

# Vom endlichen Leben zur unendlichen Mathematik

Ulrich Eckhardt  
Universität Hamburg  
MIN-Fakultät  
Department Mathematik  
— Optimierung und Approximation —  
Bundesstraße 55  
20 146 Hamburg  
E-Mail: [Eckhardt@math.uni-hamburg.de](mailto:Eckhardt@math.uni-hamburg.de)  
<http://www.math.uni-hamburg.de/home/eckhardt/>

Wir schicken uns wieder einmal an, eine Anzahl von jungen Menschen in die „Welt“ zu entlassen. Es werden sich sicher einige die bange Frage stellen: „Gibt es ein Leben nach dem Examen?“. Vor vierundzwanzig Jahren haben wir versucht, diese Frage „wissenschaftlich“ zu untersuchen. Wir veranstalteten ein Symposium mit dem Titel *Mathematik als Beruf*. Eine Kurzdarstellung der Ergebnisse wurde in der Rubrik *Monatsspektrum* der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaft* veröffentlicht [1]. Es handelt sich dabei um eine journalistische Einschätzung, die angegebenen Fakten sind nicht so ganz korrekt. Ich verkürze weiter, indem ich nur einige Kernsätze zitiere, die mir wichtig erscheinen:

- *Kennzeichnend für den Beruf des Mathematikers ist, daß es ihn nicht gibt.* In der Tat, nur wenige ernähren sich nach dem Examen durch Mathematik, aber nahezu alle finden einen qualifizierten Arbeitsplatz. Das „Produkt“, welches in diesem Hause hergestellt wird, ist vielseitig einsetzbar und gefragt.
- *Mathematik behauptet sich – trotz aller Spezialisierung – als interdisziplinäre, ja universelle Wissenschaft.* Diese Aussage hat mir sehr gefallen, sie drückt das aus, was ich immer von meiner „Lieblingswissenschaft“ behauptet habe.
- *... die Praktiker aus der Industrie bewerteten sogar die traditionellen Inhalte und Methoden der Hochschullehre durchweg beifällig.* Ich meine, daß man diese Aussage auch heute noch richtig ist. Die häufig geäußerte Klage über veraltete Lehrinhalte mag für jedes Fach berechtigt sein, nicht aber für die Mathematik!
- *Die Diskussion war derart beängstigend harmonisch, daß man sich fragen mußte, ob die Mathematiker wirklich in dieser Welt leben.* Hierzu kein Kommentar!

---

Vortrag am 11. Juli 2007 anlässlich der 28. Absolventenfeier im Hörsaal 2 des Geomatikums in Hamburg.

Doch nun genug der „allgemeinpolitischen“ Aussagen, kommen wir zum Thema des heutigen Abends! Man fragt mich gelegentlich, was denn ein Mathematiker den lieben langen Tag so tut. Etwa immer wieder nachprüfen, ob wirklich  $2 \times 2 = 4$  ist? Sie wissen vielleicht, daß Mathematik eine ungemein nützliche Wissenschaft ist. Fast alles, was uns umgibt, hat mit Mathematik zu tun, vom MP3-Player bis zum Airbus. Aber nützliche Dinge sind zuweilen langweilig. Wenn wir einmal nicht nützlich sind, dann spielen wir. Unsere Spiele haben allerdings immer wieder die überraschende Eigenschaft, zu eminent nützlichen Erkenntnissen zu führen. Ich beginne also zunächst einmal mit einem Spiel.

## 1 Das Spiel „Life“

Im Jahre 1970 veröffentlichte Martin Gardner die Beschreibung eines Spiels, das von John Horton Conway erfunden worden war [15]. Dieses Spiel – *Life* genannt – ist höchst einfach: Auf einem Spielfeld, welches man sich etwa als ein „sehr großes“ Schachfeld denken kann, sind auf gewissen Feldern Steine plazierte. Wir modellieren das Schachfeld durch Ein regelmäßiges Punktegitter in der Ebene. Jeder Gitterpunkt hat genau acht Nachbarn im Gitter: die beiden horizontalen Nachbarn, die beiden vertikalen und die vier diagonal benachbarte Punkte (siehe Abbildung 1).

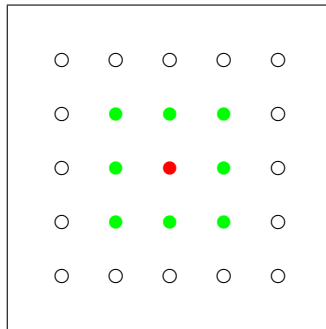


Abbildung 1: Die Umgebung (grün) eines Gitterpunktes (rot).

Die Spielregeln sind nun wie folgt:

**0. Start** Man beginnt mit irgendeiner Ausgangskonfiguration von besetzten Feldern.

### Erster Halbschritt

**Todgeweihte Spielsteine** Ein Spielstein auf einem Feld, welches vier oder mehr (vom Zentralpunkt verschiedene) besetzte Nachbarfelder hat, wird als „sterbend“ wegen Überbevölkerung markiert.

Ein Spielstein auf einem Feld, welches ein oder kein besetztes Nachbarfeld hat, wird als „sterbend“ wegen Vereinsamung markiert.

**Geburtsfelder** Jedes nicht besetzte Feld, welches genau drei besetzte Nachbarfelder hat, ist ein *Geburtsfeld*.

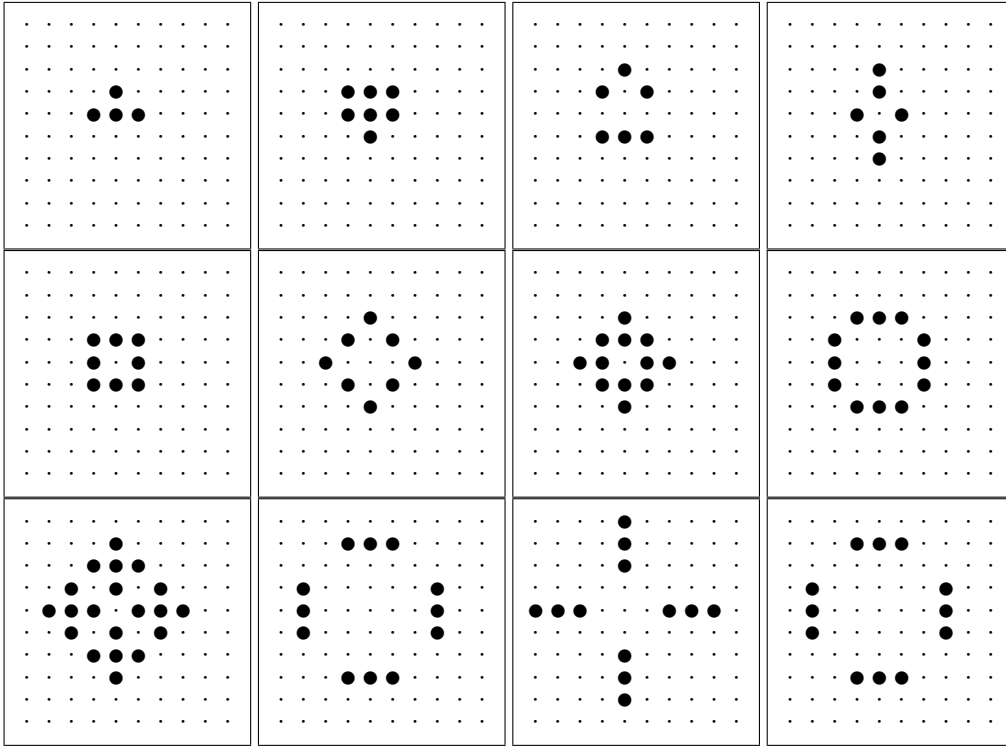


Abbildung 2: Eine Spielkonfiguration, welche mit Periode 2 endet.

**Zweiter Halbschritt** Man entfernt alle „todgeweihten“ Spielsteine und besetzt alle Geburtsfelder mit je einem Spielstein.

Wir wollen uns einmal diesen Vorgang an einem einfachen Beispiel ansehen. In Abbildung 2 ist die Abfolge der Züge für eine Ausgangskonfiguration dargestellt, die aus vier Steinen besteht. Wie man sieht, geht das Spiel mit dem zehnten Zug in einen periodischen Zustand mit der Periode zwei über. Diese periodische Konfiguration erhielt den Namen *Verkehrsampel* (*Traffic Lights*, [15]). Es gibt umfangreiche Sammlungen von interessanten Ausgangskombinationen, die mehr oder weniger phantasievolle Namen tragen.

Das Spiel ist sozusagen ein „Solitärspiel“ für einen Computer. Wenn man dieses Spiel auf einem Schachbrett oder gar einem Blatt Papier spielen möchte, dann wird es sehr schnell unübersichtlich. Auf einem Computer hingegen ist es sehr leicht zu programmieren. Dem menschlichen Spieler verbleibt es, die Ausgangskonfiguration festzulegen und dann zu beobachten, was alles geschieht.

Das Spiel verbreitete sich alsbald wie eine hochansteckende Seuche überall dort, wo Computer zur Verfügung standen. In den Kaffeepausen solcher Institutionen wurde nur noch über Spielkonstellationen von *Life* gesprochen. Es wurde sogar vermutet, daß Conway von der Sowjetunion bezahlt worden wäre, um einen erheblichen Teil der kommerziellen und militärischen Computerkapazität

des Westens zu absorbieren. Man hat behauptet, daß seit 1970 weltweit mehr Computerzeit für dieses Spiel aufgewendet wurde als für irgendeine andere Einzelanwendung. Übrigens: MATLAB bietet das Spiel als Demonstrationsprogramm an.

Eine ganz besondere Rolle spielt der „Gleiter“ (Abbildung 3). Diese Konfiguration ist bis auf eine Translation periodisch mit Periode vier. Sie läuft also mit konstanter Geschwindigkeit diagonal über das Spielfeld.

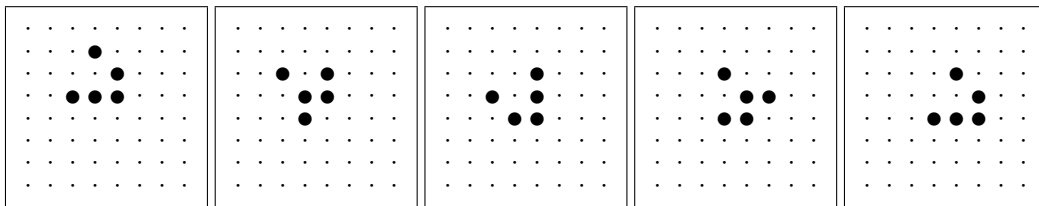


Abbildung 3: Die Entwicklung des Gleiters.

Martin Gardner hatte in seinem Artikel darauf hingewiesen, daß John Horton Conway einen Preis von 50 \$ ausgesetzt hatte für einen Beweis – oder ein Gegenbeispiel – für die folgende Vermutung:

Keine aus endliche vielen Spielsteinen bestehende Ausgangskonfiguration kann sich unbegrenzt (was die Anzahl der Steine anbelangt) vermehren.

Den Preis verdiente sich ein Team am Massachusetts Institute of Technology. R. William Gosper jr. entdeckte zusammen mit seinen Kollegen auf „halbexperimentellem“ Weg eine Konfiguration, die *Gleiterkanone* genannt wurde [16]. Diese Konfiguration geht nach je 30 Zügen in den Ausgangszustand zurück, wobei dann jeweils ein Gleiter „abgeschossen“ wird. Damit ist gezeigt, daß die aus der Gleiterkanone entstehenden Konfigurationen unbeschränkt wachsen (siehe Abbildung 4).

Es stellte sich nun bald heraus, daß das Spiel „Life“ noch weitere bestürzende Eigenschaften hat. Schon Conway hatte bemerkt, daß man Gleiterzüge als Datenströme auffassen kann. Durch die typische Gleiterbewegung – Translation um einen Diagonalschritt in jeweils vier Zügen – ist eine Gerade in der digitalen Ebene festgelegt, längs welcher sich der Gleiter bewegt. Man kann auf dieser Geraden eine Teilmenge von Gitterpunkten auszeichnen, so daß je zwei aufeinanderfolgende einen bestimmten – nicht zu kleinen – Abstand voneinander haben. Auf jeden dieser ausgezeichneten Punkte setzt man dann entweder einen Gleiter – dies symbolisiert den Binärwert 1 – oder keinen Gleiter – eine 0. Bereits im Jahre 1971 hatte Martin Gardner diese Beobachtung gemacht und die Frage gestellt, ob sich nicht auf dem Life-Spielfeld eine universelle Turing-Maschine simulieren lasse [16]. Eine Turing-Maschine ist ein ganz einfacher Rechner, der von Alan Mathison Turing (1912 – 1954) im Jahre 1936 eingeführt wurde, um höchst theoretische Fragen zu klären (siehe etwa [33, Abschnitt 2.2]). Michael D. Beeler, der ebenfalls in dem MIT-Team arbeitete, fand eine Konfiguration, die ein NOT-Gatter für einen Gleiterzug realisierte. Bald folgten AND- und

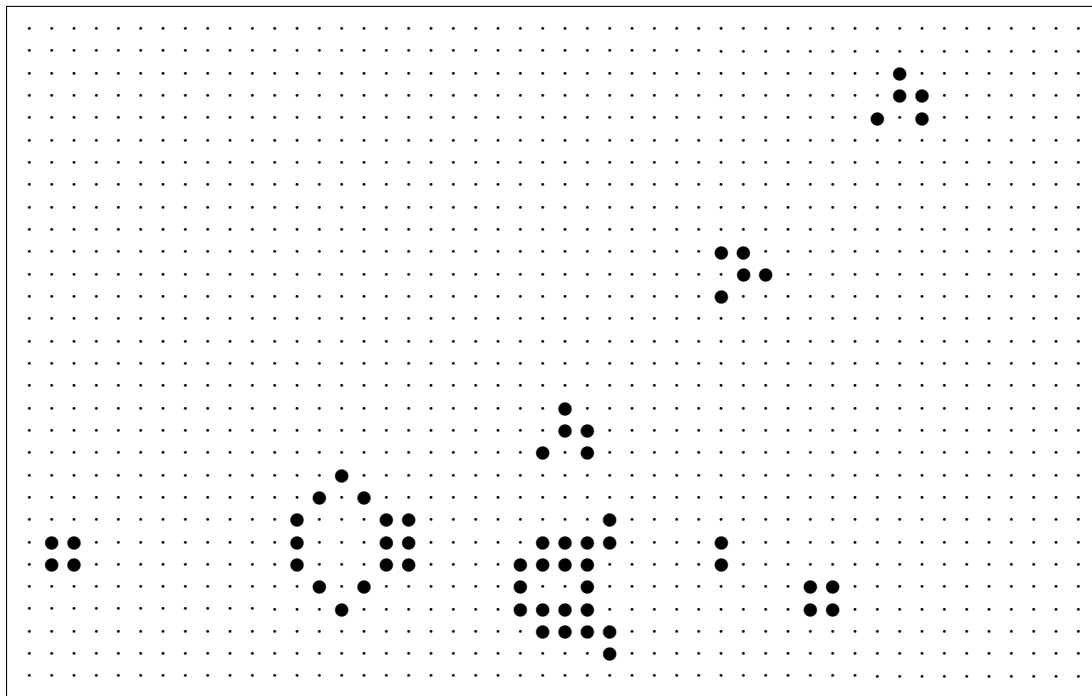


Abbildung 4: Die Gleiterkanone von R. William Gosper jr.

OR-Gatter. Hiermit hatte man alle Bausteine zusammen, um durch gewisse Life-Konfigurationen eine Turing-Maschine zu simulieren. Man kann im Internet eine solche Realisierung einer Turing-Maschine mittels einer Life-Konfiguration finden, die von Paul Rendell entwickelt wurde [31].

Nun weiß man, daß man jeden denkbaren Rechner durch eine Turing-Maschine simulieren kann, eine Turing-Maschine ist ein in einem sehr allgemeinen Sinne „universelles“ Modell eines Rechners: Jeder nur „vorstellbare“ Rechner kann durch eine solche Maschine simuliert werden [33, Abschnitt 2.2]. Für Turing-Maschinen gibt es das sogenannte Halteproblem [33, Abschnitt 2.6]: Kann man aus den Daten einer solchen Maschine und aus den Eingabedaten schließen, ob die Maschine nach Eingabe der Daten nach endlich vielen Schritten anhält oder nicht? Turing zeigte, daß dies grundsätzlich nicht allgemein möglich ist. Für unser Spiel heißt das, daß etwa die Frage, ob eine bestimmte Konfiguration nach endlich vielen Schritten „ausstirbt“, grundsätzlich nicht entschieden werden kann.

Unabhängig von diesen Überlegungen hat das Spiel noch Bedeutung als einfaches – und damit relativ überschaubares – Modell eines sogenannten „zellulären Automaten“ ([15, 14], auch [16, 3] und [19]). Hierbei handelt es sich um eine Anordnung einer „großen“ Anzahl von Prozessoren, die etwa auf den Gitterpunkten in der Ebene platziert werden, und von denen jeder mit gewissen Nachbarn kommuniziert. Die Idee des zellulären Automaten ist etwa so alt wie der Digital- oder Elektronenrechner selbst. Erste Untersuchungen dazu stellte John von Neumann (1903–1957)

(mit maßgeblicher Unterstützung durch Stanislaw Ulam; 1909–1984) in den frühen fünfziger Jahren an. Sie waren getragen von dem Wunsch, ein einfaches, jedoch hinreichend komplexes System zu entwickeln, das sich wie ein Lebewesen selbst reproduzieren konnte. Von Neumann hatte einen zellulären Automaten vorgeschlagen, bei dem jeder Prozessor nicht weniger als 29 Zustände (anstelle der vier Zustände „besetzt und überlebend“, „besetzt und todgeweihet“, „nicht besetzt und nicht Geburtszelle“ und „nicht besetzt und Geburtszelle“ des Conwayschen Spiels) besitzt. Eine gewisse Startmenge von etwa 200 000 Zellen reproduziert sich dann selbst [16]. Der Grund für diesen enormen Aufwand war, daß der von von Neumann benutzte zelluläre Raum die Eigenschaft haben sollte, eine allgemeine Turing-Maschine zu simulieren.

Es sollte hier erwähnt werden, daß ein zellulärer Automat eine spezielle „Architektur“ eines parallel arbeitenden Rechners darstellt. Aus diesem Grunde hat man sich seit den Tagen von John von Neumann intensiv mit solchen Automaten befaßt. Das Prinzip des zellulären Automaten wurde beispielsweise durch die sogenannten *Transputer* realisiert, die von der Firma Inmos Anfang der achtziger Jahre hergestellt wurden.

Eine andere Motivation, sich wissenschaftlich mit zellulären Automaten zu befassen, liefert die Erforschung der visuellen Wahrnehmung. Man kann recht gut angeben, welche Datenmengen unsere Wahrnehmungssensoren von der Außenwelt aufnehmen, etwa beim Fernsehen weiß man sogar ziemlich präzise, wieviel dem Auge angeboten wird. Beim HDTV sind dies einige 100 MBit/s. Im Auge hat man ca. 120 Millionen lichtempfindliche Zellen, aber nur etwa eine Million Sehnervenfasern, das heißt, es findet schon im Auge eine Datenreduktion von 120 : 1 statt. Diese Datenreduktion muß bereits in der Retina des Auges vorgenommen werden, man beobachtet auch, daß die Sinneszellen dort in der Art eines zellulären Automaten miteinander vernetzt sind.

Es gibt eine Reihe von Wissenschaftlern, die die „finite nature“-Theorie vertreten. Edward Fredkin, der zu dem legendären MIT-Team gehörte, ist einer der Vertreter dieser Theorie. Im Jahre 2004 publizierte er einen Artikel, in dem er seine Ansicht darlegte. Demnach gilt [12]:

- At some scale, space, time and state are discrete.
- The number of possible states of every finite volume of space–time is finite.
- There are no infinities, infinitesimals, or locally generated random variables.
- The fundamental process of physics must be a simple deterministic digital process.

Ein für MATHEMATICA-Nutzer bekannterer Autor, der diese Theorie vertritt, ist Stephen Wolfram [39]. Es gibt inzwischen auch Physiker, die aus gewissen Aspekten der String-Theorie eine „finite nature“ für denkbar halten. Im Jahre 2004 erschien ein Artikel von Lee Smolin [34] zu diesem Thema. Demnach gibt es eine kleinstmögliche Zeiteinheit, die Planck-Zeit von  $10^{-43}$  s und eine kleinstmögliche Planck-Länge von  $10^{-33}$  cm. Wenn man die „finite nature“-Hypothese akzeptiert, dann ist – und dies behaupten die Vertreter dieser Annahme – das Universum nichts anderes als ein Computer: Eine endliche Anzahl von Elementen – die „Teilchen“ – wechselwirken miteinander und ändern in diskreten Zeitschritten ihren Zustand, der wiederum mit endlich vielen Zustandsvariablen beschrieben werden kann. Da man jeden Computer durch eine Life-Konfiguration simulieren kann, ist die Vorstellung nicht ganz abwegig, daß unser gesamtes Universum nichts anderes ist, als ein gigantisches Life-Spiel, welches ein gelangweilter Engel auf einem himmlischen Computer aufgelegt hat.

Übrigens: Einstein wäre von der „finite nature“-Hypothese möglicherweise begeistert gewesen: Hier hätte er – vielleicht auf eine Weise, die ihm nicht behagt hätte – die „verborgenen Parameter“ die die Welt wieder deterministisch machen. Der Dämon von Laplace wäre ein Life-Spieler – der Demiurg der Gnostiker, der unsere Welt erschaffen hat, als Gott gerade nicht anwesend war, und der dabei unsere Welt fürchterlich vermurxt hat, welches der Grund ist für alle Unzulänglichkeiten dieser Welt. Irgendwann kommt Gott von seiner Reise zurück und wird den ungeschickten Baumeister kräftig beim Ohr nehmen! Die Frage ist dann, was mit unserer Welt geschehen soll. Möglicherweise gibt es keine andere Rettung, als den Computer einfach auszuschalten! Dieses Bild vom „fehlbaren Weltschöpfer“ hat der polnische Philosoph und Schriftsteller Stanisław Lem häufig benutzt.

Das Bild vom Universum, welches als Programm auf einer gigantischen Maschine abläuft, so daß wir selbst nur Unterprogramme des „Welt“-Programms sind, hat nicht nur Physiker, Philosophen und vielleicht auch Theologen fasziniert, auch verschiedene Schriftsteller haben sich des Themas bemächtigt. Zu nennen wäre der Roman *Welt am Draht* von Daniel F. Galouye [13] oder auch *UBIK* von Philip K. Dick [4]. Diese Vorstellung *Leben wir in einer Simulation* wurde von Christoph Pöppe in einem Artikel im *Spektrum der Wissenschaft* diskutiert [28]. Der polnische Schriftsteller und Philosoph Stanisław Lem hat sich in seinen Werken *Phantastik und Futorologie* [24, 25] und *Summa technologiae* [23] ausgiebig mit der Frage befaßt, wie eine Welt aussehen könne, in der der Mensch zwar nicht Teil eines Computerprogrammes ist, in der er aber nicht mehr zwischen „realer Realität“ und „virtueller Realität“ zu unterscheiden vermag. Lem hat für derartige Überlegungen den Begriff *Phantomatik* geschaffen. Seine Bücher erschienen in Deutschland Ende der siebziger Jahre. Mir scheint, daß sie heute aktueller sind als vor dreißig Jahren.

Eine erschreckende Vorstellung, welche nicht als Science Fiction, sondern allen Ernstes vorgetragen wird, kommt aus dem Forschungsgebiet der *Künstlichen Intelligenz*. Ray Kurzweil [21, 22] entwirft ein phantastisches Zukunftsbild. Aus der Tatsache, daß die Leistungen der Computer – nach dem sogenannten *Moore'schen Gesetz* – exponentiell wachsen, schließt er, daß etwa im Jahre 2019 ein Computer für 1000 Dollar die Rechenleistung des menschlichen Gehirns haben werde. Abgesehen davon, daß solche Prophezeiungen schon seit Jahrzehnten gemacht wurden, nur daß der jeweilige Zeitpunkt, an dem die Computer uns überholen, jedesmal weiter in die Zukunft projiziert wurde, scheint diese Extrapolation reichlich gewagt. Kurzweil geht von der Anzahl der aktiven Elemente im Gehirn und im Computer aus. In Tabelle 1 sind einige Leistungszahlen für das menschliche Gehirn und für (heutige) Computer zusammengestellt. Wie man sieht, sind die Computer, was die „aktiven Elemente“ anbelangt, nur noch um einen Faktor 100 von uns entfernt. Man darf aber nicht, wie es hier geschehen ist, Transistoren mit Nervenzellen vergleichen. In einem gewissen Sinne sind Nervenzellen „Prozessoren“, das heißt, sie sind zu Rechenleistung fähig. Ein normaler Computer hat aber nur einige wenige Prozessoren in diesem Sinne, die Mehrzahl seiner „aktiven“ Elemente sind Speicherzellen. Wahrhaft dramatisch wird es aber, wenn man die Anzahl der Kommunikationsverbindungen betrachtet. Jede Nervenzelle des Gehirns ist über Schaltstellen, die sogenannten *Synapsen*, mit etwa 1000 anderen Nervenzellen verbunden, während bei einem Computer mit gängiger Architektur die Speicherzellen mit einem Prozessor verbunden sind. Das heißt, daß das Gehirn hochkomplex verschaltet ist. Bei dem Spiel *Life* war jede Zelle mit acht Nachbarn verbunden, die *künstlichen neuronalen Netze*, von denen ich weiß,

|                         | Gehirn                     | Computer             |
|-------------------------|----------------------------|----------------------|
| aktive Elemente         | $\approx 10^{11}$          | $\approx 10^9$       |
| Verbindungen            | $\approx 10^{14}$ Synapsen | $\approx 10^9$       |
| Architektur             | hochparallel               | seriell              |
| Speicherung             | assoziativ                 | adreßbasiert         |
| Schaltzeit              | $\approx 10^{-3}$ s        | $\approx 10^{-9}$ s  |
| elem. Vorgänge (theor.) | $\approx 10^{13}$ /s       | $\approx 10^{18}$ /s |
| elem. Vorgänge (tats.)  | $\approx 10^{12}$ /s       | $\approx 10^{10}$ /s |

Tabelle 1: Das menschliche Gehirn und der Computer.

haben höchstens 50 Prozessoren, die auf recht übersichtliche Weise miteinander verbunden sind<sup>1</sup>. Das heißt, daß ein gewöhnlicher Computer in seinem Aufbau keinerlei Ähnlichkeit mit einem Gehirn hat und daß ein neuronales Netz noch nicht einmal ein „Gehirnchen“ ist. Jede Ameise ist um Größenordnungen komplexer verschaltet, als die modernsten neuronalen Netze. Der einzige Parameter, der bei dem menschlichen Gehirn wesentlich weniger leistungsfähig ist als bei Computern, ist die Schaltzeit. Hier rächt es sich beim natürlichen System, daß an den Synapsen die Natur die ihr geläufigere chemische Nachrichtenübermittlung gewählt hat, die eben nicht so schnell reagiert, wie die elektrische.

Der bekannte US-amerikanische Robotiker Hans Moravec vertritt die These, daß das menschliche Bewußtsein die im „Computer“ Gehirn implementierte „Software“ ist [27]. Er geht dabei so weit, diese Software für das eigentliche „Wesen“ des Menschen zu halten [27, S. 117]:

Body-identity assumes that a person is defined by the stuff of which a human body is made. Only by maintaining continuity of body stuff we can preserve an individual person. Pattern-identity, conversely, defines the essence of a person, say myself, as the *pattern* and the *process* going on in my head and body, not the machinery supporting that process. If the process is preserved, I am preserved. The rest is mere jelly.

Er zieht daraus die Konsequenz, daß es in naher Zukunft möglich sei, dieses „Wesen“ des Menschen auf einen Computer beziehungsweise einen Roboter zu übertragen und den menschlichen Körper als „Gelee“ einfach umweltverträglich zu entsorgen. Er proklamiert demgemäß das *Post-biologische Zeitalter*, das Zeitalter der Roboter und Computer. Marvin Minsky, einer der Be-

<sup>1</sup>Es gibt durchaus „größere“ Modelle, jedoch sind diese hochspezialisiert und nicht mit den hier diskutierten zu vergleichen.

gründer der Idee der künstlichen Intelligenz, drückte ironisch die Hoffnung aus: „Wenn wir Glück haben, werden die Roboter uns als Haustiere behalten.“ (nach [38, S. 8]).

Moravec (und auch Kurzweil) haben ihren schärfsten Kritiker in Joseph Weizenbaum, einem der Begründer der *Künstlichen Intelligenz*, gefunden. Dieser verglich das Buch von Moravec in seiner Konsequenz und Menschenverachtung mit Hitlers „Mein Kampf“ [38, S. 31]. In Klagenfurt hielt Weizenbaum am 1. Februar 1990 einen Vortrag mit dem provokanten Titel *Künstliche Intelligenz als Endlösung der Menschenfrage* [38].

## 2 Das Unendliche in der Mathematik

Ich hoffe, daß es mir gelungen ist, Sie davon zu überzeugen, daß alles, was wir denken können, endlich ist. Nun haben sich Philosophen, Theologen, Schriftsteller und natürlich auch Mathematiker immer wieder mit dem Unendlichen beschäftigt. Vielleicht haben Sie gerade jetzt im Malersaal Martin Oelbermanns Experiment *Am Ende der Unendlichkeit* gesehen. In Halle an der Saale wurde unlängst die Oper *Cantor – Die Vermessung des Unendlichen* von Ingomar Grünauser anlässlich des Jubiläums „1 200 Jahre Halle“ aufgeführt. Und als ob das Unendliche gerade in diesem Jahre von den Künstlern entdeckt wurde, zum diesjährigen Auftakt der Ruhrfestspiele führte Simon McBurney das Stück *A Disappearing Number* zu dem gleichen Themengebiet auf [32].

Die beiden Mathematiker Bernard Bolzano (1781 – 1848) und Georg Cantor (1845 – 1918) hatten dem Unendlichen Hausrecht in der Mathematik verschafft. Interessant ist, daß Bolzano eigentlich Theologe war, der im Zuge der Metternichschen „Demagogenverfolgung“ durch Dekret von Kaiser Franz im Jahre 1819 Lehrverbot erhielt und sich danach

ganz der Mathematik widmete. Wir Mathematiker haben also Metternich zu danken! Georg Cantor, der in Halle lehrte, war ebenfalls theologisch interessiert und unterhielt eine umfangreiche Korrespondenz mit dem Vatikan. Der große Mathematiker David Hilbert (1862 – 1943) hat die Mathematik geradezu als die Wissenschaft vom Unendlichen bezeichnet. Wozu befaßt man sich mit derlei? Ist dies wieder nur ein neues Spiel? Jedenfalls vertritt Jean-Paul Delahaye [2] diese Sichtweise sehr überzeugend. Ich erzähle Ihnen dazu eine Geschichte „aus dem Leben“.

Anfang der siebziger Jahre suchte mich ein Festkörperphysiker mit einem Problem auf. Zu der Zeit war vom Bundesforschungsministerium ein Projekt initiiert worden zur Erforschung von Supraleitern für die Energieübertragung. Bei der Erzeugung und Übertragung von elektrischer Energie muß man erhebliche Verluste in Kauf nehmen, und man hatte die Idee, wenigstens die Übertragungsverluste auf diesem Wege zu verringern. Ein kleines Teilproblem in diesem Projekt war es, welches mir der Physiker vorlegte. Die für den angestrebten Zweck interessanten Supraleiter, die sogenannten Typ-II-Supraleiter, zeigen in einem Magnetfeld ein seltsames Verhalten. Das Magnetfeld dringt in den Supraleiter in Form von sogenannten *Flußwirbeln* ein. Man kann sich das so vorstellen, daß diese Wirbel Schläuche bilden, die den ganzen Supraleiter durchdringen. Wenn man den Supraleiter von oben betrachtet, dann sieht man gerade auf die Austrittsstellen der Wirbel, man beobachtet dann eine regelmäßige ebene Anordnung von Wirbeln. Uwe Essmann und Hermann Träuble war es Anfang der siebziger Jahre gelungen, solche Anordnungen sichtbar zu machen [9]. Dies ist auch deshalb sehr interessant, als es sich hier um eine Quantenerscheinung

handelt. In jedem Wirbel steckt ein Quant des magnetischen Flusses. Man hat hier also einen Quanteneffekt, der – wenn auch nicht mit bloßem Auge – sichtbar ist. Die Abstände der Wirbel liegen (je nach Stärke des angelegten Feldes und nach Art des Supraleiters) im Mikrometerbereich, betragen also etwa  $10^{-6}$  m oder  $10^{-3}$  mm. Dies ist groß etwa gegen die in der Nanotechnik gebräuchlichen Abmessungen ( $1\text{ }\mu\text{m} = 1000\text{ nm}$ ).

In Abbildung 5 ist ein solches Wirbelgitter auf der Oberfläche eines Supraleiters durch ein ebenes hexagonales Gitter modelliert. Die Aufgabe, die der Physiker mir stellte, läßt sich wie folgt beschreiben: Zwischen einem „Aufpunkt“ in der Gitterebene besteht zu jedem Gitterpunkt eine Wechselwirkung (sogenanntes Vektorpotential). Die Gesamtsumme aller solcher Wechselwirkungen sollte berechnet werden, wobei angenommen werden sollte, daß sich das Gitter nach jeder Richtung ins Unendliche erstreckt. Zur Terminologie: Wir bezeichnen in der Mathematik unendliche Summen gern als *Reihen*. Wohlgedenkt, die Forderung, ein unendliches Gitter zu verwenden, kam von dem Physiker. Welche Gründe hatte er dafür gehabt. Zunächst einmal sind zwei Gründe offenbar:

- Würde man ein endliches Gitter wählen, dann würden Größen- und Randeffekte eine Rolle spielen. Würde man etwa  $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$  Wirbel um den Aufpunkt berücksichtigen, dann hätte man ein kleines Stückchen Supraleiteroberfläche von  $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ . Es ist denkbar (dies wurde auch durch die nachfolgenden Berechnungen bestätigt), daß ein größeres Wirbelgitter einen anderen Wert für die Summe der Wechselwirkungen ergeben könnte.
- Weiterhin könnte die Form der betrachteten Oberfläche Bedeutung haben. Unterscheidet sich eine runde von einer quadratischen oder einer länglichen Form, was die fragliche Summe anbelangt?

Mit anderen Worten, der Physiker wollte den Wert der Summe haben, welcher von möglichst wenigen Zusatzhypothesen abhängt. Auf diese Weise wird die Komplexität der Situation auf *wesentliche* Parameter reduziert. Diese Vorgehensweise hat sich seit Galilei in der Physik überaus bewährt. Sie wurde – auch dies muß man sehen – Gegenstand der Polemik Goethes gegen Newtons Farbenlehre.

Der Physiker wollte nun von mir ein Programm, welches das Folgende leistet:

- Es sollte den Wert der Summe für jeden beliebig gewählten Aufpunkt berechnen.
- Die Berechnung sollte „schnell“ erfolgen. Das von mir zu erstellende Programm sollte Bestandteil eines sehr umfangreichen Programms zur Berechnung der Eigenschaften von Supraleitern werden, und dieses würde die Werte aus meinem Programm sehr häufig benötigen, so daß hier in diesem Falle Ausführungsgeschwindigkeit ein entscheidender Faktor gewesen wäre.
- Der durch mein Programm berechnete Wert sollte unabhängig vom gewählten Aufpunkt eine gewisse, nicht zu geringe und garantierte Genauigkeit besitzen. Hätten sich beispielsweise Unstimmigkeiten beim „großen“ Programm ergeben, wollte man nicht auch noch prüfen,

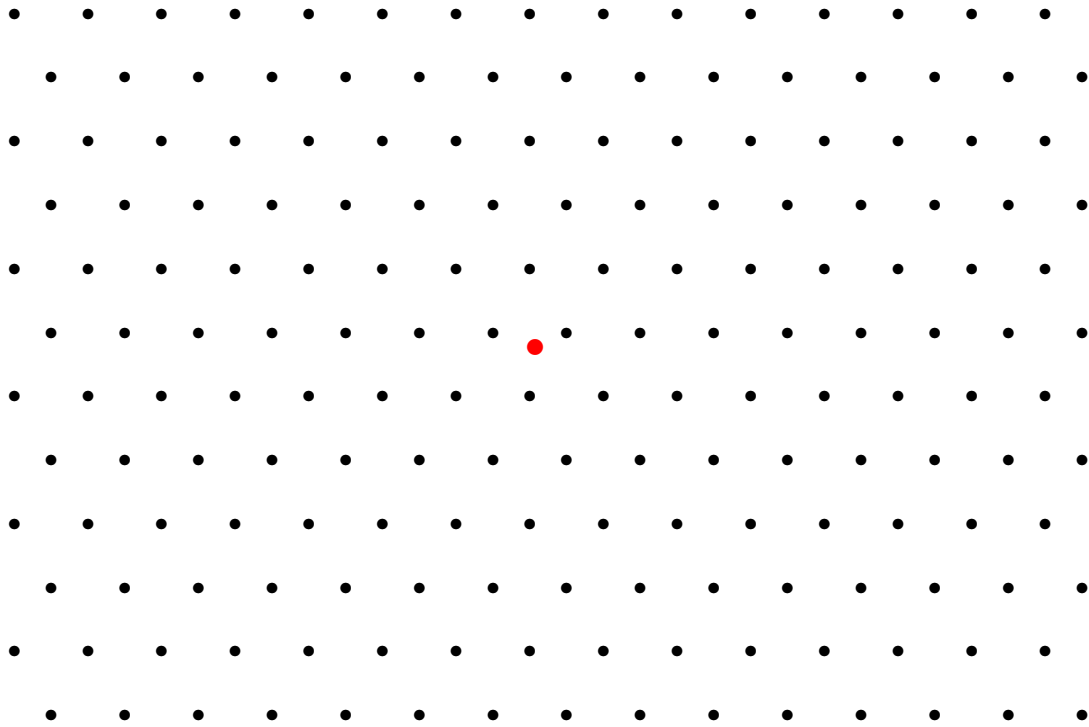


Abbildung 5: Hexagonales Gitter mit Aufpunkt (rot)

ob eine zu geringe Genauigkeit meines Programms die Ursache sein könne und dann gegebenenfalls das Programm neu für eine größere Genauigkeit entwickeln. Auch hier wollte man also Komplexität reduzieren.

Normalerweise wird sich ein Physiker nicht ohne Not an einen Mathematiker wenden. Dies hat viele gute Gründe, einer davon ist, daß sich Physiker in aller Regel selbst recht gut zu helfen wissen. Auch mein Physiker hatte natürlich vorher schon sein Glück mit der Summe versucht und dabei Schlimmes erlebt. Ich schildere ein wenig frei die Geschichte seiner Experimente.

Zunächst einmal hatte er eine endliche Anzahl von Gitterpunkten gewählt, etwa  $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ . Hierbei ergab sich für ausgewählte Test-Aufpunkte jeweils ein gewisser Wert. Darauf hat er die Anzahl der Gitterpunkte vergrößert, etwa  $10\,000 \times 10\,000 = 100\,000\,000$ . Es ergab sich ein Wert, der von dem vorhergehenden ein wenig abwich, aber eben genug, um zu zeigen, daß  $1\,000 \times 1\,000$  Punkte noch nicht ausreichen. Der Physiker erhöhte darauf weiter die Anzahl der Gitterpunkte und beobachtete das gleiche Phänomen: Die neuen Werte wichen von den vorher erhaltenen nur wenig ab, aber eben doch genug, um Zweifel zu wecken. Dies setzte sich so lange fort, als der Physiker noch mit annehmbarer Rechenzeit experimentieren konnte.

Daraufhin entschloß sich der Physiker zu einem aufwendigeren Experiment: Er ließ sein Programm über das ganze Wochenende laufen. Das Ergebnis war erschreckend: Es kamen neue Werte heraus, die von den vorhergehenden weit abwichen und die weit von dem abwichen, was der Physiker auf Grund seiner Kenntnis des Gebiets erwarten konnte. Als er dann am nächsten Wochenende den gleichen Versuch mit größerer Genauigkeit wiederholte – er hatte schon gehört, daß es in der Numerik Schwierigkeiten mit Rundungsfehlern geben kann – erhielt er zu seinem Schrecken wiederum völlig andere Werte. Es war also für ihn der Punkt gekommen, an dem er beschloß einen Mathematiker aufzusuchen.

Bevor ich die Geschichte weitererzähle, gebe ich noch einen weiteren Grund dafür an, daß der Physiker auf unendlich vielen Gitterpunkten insistierte: Die Experimente hatten gezeigt, daß „viele“ Gitterpunkte noch nicht zu einem verlässlichen Resultat führten. Es trat also ganz natürlich die Frage auf, wieviele Punkte denn nun eigentlich „richtig“ seien. Auch hier entschloß sich der Physiker, um Komplexität zu reduzieren, zu der Forderung, unendlich viele Punkte zu wählen, um „auf der sicheren Seite“ zu sein.

Ich sah mir nun erst einmal die Summe an und stellte mit einigem Befremden fest, daß sie zu den sogenannten *bedingt konvergenten* Summen gehörte. Über diese gibt es eine Aussage von Bernhard Georg Friedrich Riemann (1826 – 1866), welcher auch durch seine Arbeiten zur *Riemann-Geometrie*, welche im Zusammenhang mit der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie Bedeutung erlangten, bekannt ist. Diese sehr subtile und zunächst schwer verständliche Aussage ist unter dem Namen *Riemannscher Umordnungssatz* bekannt. Sie besagt (sinngemäß):

Wenn eine unendliche Reihe bedingt konvergent ist, dann kann man für jede beliebige Zahl allein durch Umordnung der Reihenglieder erreichen, daß die Reihe gegen diese Zahl konvergiert.

Ich konnte also dem Physiker sagen: „Geben sie mir eine Zahl vor, und ich werde unsere Summe so umordnen, daß ihr Wert eben diese Zahl ist!“ Man kann dies Ergebnis auch so formulieren: Die von dem Physiker vorgelegte Aufgabe ist keiner sinnvollen Lösung zuzuführen.

Damit wollte sich der Physiker natürlich nicht zufriedengeben. Am nächsten Tag erhielt ich von ihm eine Kopie des Auftrags, in der er der Summe einen Vermerk beigefügt hatte: „Muß richtig summiert werden!“ Damit war der Schwarze Peter wieder bei mir.

Eine der ersten Fragen, die man sich stellt: Die gesuchte Summe hat ja eine „ontologische“ Bedeutung, es gibt schließlich Supraleiter. Woher wissen diese, auf welche Weise sie die Summanden anordnen müssen? Die Antwort auf diese Frage ist einfach: Alle real vorkommenden Supraleiter sind endlich groß, und bei endlichen Summen – dies lernt man eigentlich schon in der Schule – kommt es auf die Reihenfolge der Summation nicht an. Die Schwierigkeit, die ich schilderte, ist der Preis dafür, daß wir uns auf das Unendliche eingelassen haben. Ein Theologe würde hieraus vielleicht den Schluß ziehen, daß Gott in seiner Welt nur endliche Supraleiter zugelassen habe, um gerade diese Schwierigkeiten zu vermeiden.

Nach einigem Nachdenken kommt man dann auf die „richtige“ Lösung des Problems. Ich will Ihnen die etwas technische Lösung hier nicht zumuten. Man muß sich den Beweis des Riemannschen Satzes ansehen und sich überlegen, worin der „Trick“ besteht. Auf diese Weise findet man nach einiger Zeit heraus, daß es unter allen denkbaren Summationsreihenfolgen gewisse gibt, die immer wieder zu dem gleichen Resultat führen, die sich überzeugend „praktisch“ motivieren lassen und die auch die Billigung des Physikers finden.

Trotzdem, es bleibt die bohrende Frage: Was tun wir hier eigentlich? Wir versuchen, eine reale Situation zu modellieren, und dabei kommen wir auf ein Modell, welches ganz sicher nichts beschreibt, was in unserer Welt Anspruch auf Realität hat. Es ist reizvoll, ein wenig nachzudenken, was hier eigentlich geschehen ist. Wir stehen hier vor einem grundsätzlichen Problem: Was ist es, das wir Mathematiker (und auch Physiker) tun? Ist es nicht vielleicht so, daß wir die Welt nach unserem Bilde – oder besser: nach dem Bilde der Mathematik – formen? Wir hatten uns auf das Modell eines unendlich ausgedehnten Supraleiters eingelassen, weil wir auf diese Weise gewisse Probleme verdrängen konnten – so wie Galilei bei seinen Versuchen mit schiefen Ebenen die Probleme der Reibung, der Anziehung des Mondes und so weiter einfach vernachlässigt hat in der festen Überzeugung, daß sein Beschreibungsmodell dadurch immer noch hinreichend genau bleibe und andererseits einfach genug sei, daß er es „verstehen“ könne. Ein Philosoph würde vielleicht sagen, daß wir für die vorgelegte reale Situation ein „Platonisches“ mathematisches Modell geschaffen hätten – übrigens einvernehmlich mit dem Physiker – welches keinen realen Supraleiter beschreibe, sondern die „Idee“ eines Supraleiters. Diese Sichtweise wird durch eine Reihe von Argumenten gestützt:

- Ein realer Supraleiter hat immer eine bestimmte endliche Größe und eine bestimmte Form.
- Ein reales Gitter ist nicht so perfekt wie in unserem Modell. Durch Inhomogenitäten des Supraleiters werden die Wirbel immer wieder von ihren idealen Punkten verdrängt, es gibt Versetzungen, die man übrigens auf den Bildern von Essmann and Träuble deutlich sehen kann.
- Im Modell wächst die gesuchte Funktion mit Annäherung an die Gitterpunkte über alle Grenzen. Dies kann in der Realität sicher nicht sein.

Nun, da ich wußte, was ich eigentlich tat, konnte ich daran gehen, die fragliche Summe auszuwerten. Auch hier sind Sie sicherlich nicht an Einzelheiten interessiert. Es genügt, anzumerken,

daß dies gelang, das ist schließlich mein Beruf, den ich gelernt habe. Ich konnte ein Programm entwickeln, welches die Summe mit einer garantierten Genauigkeit von zehn gültigen Ziffern auf eine sehr einfache Weise liefert, das also auch „schnell“ ist. Die genannte Genauigkeit liegt weit jenseits dessen, was ein Festkörperphysiker braucht, da aber die Auswertungszeit hier nicht von der Genauigkeit abhängt, ist man mit einer solch hohen Anzahl von Stellen mit Sicherheit „im grünen Bereich“.

Ich sollte an dieser Stelle offen gestehen, daß es uns vielleicht geholfen hätte, wenn wir gewußt hätten, daß dieses Problem – die Auswertung von unendlichen Summen, die unter Umständen nur bedingt konvergieren – nicht neu war. So hatte bereits im Jahre 1918 Madelung ein ähnliches Problem behandelt [26] und im Jahre 1920 hatte Ewald eine Methode zur Auswertung solcher Summen vorgeschlagen [10]. Ich konnte dies nicht wissen, die Auswertung von Summen ist nicht mein „Spezialgebiet“, aber der Physiker hätte dies eigentlich wissen müssen. Dies ist der Grund, daß ich seinen Namen verschwiegen habe. Andererseits hat sich unsere Unwissenheit vorteilhaft ausgewirkt. Weil ich völlig naiv an die Sache heranging, gelang es mir, eine neue Darstellung der Summe zu finden, auf welche ich wahrscheinlich nicht gekommen wäre, wenn ich von den Vorläufern gewußt hätte. Im Jahre 1970 stellte sich das Problem nämlich ganz anders dar als fünfzig Jahre vorher, es gab Computer und, wie oben angedeutet, ergaben sich damit völlig neue Probleme. Dies läßt sich durch einen Blick auf die Literatur der siebziger Jahre bestätigen. Man findet dort eine sehr große Anzahl von Publikationen über das Thema *Summation von Reihen*.

Ein weiterer Punkt ist hier zu nennen, der ganz typisch ist für die mathematische Arbeit. Ich fand nämlich bald heraus, daß die von mir untersuchte Summe einer Klasse von gut bekannten Funktionen nahe verwandt war. Es handelt sich um die sogenannten Weierstraßschen elliptischen Funktionen, die nach dem bedeutenden Mathematiker Karl Weierstraß (1815 – 1897) benannt worden sind. Eine solche Entdeckung, daß Beziehungen zu bekannten – sogenannten *speziellen Funktionen* – bestehen, ist immer ein Glücksfall. Über solche Funktionen gibt es nämlich zahlreiche Bücher, und man kennt viele ihrer Eigenschaften. Hier hatte ich die schöne Situation, daß ich durch meine Arbeit – ohne es zunächst zu ahnen – eine neue genaue und schnelle Darstellung gefunden hatte, deren Genauigkeit zudem durch mathematische Überlegungen garantiert werden konnte.

Sie werden sich jetzt sicherlich fragen: Was ist denn nun aus den Supraleitern geworden? Meine präzise Antwort lautet: Nichts! Nachdem wir etwa ein halbes Jahr an dem Projekt gearbeitet hatten, kam vom Bundesforschungsministerium ein Brief mit der Mitteilung, daß das Projekt abgebrochen werde und daß wir einen Monat Zeit hätten, einen Abschlußbericht zu schreiben. Gründe wurden nicht angegeben, ein Ministerium muß seine Entscheidungen natürlich nicht begründen!

Unter allen Projektteilnehmern hatte ich noch am meisten Glück. Durch geringe Modifikationen an meiner Summe konnte ich Darstellungen für die verschiedenen Weierstraßschen Funktionen finden und diese publizieren [5, 6, 7, 8]. Mathematische Publikationen können unterschiedliche Schicksale haben. Die meisten werden vom Fachpublikum schlicht ignoriert, bestenfalls stellt eine Studentin oder ein Student der Geschichte der Mathematik hundert Jahre später fest, daß eine bis dahin unbeachtete Arbeit Perlen der Weisheit enthielt. Von dieser Hoffnung leben wir. Gelegentlich hat man das Glück, immer wieder – in Abständen von einigen Jahren – „Fanpost“ zu erhalten, Anfragen von verschiedenen Menschen, von Kollegen, Physikern, Ingenieuren, die sich für die Arbeit interessieren und Fragen haben. Ich glaube selbst nicht, daß meine Arbeiten zu den

Weierstraßschen Funktionen hohe Mathematik seien, sie stellen allenfalls gutes Handwerk dar. Was mich überraschte, war die Tatsache, daß diese Funktionen immer wieder in überraschenden Anwendungen Bedeutung haben. Ich gebe nur einige Beispiele an:

- Bei der Rotation von superfluidem Helium (eines gewissen Typs) bilden sich Flüssigkeitswirbel („Badewannenwirbel“) aus [29, 11]. Auch diese lassen sich mit Weierstraßschen elliptischen Funktionen beschreiben. Superfluides Helium ist eine hochinteressante Quantenflüssigkeit. Für die Entdeckung der merkwürdigen Eigenschaften des superfluiden Heliums erhielten im Jahre 1996 Douglas D. Osheroff, Robert C. Richardson und David M. Lee den Nobelpreis [30].
- Auch in der Mechanik lassen sich elliptische Funktionen erfolgreich einsetzen [35, 36].
- In dem Buch von Jahnke und Emde [20, S. 86–89] findet man eine Anwendung auf die Berechnung der Induktivität von dünnwandigen Rohrspulen.
- In dem Buch von Greenhill über elliptische Funktionen ist ein ganzes Kapitel verschiedenen Anwendungen gewidmet [18, Chapter VII].
- Wenn man die Turbinen in einem Wasserkraftwerk bei einer Havarie plötzlich abschalten muß, dann entsteht ein Druckstoß, der zu schweren Beschädigungen am Staudamm führen kann. Um die dabei entstehende Energie unschädlich abzuleiten, baut man in den Staudamm ein sogenanntes Schachtwasserschloß ein, das ist ein nach oben offener Schacht, in den das Wasser bei einer Störung aufsteigen kann (siehe Abbildung 6). Die Schwingungen, die die Wassersäule dann in dem Schacht ausführt, kann man durch Weierstraßsche elliptische Funktionen darstellen [17].
- Vor Jahren schrieb mich ein Ingenieur an, der sich mit der Berechnung des Strömungsverlaufs an einem Flugzeugtragflügel beschäftigte. Durch geschickte Transformationen, bei denen die Weierstraßschen Funktionen eine Rolle spielen, kann man dieses sehr komplizierte Problem in eine Form bringen, bei der man mehr „sieht“ als in der üblichen Form [37, Kapitel V, §6].

## Literatur

- [1] Anonym. Mathematik – ein Beruf von dieser Welt? *Spektrum der Wissenschaft*, pages 20–21, September 1983.
- [2] Jean-Paul Delahaye. Unendliche Spiele und große Mengen. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 46–54, Dezember 1998.
- [3] A. K. Dewdney. Computer-Kurzweil: Lineare Automaten mit unvorhersehbarem Verhalten wecken – als potentielle universelle Computer – Zweifel an der Berechenbarkeit der Welt. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 4–10, Juli 1985.
- [4] Philip K. Dick. *UBIK*, volume 15 of *Phantastische Bibliothek*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main, 1977.

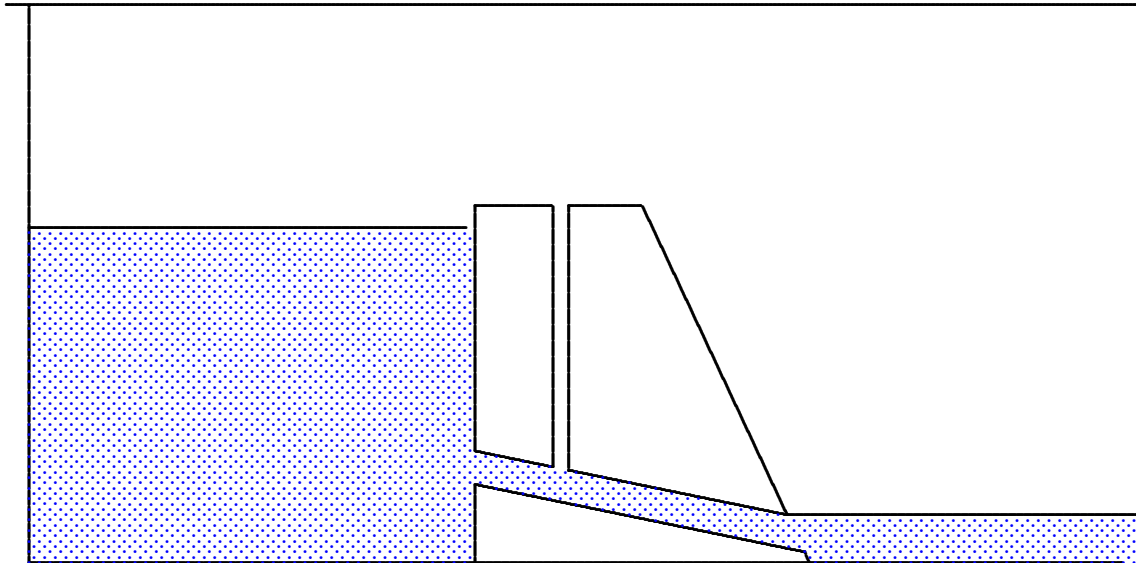


Abbildung 6: Schachtwasserschloß in einem Staudamm.

- [5] Ulrich Eckhardt. Zur Berechnung der Weierstraßschen Zeta- und Sigmafunktion. Technical Report Jül-964-MA, Berichte der KFA Jülich, Juni 1973.
- [6] Ulrich Eckhardt. A rational approximation to Weierstrass'  $\wp$ -function. *Mathematics of Computation*, 30(136):818–826, 1976.
- [7] Ulrich Eckhardt. A rational approximation to Weierstraß'  $\wp$ -function. II. The lemniscatic case. *Computing*, 18:341–349, 1977.
- [8] Ulrich Eckhardt. Algorithm 549: Weierstrass' elliptic functions. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 4:112–120, 1980.
- [9] Uwe Essmann and Hermann Träuble. The magnetic structure of superconductors. *Scientific American*, 224(3):74–84, March 1971.
- [10] P. P. Ewald. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. *Annalen der Physik*, 64:253–287, 1920.
- [11] Alexander L. Fetter. Vortices and ions in Helium. In K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, editors, *The Physics of Liquid and Solid Helium, Part II.*, pages 207–305. John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1976.
- [12] E. Fredkin. Five big questions with pretty simple answers. *IBM J. Res. & Dev.*, 48(1):31–45, January 2004.
- [13] Daniel F. Galouye. *Welt am Draht*. Wilhelm Goldmann Verlag, München, 1965.

- [14] Martin Gardner. Mathematical Games: A new collection of short problems and the answers to some of “life’s”. *Scientific American*, 223(5):116–118, November 1970.
- [15] Martin Gardner. Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game “life”. *Scientific American*, 223(4):120–123, October 1970.
- [16] Martin Gardner. Mathematical Games: On cellular automata, self-reproduction, the Garden of Eden and the game “life”. *Scientific American*, 224(2):112–117, February 1971.
- [17] J. Giesecke. Berechnung des Schwingungsverlaufs in einem Schachtwasserschloß mittels elliptischer Funktionen. *Ingenieur-Archiv*, 37:161–175, 1968.
- [18] Alfred George Greenhill. *The Applications of Elliptic Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1959.
- [19] Brian Hayes. Computer-Kurzweil: Zur Selbstorganisation ebenso fähig wie zur Selbstreproduktion, sind zelluläre Automaten ein Modell der Welt und doch zugleich auch eine Welt für sich. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 6–16, Juni 1984.
- [20] E. Jahnke and F. Emde. *Tables of Functions with Formulae and Curves*. 4<sup>th</sup> ed. Dover Publications, New York, 1945.
- [21] Ray Kurzweil. *Homo s@piens. Leben im 21. Jahrhundert – Was bleibt vom Menschen?* Kiepenheuer & Witsch, Köln, 1999.
- [22] Ray Kurzweil. Essay: Der Mensch, Version 2.0. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 100–105, Januar 2006.
- [23] Stanisław Lem. *Summa technologiae. Mit einem Vorwort des Autors zur deutschen Ausgabe. Aus dem Polnischen übersetzt von Friedrich Griese*. Werke in Einzelausgaben. Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1976.
- [24] Stanisław Lem. *Phantastik und Futorologie, 1. Teil. Übersetzt von Beate Sorger und Wiktor Szacki (vom Autor autorisiert)*. Werke in Einzelausgaben. Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1977.
- [25] Stanisław Lem. *Phantastik und Futorologie, 2. Teil. Übersetzt von Edda Werfel*. Werke in Einzelausgaben. Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1980.
- [26] E. Madelung. Das elektrische Feld in Systemen von regelmäßig angeordneten Punktladungen. *Physikalische Zeitschrift*, XIX:524–532, 1918.
- [27] Hans Moravec. *Mind Children. The Future of Robot and Human Intelligence*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1988.
- [28] Christoph Pöppe. Matrix Reloaded – Leben wir in einer Simulation? (Forschung und Gesellschaft). *Spektrum der Wissenschaft*, pages :88–91, Oktober 2003.
- [29] G. W. Rayfield and F. Reif. Evidence for the creation and motion of quantized vortex rings in superfluid helium. *Physical Review Letters*, 11:305–308, 1963.

- [30] Uwe Reichert. Nobelpreis für Physik – Superfluidität von Helium-3 (Monatsspektrum). *Spektrum der Wissenschaft*, pages 25,32–34, Dezember 1996.
- [31] Paul Rendell. A Turing machine in Conway’s game Life. [http://www.cs.ualberta.ca/bulitko/F02/papers/tm\\_words.pdf](http://www.cs.ualberta.ca/bulitko/F02/papers/tm_words.pdf), 2001.
- [32] Bettina Rösken and Ekkehard Winter. *A Disappearing Number* oder eine Inszenierung des Unendlichen. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 15(2):110–113, 2007.
- [33] Uwe Schöning. *Theoretische Informatik kurz gefaßt*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992.
- [34] Lee Smolin. Quanten der Raumzeit. *Spektrum der Wissenschaft*, pages 54–63, März 2004.
- [35] Hj. Tallqvist. Anwendung der elliptischen Funktionen auf die gezwungene Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß einer Zentralkraft. *Comment. Phys.-Math., Soc. Sci. Fennica*, 5(22):1–89, 1931.
- [36] Hj. Tallqvist. Anwendung der elliptischen Funktionen auf die gezwungene Bewegung eines Punktes in einer Ebene unter dem Einfluß einer Zentralkraft. *Soc. Sci. Fennica, Comment. Phys.-Math.*, 8(24):1–58, 1936.
- [37] Francesco Tricomi. *Elliptische Funktionen*. Übersetzt und bearbeitet von Dr. Maximilian Krafft. Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 20. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1948.
- [38] Joseph Weizenbaum. Künstliche Intelligenz als Endlösung der Menschenfrage. In *Klagenfurter Beiträge zur Technikdiskussion, Heft 32*. IFF/Arbeitsbereich Technik- und Wissenschaftsforschung; Institut für Interdisziplinäre Forschung und Fortbildung der Universitäten Innsbruck, Klagenfurt und Wien, Klagenfurt, 1995.
- [39] Stephen Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Champaign, IL., 2002.