Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 11

Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

Sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Transposition, Multiplication, inverse Matrix finden*
   Finden Sie die inverse Matrix von $A^T A$.

   Lösung:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. *Näherungslösung finden*
   Benutzen Sie Ihre Antwort zu Aufgabe 1, um die Näherungslösung zum folgenden Gleichungssystem zu finden:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 4 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

   Lösung: Die Näherungslösung zu $Ax = b$ ist $(A^T A)^{-1} A^T b$. Also ist die Näherungslösung in diesem Fall

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. *Projektion auf den Spaltenraum*
   Finden Sie die Projektion von $(2, 2, 1)$ auf den Spaltenraum von A.

   Lösung: Die Projektion von b auf den Spaltenraum von A ist $A(A^T A)^{-1} A^T b$. Deshalb ist die Projektion in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 18 \\ 33 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B: Aufgaben

Sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Transposition, Multiplication, inverse Matrix finden*
   Finden Sie die inverse Matrix von $A^T A$.

   Lösung:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Wir benutzen das Verfahren aus der Vorlesung, um die inverse Matrix zu dieser zu finden. Die Blockmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die erste Zeile durch 5, und subtrahieren passende Vielfäche davon von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{14}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die zweite Zeile durch $\frac{6}{5}$, und subtrahieren das $\frac{7}{5}$-Fache davon von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die dritte Zeile durch $\frac{7}{6}$ und subtrahieren passende Vielfäche davon von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{35} & \frac{1}{5} & -\frac{6}{35} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das $\frac{3}{5}$-Fache der zweiten Zeile von der Ersten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix von $A^T A$ ist deshalb

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

2. *Näherungslösung finden*
   Benutzen Sie Ihre Antwort zu Aufgabe 1, um die Näherungslösung zum folgenden Gleichungssystem zu finden:

$$\begin{aligned} y + z &= 0 \\ 2x + y &= 4 \\ z &= -1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: Die Näherungslösung zu $Ax = b$ ist $(A^T A)^{-1} A^T b$. Also ist die Näherungslösung in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ 1 \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

3. *Projektion auf den Spaltenraum*
   Finden Sie die Projektion von $(2, 2, 2, 1)$ auf den Spaltenraum von A.

Lösung: Die Projektion von b auf den Spaltenraum von A ist $A(A^T A)^{-1} A^T b$. Deshalb ist die Projektion in diesem Fall

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{7} & -1 & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ 0 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. *Gram-Schmidt Verfahren*
   Bauen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ aus den Vektoren $(3,4,0)$, $(-3,-4,2)$ und $(1,1,1)$.

   Lösung: Wir nennen die drei gegebenen Vektoren u_1, u_2 und u_3. Wir setzen:

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_1 &:= u_1 = (3,4,0) \\
v_1 &:= \frac{\hat{v}_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}(3,4,0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \\
\hat{v}_2 &:= u_2 - (u_2 \cdot v_1)v_1 = (-3,-4,2) - \left(-3 \times \frac{3}{5} - 4 \times \frac{4}{5}\right)(3,4,0) = (-3,-4,2) + (3,4,0) = (0,0,2) \\
v_2 &:= \frac{\hat{v}_2}{||v_2||} = \frac{1}{2}(0,0,2) = (0,0,1) \\
\hat{v}_3 &:= u_3 - (u_3 \cdot v_1)v_1 - (u_3 \cdot v_2)v_2 = (1,1,1) - \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) - (0,0,1) = \left(\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}, 0\right) \\
v_3 &:= \frac{\hat{v}_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{4}{25}\right)^2 + \left(-\frac{3}{25}\right)^2 + 0^2}}\left(\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}, 0\right) = \frac{25}{\sqrt{25}}\left(\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}, 0\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)
\end{aligned}
$$

5. *Koeffizienten bezüglich einer orthonormalen Basis finden*
   Was sind die Koeffizienten von $(2,0,1)$ bezüglich der orthonormalen Basis aus Aufgabe 4?

   Lösung: Die Koeffizienten sind $(2,0,1)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) = \frac{6}{5}$, $(2,0,1)\cdot(0,0,1) = 1$ und $(2,0,1)\cdot\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right) = \frac{8}{5}$.