Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Musterlösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 5
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Geometrische Bedeutung von Formeln*
   Welche geometrische Formen haben folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$?
   (a) $\{x \in \mathbb{R}^2 | \quad x \cdot (2,4) = 1\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^2 | \quad ||x|| = 1\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^2 | \quad x \cdot (2,4) = 1 \text{ und } ||x|| = 1\}$

   Lösung:
   (a) Eine Gerade
   (b) Ein Kreis
   (c) Zwei Punkte

2. *Längen von Vektoren*
   Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $||(x + y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}x - \sqrt{2}y, x + y - \sqrt{2}z)|| = 2||(x, y, z)||$.

   Lösung:
$$||(x + y + \sqrt{2}z, \sqrt{2}x - \sqrt{2}y, x + y - \sqrt{2}z)|| = \sqrt{(x + y + \sqrt{2}z)^2 + (\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2 + (x + y - \sqrt{2}z)^2}$$
$$\begin{aligned} &= \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}yz + 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{2}yz} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} \\ &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= 2||(x, y, z)|| \end{aligned}$$

3. *Winkeln Berechnen*
   Berechen Sie die Winkeln zwischen folgenden Paaren von Vektoren:
   (a) $(3, 4)$ und $(4, -3)$
   (b) $(3, 4, 5)$ und $(4, -3, 5)$

   Lösung:

(a)

$$
\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{(3,4)\cdot(4,-3)}{||(3,4)||\quad||(4,-3)||}\right) &= \arccos\left(\frac{3\times 4+4\times(-3)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{4^2+(-3^2)}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{25}\sqrt{25}}\right)\\
&= \arccos(0)\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{(3,4,5)\cdot(4,-3,5)}{||(3,4,5)||\quad||(4,-3,5)||}\right) &= \arccos\left(\frac{3\times 4+4\times(-3)+5\times 5}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{4^2+(-3^2)+5^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{25}{\sqrt{50}\sqrt{50}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{25}{50}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

B: Aufgaben

1. *Geometrische Bedeutung von Formeln*
   Welche geometrische Formen haben folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\{x \in \mathbb{R}^3 | \quad x\cdot(2,4,-1)=1\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R}^3 | \quad ||x||=1\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R}^3 | \quad x\cdot(2,4,-1)=1 \text{ und } ||x||=1\}$

   Lösung:

   (a) Eine Ebene
   (b) Eine Kugel
   (c) Ein Kreis

2. *Cauchy-Schwarz Ungleichung*
   Seien x, y und z reele Zahlen. Zeigen Sie, dass $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$.

   Lösung: Wir betrachten die Vektoren $p=(x,y,z)$ und $q=(y,z,x)$. Dann $xy+yz+zx = p\cdot q \leq ||p||\,||q|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{y^2+z^2+x^2} = x^2+y^2+z^2$.

3. *Formel für Winkeln*
   Seien (x,y) und (z,t) Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen (x,y) und (z,t) und der Winkel zwischen $(x+y,x-y)$ und $(z+t,z-t)$ gleich sind.

   Lösung: Der Winkel zwischen $(x+y,x-y)$ und $(z+t,z-t)$ ist

$$
\arccos\left(\frac{(x+y,x-y)\cdot(z+t,z-t)}{||(x+y,x-y)||\,||(z+t,z-t)||}\right) = \arccos\left(\frac{(x+y)(z+t)+(x-y)(z-t)}{\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2}\sqrt{(z+t)^2+(z-t)^2}}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \arccos\left(\frac{xz+xt+yz+yt+xz-xt-yz+yt}{\sqrt{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}\sqrt{z^2+2zt+t^2+z^2-2zt+t^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{2xz+2yt}{\sqrt{2x^2+2y^2}\sqrt{2z^2+2t^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{2(xz+yt)}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+t^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{xz+yt}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{z^2+t^2}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{(x,y)\cdot(z,t)}{||(x,y)||\,||(z,t)||}\right),
\end{aligned}
$$

und das ist der Winkel zwischen (x, y) und (z, t).

4. *Orthogonale Projektionen*
Seien x und a Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion von x auf die Gerade mit Richtung a und die orthogonale Projektion von x senkrecht zu a orthogonal sind.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_a(x)\cdot(x-\mathrm{Proj}_a(x)) &= \frac{a\cdot x}{||a||^2}a\cdot\left(x-\frac{a\cdot x}{||a||^2}a\right)\\
&= \frac{a\cdot x}{||a||^2}\left(a\cdot x-\frac{a\cdot x}{||a||^2}a\cdot a\right)\\
&= \frac{a\cdot x}{||a||^2}(a\cdot x-a\cdot x)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

5. *Winkeln und orthogonale Projektion*
Sei x der Vektor $(2, 0, 0)$ und a der Vektor $(0, 1, 1)$. Berechnen Sie den Winkel ϕ zwischen x und a und die orthogonale Projektion p von x senkrecht zu a. Bestätigen Sie in diesem Fall die Formel $||p|| = ||x|| \sin(\phi)$.

Lösung: $x \cdot a = 2 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$. Es folgt daraus, dass

$$\phi = \arccos\left(\frac{x\cdot a}{||x||\,||a||}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{4}$$

und

$$p = x - \frac{x\cdot a}{||a||^2}a = x = (2,0,0)\,.$$

Dann $||p|| = ||x|| = ||x|| \sin\phi$, weil $\sin(\phi) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.