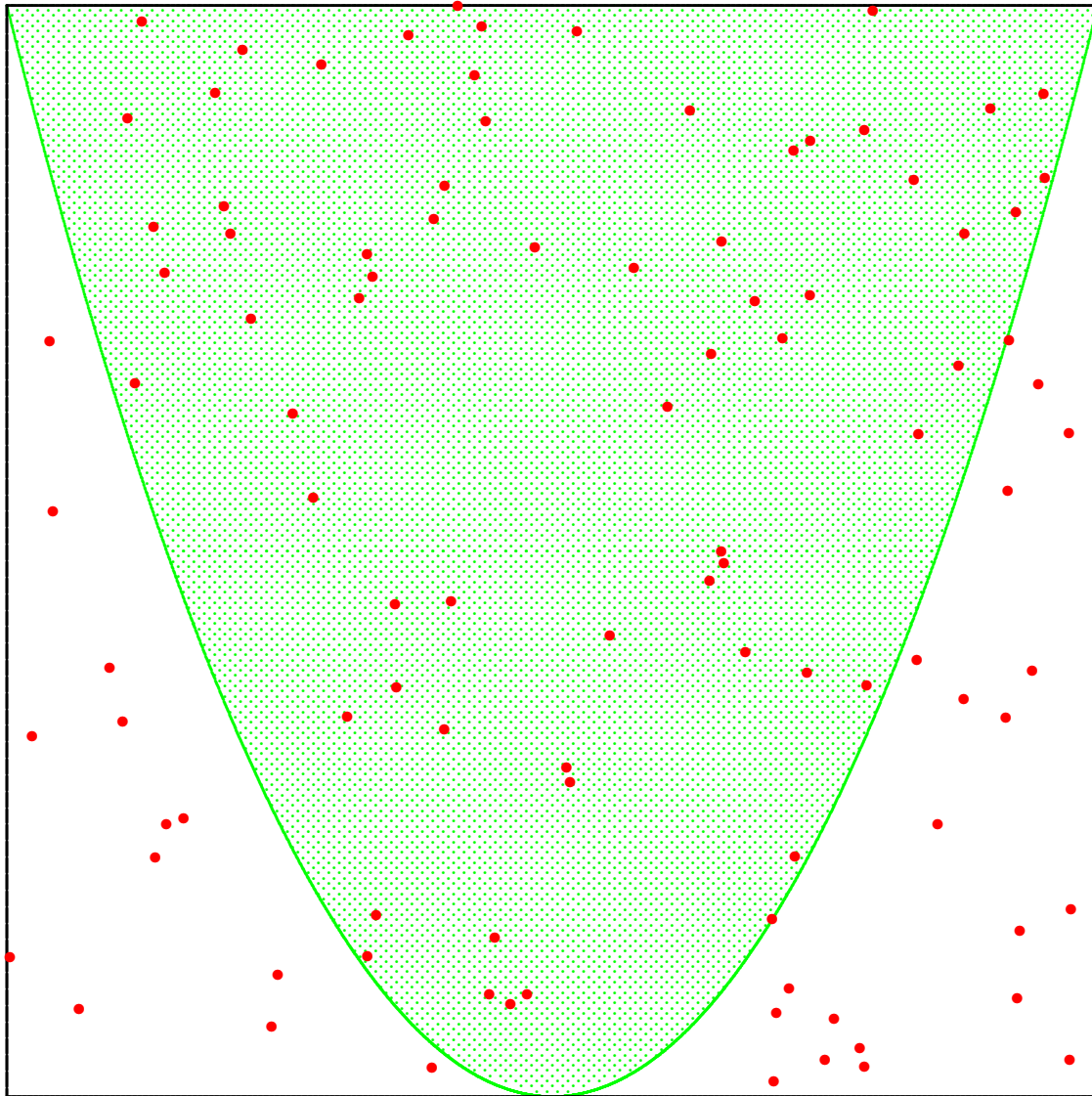


Abbildung 4: Berechnung einer Fläche (grün) vermittle zufällig gewählter Punkte (rot).

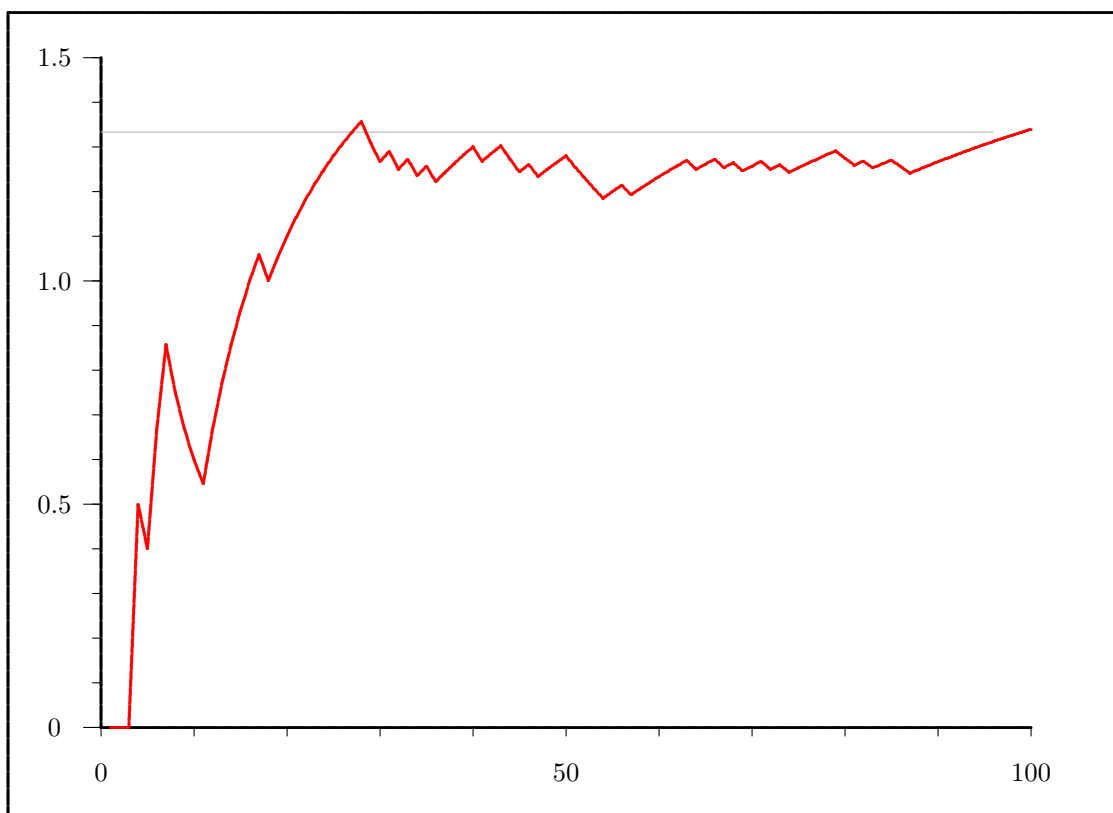


Abbildung 5: Berechnung eines Flächeninhalts durch ein Zufallexperiment.

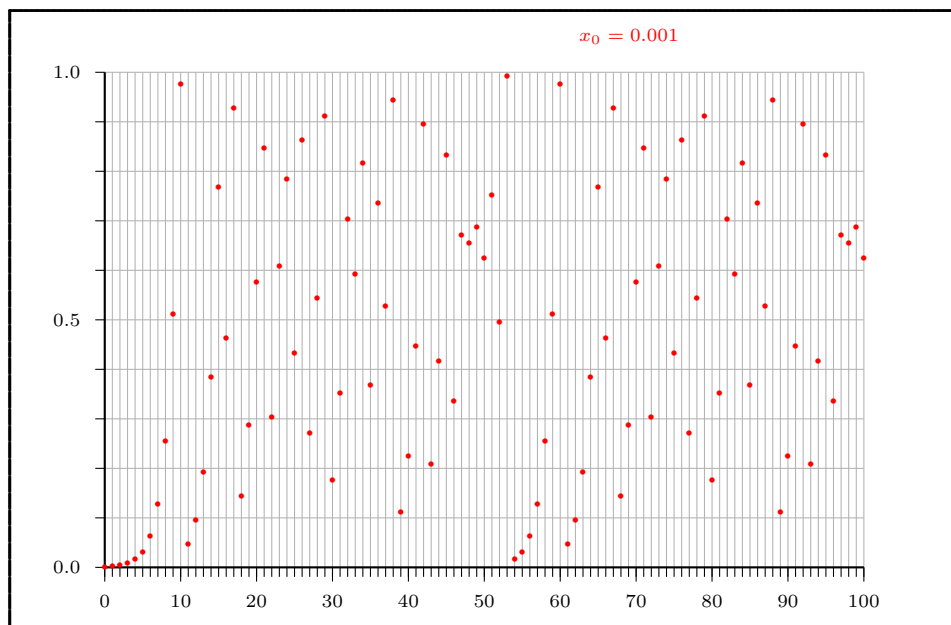


Abbildung 6: Die Bäckertransformation für den Startwert $x_0 = 0.001$.

Auf der horizontalen Achse sind die Nummern der Bearbeitungsvorgänge (Iterationen) aufgetragen, die vertikale Achse gibt die Position des betrachteten Punktes an, der sich am Anfang an der Stelle $x_0 = 0.001$ befand.

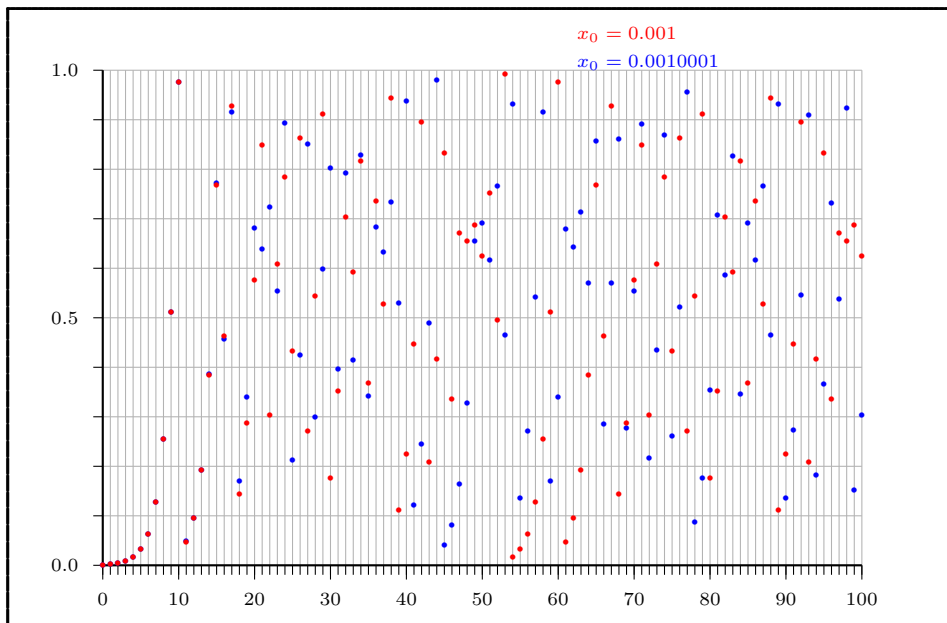


Abbildung 7: Vergleich zweier Verläufe der Bäckertransformation.

Die roten Punkte stellen die Positionen eines Punktes mit Anfangswert $x_0 = 0.001$ dar, die blauen Punkte die Positionen eines Punktes mit Anfangswert $x_0 = 0.0010001$.

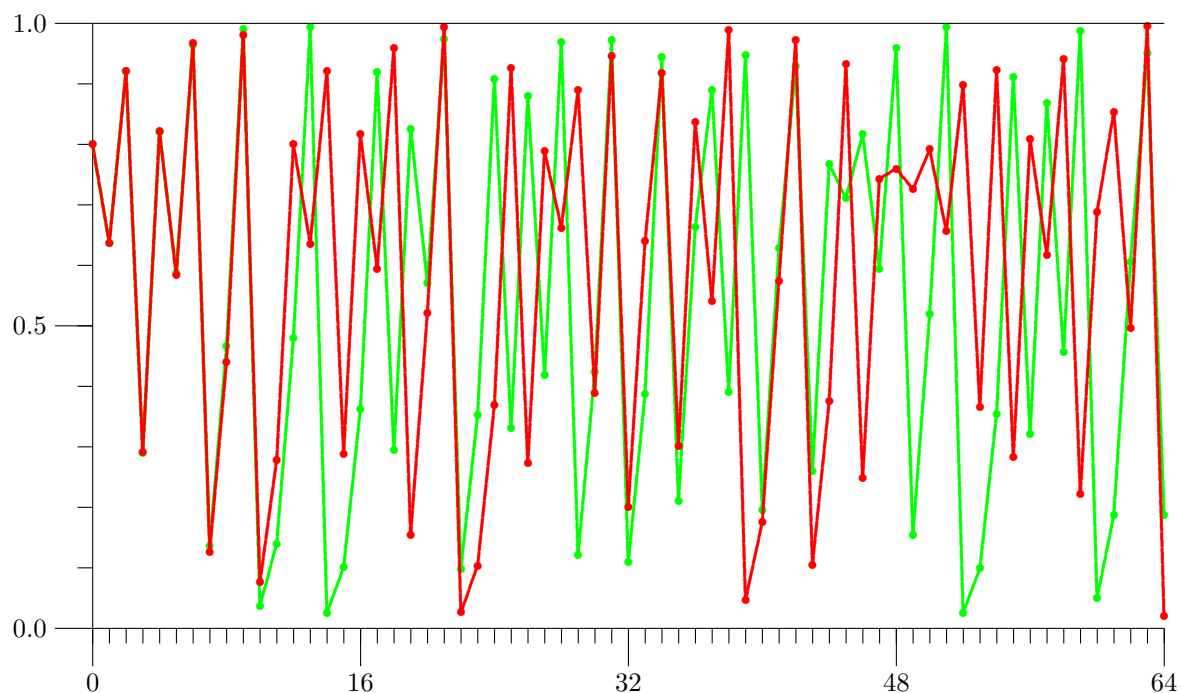


Abbildung 8: Chaos bei der Verhulst-Gleichung.

Es wurde $r = 3.98$ gewählt und einmal $x_0 = 0.8$ (rote Kurve) sowie $x_0 = 0.8001$ (grüne Kurve).

Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde. Und die Erde war wüst und leer,
 Müßiger Leser. – Ohne Schwur magst du mir glauben, daß ich wünsche, dieses
 Tief ist der Brunnen der Vergangenheit. Sollte man ihn nicht unergründlich
 I wish either my father or my mother, or indeed both of them, as they were
 Ich wollte, entweder mein Vater oder meine Mutter oder lieber alle beide –
 Es eröffnet sich zu dieser unserer Zeit (von welcher man glaubt, daß es die
 Die Eltern lagen schon und schliefen, die Wanduhr schlug ihren einförmigen
 Die Nachtstunde schlug; ich hüllte mich in meine abenteuerliche Vermummung
 Jemand mußte Josef K. verleumdet haben, denn ohne daß er etwas Böses
 Mein Vater war ein Bauernsohn aus einem uralten Dorfe, welches seinen
 Das Rad an meines Vaters Mühle brauste und rauschte schon wieder recht
 Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d. h. zu

Aüeiwöthur i → Dinosaurier

Abbildung 9: Anfänge von Büchern.