Vorkurs Mathematik

(Lineare Algebra)

Universität Hamburg

W.S.08/09 und W.S.09/10

Ernst Bönecke
Department Mathematik

Inhaltsverzeichnis

VORKURS MATHEMATIK - LIN.ALGEBRA

§1 Aussagen und Mengen

Mengenlehre und Logik sind für uns nicht Selbstzweck, sondern man braucht sie, um mathematische Sachverhalte kurz und unmissverständlich zu formulieren. Wir werden uns auf das Notwendigste beschränken.

Definition 1.1 : Unter einer **Aussage** A verstehen wir ein sprachliches oder schriftliches Gebilde, das entweder **wahr** (w) ist oder **falsch** (f) . Man sagt auch, die Aussage A hat den **Wahrheitswert** w oder f .

Beispiel 1.2

Aussage	Wahrheitswert
Es gibt keinen Studierenden in diesem Hörsaal	f
$1 \cdot 2 = 2$	w
$1 \cdot 2 = 2$ und $3 \cdot 4 = 4$	f
$1 \cdot 2 = 2$ oder $3 \cdot 4 = 4$	w
Wenn Ptolemäus Recht hat , dann ist die Erde eine Scheibe	w

Wichtig ist für uns die **Verknüpfung von Aussagen** : Man definiert so eine Verknüpfung, indem man den Wahrheitswert der verknüpften Aussage in Abhängigkeit nur von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussage festlegt:

Definition 1.3 : Seien A und B zwei gegebene Aussagen. Dann definieren wir die Wahrheitswerte von
a) **A und B** , in Zeichen: $A \wedge B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

b) **A oder B** , in Zeichen: $A \vee B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \vee B$ ist also auch dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Man sieht hier, wie sinnvoll es ist, solche Verabredungen am Anfang zu treffen, um Missverständnisse oder sprachlich unschöne Formulierungen wie "und/oder", die man in juristischen Texten häufig findet, zu vermeiden.

c)**Aus A folgt B** , in Zeichen: $A \Longrightarrow B$, man sagt auch: **A impliziert B** oder : **Wenn A gilt, dann gilt B** , durch folgende Tabelle:

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man beachte: $A \implies B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist. Das mag manchen erstaunen, ist aber eine sinnvolle Definition, die sich sogar mit dem umgangssprachlichen Gebrauch deckt, wie das Beispiel "Wenn Ptolemäus Recht hat, dann ist die Erde eine Scheibe" zeigt, das wahr ist , obwohl beide Teilaussagen falsch sind.

d) A **gleichbedeutend mit** B , in Zeichen : $A \iff B$, man sagt auch: A **gilt genau dann, wenn** B **gilt** , durch folgende Tabelle:

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

e) **nicht** A , in Zeichen : $\neg A$, auch non A , durch die Tabelle

A	$\neg A$
w	f
f	w

Solche Tabellen mit Wahrheitswerten wie diese fünf hier nennt man auch **Wahrheitstafeln**.
Wahrheitstafeln verwendet man auch, um die Wahrheitswerte von weiteren verknüpften Aussagen wie

$$A \wedge (B \wedge C)$$
$$(\neg A) \vee B$$
$$\neg(A \vee B)$$

auszurechnen. Dabei muss man sämtliche möglichen Wahrheitswerte von A, B und C berücksichtigen, z.B. für $(\neg A) \vee B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Wir sehen an diesem Beispiel, dass $(\neg A) \vee B$ dieselbe Wahrheitstafel hat wie $A \implies B$. Man wird die Aussagen "$A \implies B$ " und "$(\neg A) \vee B$" deshalb "logisch gleichwertig" nennen:

Definition 1.4 : Gegeben seien mehrere Aussagen $A, B, C, \ldots$ und eine Aussage X, die durch Verknüpfung dieser Aussagen $A, B, C, \ldots$ entstanden ist. Wenn X für alle möglichen Wahrheitswerte der Aussagen $A, B, C, \ldots$ den Wahrheitswert w annimmt, nennt man X eine **allgemeingültige Aussage**.

Satz 1.5 : Für Aussagen A, B, C Aussagen sind, unabhängig von ihren Wahrheitswerten, die folgenden Aussagen immer wahr:

a) $\neg(\neg A) \iff A$
b) $A \wedge B \iff B \wedge A$
c) $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
d) $A \vee B \iff B \vee A$
e) $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$
f) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
g) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
h) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
i) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$
j) $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$

Man **beweist** diesen Satz durch Wahrheitstafeln, z.B. für h) :

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	h)
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Zur Schreibweise : Bei den Formeln in Satz 1.5 haben wir Klammern weggelassen: Statt d) hätten wir genauer

$$(A \vee B) \iff (B \vee A)$$

schreiben müssen. Man kann die Klammern weglassen, wenn man vereinbart: Die Verknüpfungen sind in der Reihenfolge

erst $\neg$, dann $\wedge$, dann $\vee$, dann $\implies$ und dann $\iff$

auszuführen, soweit Klammern nichts Anderes festlegen. □

Aussagen, mit denen wir uns am Anfang beschäftigen, sind Aussagen über Mengen. Es bereitet nun erhebliche Schwierigkeiten, exakt zu definieren, was eine Menge ist. Da wir uns hier nicht mit Grundlagen der Mathematik beschäftigen wollen, reicht für uns die folgende

Definition 1.6 : Unter einer **Menge** M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die **Elemente** der Menge M genannt werden, zu einem Ganzen. Ist x ein Element von M , so schreiben wir

$$x \in M \quad ;$$

ist diese Aussage falsch, so schreiben wir

$$x \notin M \quad . \qquad \square$$

- Die Elemente einer Menge können selbst Mengen sein. Baut man die Mengenlehre axiomatisch auf, so ist dies immer der Fall. So werden auch Zahlen als bestimmte Mengen definiert.

Definition 1.7 (Schreibweise von Mengen) : Man kann eine Menge auf zwei Arten angeben: Entweder, man schreibt in geschweiften Klammern alle Elemente der Menge hin, etwa

$$\{1, 2, 5, 1 - i\} \quad ,$$

das soll bedeuten, dass die Menge aus den Elementen $1, 2, 5$ und der komplexen Zahl $1 - i$ besteht, oder man schreibt in den geschweiften Klammern ein Symbol für die Elemente, einen senkrechten Strich und dann die Eigenschaft, die die Elemente haben sollen. Z.B. ist

$$\{\ x \mid x \,\text{ist ganze Zahl und}\, 2 \,\text{teilt}\, x\ \}$$

die Menge der geraden ganzen Zahlen.

Definition und Beispiel 1.8 : Mengen, die bei uns immer wieder vorkommen, sind

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

(Pünktchen setzt man, wenn man nicht alle Elemente hinschreiben will oder kann, aber sich denken kann, wie es weitergeht), die Menge der **natürlichen Zahlen** ,

$$\mathbb{N}_0 \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der **natürlichen Zahlen mit Null**, und

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

die Menge der **ganzen Zahlen** . Wir wollen noch vereinbaren, dass es eine Menge gibt, die gar kein Element enthält, die **leere Menge** $\emptyset$.

Axiom 1.9 (Gleichheit zweier Mengen) : Zwei Mengen M und N heißen **gleich** , man schreibt $M \quad = \quad N$, wenn jedes Element von M auch Element von N , und jedes Element von N auch Element von M ist. Wir wollen diese Definition etwas formaler aufschreiben und dabei auch gleich zwei neue Symbole kennenlernen :

$$M \quad = \quad N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \ (x \in M \quad \Longleftrightarrow \quad x \in N) \quad ,$$

das Zeichen $:\Longleftrightarrow$ bedeutet, dass die linke Aussage durch die rechte definiert wird, man liest es : “**nach Definition gleichbedeutend**”. Das Zeichen $\forall$ heißt: “**für alle**” .

Definition 1.10 (Teilmenge): Seien M und N Mengen. Man sagt, M ist **Teilmenge** von N , wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Formal :

$$M \subset N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x : \ (x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in N).$$

Beispiel 1.11 : a) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.
b) Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subset M$.
Beweis: Es gilt $\forall x : (x \in \emptyset \implies x \in M)$, denn die Aussage "$x \in \emptyset$ " ist für alle x falsch, nach Definition der leeren Menge.

□

Wir definieren drei Operationen zwischen Mengen:
Definition 1.12 : Seien M und N Mengen.
a) Den **Durchschnitt** der Mengen M und N definieren wir als

$$M \cap N \quad := \quad \{ \ x \mid x \in M \wedge x \in N \ \}.$$

Dabei bedeutet das Zeichen " $:=$ ", dass die linke Menge durch die rechte Menge definiert wird. Man liest es: "**nach Definition gleich**".
b) Als **Vereinigung** der Mengen M und N definieren wir

$$M \cup N \quad := \quad \{ \ x \mid x \in M \vee x \in N \ \}.$$

c) Als **Differenz** von M und N definieren wir

$$M \setminus N \quad := \quad \{ \ x \mid x \in M \wedge x \notin N \ \}.$$

Bemerkung 1.13 : Wir haben inzwischen einige Zeichen kennengelernt:

$$\wedge \ , \quad \vee \ , \quad \neg \ , \quad \implies \ , \quad \iff \ , \quad :\iff$$

stehen zwischen zwei **Aussagen** . Die Zeichen

$$\cap \ , \quad \cup \ , \quad \setminus \ , \quad \subset \ , \quad = \ , \quad :=$$

stehen zwischen zwei **Mengen** . Das ist klar, wird aber von Anfängern häufig falsch gemacht. □

Falls $N \subset M$ ist, hat man für $M \setminus N$ eine besondere Bezeichnung:
Definition 1.14 : Seien M und N Mengen, $N \subset M$. Dann heißt

$$\complement N \quad := \quad M \setminus N$$

das **Komplement** von N (bezüglich M , genauer kann man auch $\complement_M N$ schreiben). □

Aus Satz 1.5 folgen einige Rechenregeln für $\cap, \cup, \complement$:

Satz 1.15 : Seien R, S, T Mengen, dann gilt
a) $R \cap S \quad = \quad S \cap R$
b) $(R \cap S) \cap T \quad = \quad R \cap (S \cap T)$
c) $R \cup S \quad = \quad S \cup R$
d) $(R \cup S) \cup T \quad = \quad R \cup (S \cup T)$
e) $R \cap (S \cup T) \quad = \quad (R \cap S) \cup (R \cap T)$
f) $R \cup (S \cap T) \quad = \quad (R \cup S) \cap (R \cup T)$
Sind S und T Teilmengen einer Menge M , so gilt für das Komplement bezüglich M :

g) $\complement(\complement S) \quad = \quad S$

h) $\complement(S \cup T) \quad = \quad \complement S \cap \complement T$

i) $\complement(S \cap T) \quad = \quad \complement S \cup \complement T$

Beweis mit den Regeln aus Satz 1.5 ; wir wollen das an einem Beispiel vorführen, etwa:
e) Nach Definition 1.9 muss man zeigen, dass jedes Element von $R \cap (S \cup T)$ auch Element von $(R \cap S) \cup (R \cap T)$ ist, und umgekehrt: Nun gilt für jedes Element x :

$$\begin{aligned}
& x \in R \cap (S \cup T) \stackrel{1.12}{\Longleftrightarrow} \\
& x \in R \wedge x \in S \cup T \stackrel{1.12}{\Longleftrightarrow} \\
& x \in R \wedge (x \in S \vee x \in T) \stackrel{1.5}{\Longleftrightarrow} \\
& (x \in R \wedge x \in S) \vee (x \in R \wedge x \in T) \stackrel{1.12}{\Longleftrightarrow} \\
& x \in R \cap S \vee x \in R \cap T \stackrel{1.12}{\Longleftrightarrow} \\
& x \in (R \cap S) \cup (R \cap T) \quad .
\end{aligned}$$

□

Definition 1.16 : Sei M eine Menge. Dann heißt

$$\mathfrak{P}(M) \quad := \quad \{ \ A \mid A \subset M \ \}$$

die **Potenzmenge** von M . $\mathfrak{P}(M)$ ist also die Menge aller Teilmengen von M .

Beispiel 1.17 : Es ist

$$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \quad ,$$

$$\mathfrak{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad ,$$

es gilt also $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ und $\emptyset \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, letzteres nach Beispiel 1.11 b) !

§2 Funktionen

Definition 2.1 : Seien M und N Mengen, dann heißt eine Vorschrift f , die **jedem** Element $x \in M$ **genau ein** Element aus N zuordnet, das man mit $f(x)$ bezeichnet, eine **Funktion (Abbildung)** von M **in** (nach, nicht: auf) N . Man schreibt zur Abkürzung

$$f \ : \ M \longrightarrow N \quad , \quad x \longmapsto f(x) \quad .$$

Die Menge M heißt der **Definitionsbereich** von f , die Menge N der **Wertebereich** von f , das Element $f(x)$ der **Funktionswert** von x .

Bemerkung 2.2 : Diese Definition ist etwas unbefriedigend, man kann nämlich fragen, was eine “Vorschrift” ist. Man kann das im Rahmen der Mengenlehre genauer machen, aber eine abstrakte mengentheoretische Definition würde Ihnen die konkrete Anwendung eher erschweren.

Beispiele 2.3 : Es ist nicht festgelegt, wie die Vorschrift f aussieht, die einem x , $x \in X$,ein $f(x) \in Y$ zuordnet. Etwa ist

$$f\ :\ \{1,2,3,4\}\ \longrightarrow\ \{5,6\}\quad ,$$
$$1\mapsto 6\,,\ 2\mapsto 6\,,\ 3\mapsto 6\,,\ 4\mapsto 5$$

eine Funktion. Schön ist es, wenn man für $f(x)$ eine Formel angeben kann, etwa

$$f\ :\ \mathbb{Z}\ \longrightarrow\ \mathbb{Z}\quad ,\quad f(x)\ :=\ 2\cdot x\quad ,\quad \text{oder}$$
$$f\ :\ \mathbb{N}\ \longrightarrow\ \mathbb{N}\quad ,\quad f(x)\ :=\ x^2\quad .\quad \text{Aber}$$
$$f\ :\ \mathbb{N}\ \longrightarrow\ \mathbb{N}\quad ,\quad f(x)\ :=\ \frac{x}{2}$$

geht nicht, denn für $x \in \mathbb{N}$ ist i.A. nicht $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$, und auch

$$f\ :\ \mathbb{N}\ \longrightarrow\ \mathbb{N}\quad ,\quad f(x)\ :=\ \pm 2\cdot x$$

geht nicht, denn $f(x)$ muss eindeutig bestimmt sein.

Definition 2.4 (Gleichheit von Funktionen) : Seien X, Y Mengen. Zwei Funktionen

$$f\ :\ X\ \longrightarrow\ Y\quad \text{und}\quad g\ :\ X\ \longrightarrow\ Y$$

heißen **gleich**, wir schreiben dann $f\ =\ g$, wenn gilt

$$\forall\, x\ :\ (x \in X\quad \Longrightarrow\quad f(x)\ =\ g(x))\,,$$

also wenn für alle $x \in X$ die Funktionswerte übereinstimmen.

Definition 2.5 : Seien X, Y Mengen, $f\ :\ X\ \longrightarrow\ Y$ eine Abbildung. Sei $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann heißt

$$f(M)\quad :=\quad \{\ y \in Y\ \mid\ \text{es gibt ein}\quad x \in M\quad \text{mit}\quad y\ =\ f(x)\ \}$$

das **Bild** von M unter f und

$$\overset{-1}{f}\,(N)\quad :=\quad \{\ x \in X\ \mid\ f(x) \in N\ \}$$

das **Urbild** von N unter f.
Die Definition des Bildes schreibt man formal so:

$$f(M)\ :=\ \{\ y \in Y\ \mid\ \exists\, x\ :\ (x \in M\ \wedge\ y\ =\ f(x))\ \}\quad ,$$

das Zeichen "$\exists$" spricht man: "es existiert ein".

Bemerkungen 2.6 : a) "$\exists$ " heißt : "es gibt "**mindestens** ein ", nicht etwa: "es existiert **genau** ein". Wir sehen das an dem Beispiel

$$f\ :\ \mathbb{Z}\ \longrightarrow\ \mathbb{Z}\,,\ f(x)\ :=\ x^2\quad \text{und}\quad M\ :=\ \{2,-2,3\}\quad .$$

Dann ist $f(M)\ =\ \{4,9\}$, denn zu
4 gibt es das Element 2 in M mit $f(2)\ =\ 4$, aber auch $f(-2)\ =\ 4$,
zu 9 gibt es (nur) das Element 3 in M mit $f(3)\ =\ 9$.

b) Will man ausdrücken, dass es **genau ein** Element x in M mit der Eigenschaft $A(x)$ gibt, so schreibt man

$$\exists !\, x \,:\; A(x) \quad \text{oder} \quad \exists_1\, x \,:\; A(x) \quad .$$

c) Hat man $f \,:\; X \longrightarrow Y$ und $y \in Y$, so ist

$$\overset{-1}{f}(\{y\}) \subset X \quad .$$

Es kann hierbei $\overset{-1}{f}(\{y\}) = \emptyset$ sein, oder $\overset{-1}{f}(\{y\})$ kann mehr als ein Element enthalten. Beispiel:

$$f \,:\; \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad f(x) := x^2 \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$\overset{-1}{f}(\{3\}) = \emptyset \quad , \quad \overset{-1}{f}(\{9\}) = \{3, -3\} \quad .$$

Man kann also nicht einfach eine Funktion von Y nach X definieren, indem man dem $y \in Y$ "das" Element aus $\overset{-1}{f}(\{y\})$ zuordnet. Unter welchen Umständen man die "Umkehrfunktion"

$$f^{-1} \,:\; Y \longrightarrow X \quad \text{zu einer Funktion} \quad f \,:\; X \longrightarrow Y$$

definieren kann, lernen Sie im Analysis-Teil des Kurses.

Bemerkung 2.7 : Die Zeichen "$\forall$ " und "$\exists$ " heißen **Quantoren** . Sei M eine Menge und $A(x)$ eine Formel, die erst dann eine Aussage (also entweder wahr oder falsch) wird, wenn man für die "Variable" x ein Element aus M einsetzt. Dann schreibt man:

$$\begin{aligned} \forall\, x \in M \,:\; A(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \,:\; (x \in M \Longrightarrow A(x)) \quad \text{und} \\ \exists\, x \in M \,:\; A(x) \quad &:\Longleftrightarrow \quad \exists\, x \,:\; (x \in M \wedge A(x)) \quad . \end{aligned}$$

Es ist wichtig, dass Sie lernen, mit diesen Quantoren umzugehen:

(2.8) Logische Regeln für Quantoren : Sei M eine Menge und seien $A(x), B(x)$ Formeln, die erst dann Aussagen werden, wenn man für die Variable x Elemente von M einsetzt. Die folgenden Regeln kann man (im Rahmen der Logik) beweisen:

(1) $\neg(\forall\, x \in M \,:\; A(x)) \iff \exists\, x \in M \,:\; (\neg A(x))$
(2) $\neg(\exists\, x \in M \,:\; A(x)) \iff \forall\, x \in M \,:\; (\neg A(x))$
(3) $\forall\, x \in M \,:\; A(x) \wedge \forall\, x \in M \,:\; B(x) \iff \forall\, x \in M \,:\; (A(x) \wedge B(x))$
(4) $\forall\, x \in M \,:\; A(x) \vee \forall\, x \in M \,:\; B(x) \Longrightarrow \forall\, x \in M \,:\; (A(x) \vee B(x))$

Man kann sich an einem Beispiel klarmachen, dass bei (4) nicht $\iff$ gilt: Sei für $x \in \mathbb{Z}$:

$A(x) \,:\iff x$ ist gerade,
$B(x) \,:\iff x$ ist ungerade,

dann gilt: $\forall\, x \in \mathbb{Z} \,:\; (A(x) \vee B(x))$, aber

$\forall\, x \in \mathbb{Z} \,:\; A(x) \vee \forall\, x \in \mathbb{Z} \,:\; B(x)$

gilt nicht, da die beiden Teilaussagen falsch sind. Es gilt noch

(5) $\exists\, x \in M \,:\; (A(x) \vee B(x)) \iff \exists\, x \in M \,:\; A(x) \vee \exists\, x \in M \,:\; B(x)$
(6) $\exists\, x \in M \,:\; (A(x) \wedge B(x)) \Longrightarrow \exists\, x \in M \,:\; A(x) \wedge \exists\, x \in M \,:\; B(x)$

und man hat noch drei Regeln für eine Formel $C(x, y)$ deren Wahrheitswert davon abhängt, welches x aus einer Menge M und welches y aus einer

Menge N man einsetzt: Es gilt

(7) $\forall x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) \iff \forall y \in N \, \forall x \in M : \; C(x,y)$

(8) $\exists x \in M \, \exists y \in N : \; C(x,y) \iff \exists y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y)$,

aber nur

(9) $\exists x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) \implies \forall y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y)$,

und auch hier wieder ein Beispiel dafür, dass " $\iff$ " nicht gilt: Sei M die Menge aller (jemals geborenen) Menschen und

$$V(x,y) \quad :\iff \quad x \quad \text{ist Vater von} \quad y \quad , \quad \text{dann gilt}$$

$$\forall y \in M \, \exists x \in M : \; V(x,y) \quad ,$$

d.h. jeder Mensch hat einen Vater, aber

$$\exists x \in M \, \forall y \in M : \; V(x,y)$$

gilt nicht, denn das würde bedeuten, dass alle Menschen den gleichen Vater haben, der dann auch Vater von sich selbst wäre.

Beispiel 2.9 : In den nächsten Tagen werden Sie im Analysis-Teil lernen: Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und x eine reelle Zahl. Dann heißt (x_n) konvergent gegen x ,wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : \; |x - x_n| < \varepsilon \quad .$$

Damit erhält man die Aussage : " (x_n) konvergiert nicht gegen x " als

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \in \mathbb{N} \, \exists n \geq n_0 : \; |x - x_n| \geq \varepsilon \quad .$$

Mit so komplizierten Aussagen wollen wir uns aber zunächst nicht beschäftigen:

§3 Beweismethoden

Ein mathematischer Satz hat die Form

$$A \quad ,$$

wobei A eine gegebene Aussage ist.

(3.1) Direkter Beweis : Wir zeigen die Aussage A , unter Verwendung vorher als wahr bewiesener Aussagen.

(3.2) Beispiele : 1) Satz : Für ganze Zahlen a, b gilt

$$(a-b)^2 \; = \; a^2 - 2ab + b^2 \quad .$$

Beweis: $(a-b)^2 \; = \; (a-b) \cdot (a-b) \; = \; (a-b) \cdot a - (a-b) \cdot b$

$$= \; a^2 - ba - ab + b^2 \; = \; a^2 - 2ab + b^2 \quad .$$

Welche Eigenschaften der Addition und Multiplikation ganzer Zahlen haben wir dabei benutzt ?

2) Satz: Für Mengen X, Y, Z gilt

$$X \subset Y \wedge Y \subset Z \quad \implies \quad X \subset Z \quad .$$

3) Satz: Für rationale Zahlen a, b mit $a \neq 0$, gilt

$$a + \frac{1}{a} = b \quad \Longrightarrow \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b \quad .$$

(3.3) Indirekter (Widerspruchs-)Beweis : Statt A kann man auch

$$\neg A \quad \Longrightarrow \quad B$$

zeigen, wobei B eine beliebige falsche Aussage ist. Wenn dann $\neg A \quad \Longrightarrow \quad B$ gezeigt ist, ist $\neg A$ falsch nach Def. 1.3 c). Man hat beim Aufschreiben solcher Beweise ein festes Schema, man schreibt:
Angenommen, die Aussage A ist falsch. Dann folgt ... . Dann ist B richtig, **Widerspruch**. Also ist die Aussage A richtig.
(3.4) Beispiele : 1) Behauptung: $\sqrt{2}$ ist nicht rational, d.h., es gibt keine ganzen Zahlen a, b mit $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$.
Beweis : **Angenommen**, es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, dann kann man davon ausgehen, dass a und b ungleich 0 sind (sonst wäre der Bruch nicht definiert oder $\sqrt{2} = 0$) , und dass der Bruch gekürzt ist, dass also a und b keine gemeinsamen Primfaktoren haben. Es gilt dann

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \text{also} \quad 2b^2 = a^2 \quad .$$

2 kommt dann in der Primfaktorzerlegung von a^2 vor, also in der Primfaktorzerlegung von a, es gibt ein $q \in \mathbb{Z}$ mit

$$a = 2q \quad , \quad \text{also} \quad a^2 = 4q^2 \quad ,$$

$$2b^2 = 4q^2 \quad , \quad \text{also} \quad b^2 = 2q^2 \quad .$$

Damit kommt nun 2 auch in der Primfaktorzerlegung von b vor, a und b haben einen gemeinsamen Primfaktor, **Widerspruch**. Also war die Annahme

$$\exists\, a, b \in \mathbb{Z} : \ \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad , \quad \text{falsch.}$$

2) Zeigen Sie indirekt: Für ganze Zahlen

a, b, c, d mit $c > 0$, $d > 0$ und $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d}$ gilt

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d} \quad .$$

(3.5) Induktionsbeweis : Aussagen über alle natürlichen Zahlen, also Aussagen der Form

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \ A(n)$$

kann man mit Hilfe des Induktionsaxioms beweisen. Das gehört zum Analysis-Teil des Kurses.

3.6 Beispiel und Gegenbeispiel

Man muss da vorsichtig sein. Man kann natürlich nicht allgemeine Aussagen durch Angabe eines Beispiels beweisen:
"Alle natürlichen Zahlen sind kleiner oder gleich 1.000.000 , denn es ist z.B. $25 \leq 1.000.000$ " ist Unsinn.

Aber wenn man zeigen will, dass eine Aussage der Form

$$\forall\, x \in M \ : \ \ A(x)$$

falsch ist, muss man nach Regel (2.8) (1) nur zeigen:

$$\exists\, x \in M \ : \ \ \neg A(x) \quad ,$$

d.h. es reicht, ein **Beispiel** für ein Element $x \in M$ anzugeben, für das die Aussage $A(x)$ falsch ist; es reicht ein **Gegenbeispiel**.

Beispiel 3.7 Die Aussage "$\forall\, x \in \mathbb{N} : \ \ x \leq 1.000.000$" ist falsch.

Beweis: Es ist $1.000.002 \in \mathbb{N} \wedge \neg 1.000.002 \leq 1.000.000$. □

Natürlich beweist man eine **Existenz**aussage

$$\exists\, x \in M \ : \ \ A(x)$$

dadurch,dass man ein Beispiel für ein Element $x \in M$ angibt, für das die Aussage $A(x)$ richtig ist, sprachlich so:
"Es gibt ein $x \in M$ mit der Eigenschaft $A(x)$, **nämlich** $x := \ldots$".

Beispiel 3.8 : Behauptung : $\exists\, x \in \mathbb{N}\, \forall\, y \in \mathbb{N} : \ \ x \cdot y = y$.

Beweis : Es gibt so ein x , **nämlich** $x := 1$, denn dafür gilt
$\forall\, y \in \mathbb{N} : \ \ 1 \cdot y = y$. □

Beispiel 3.9 : Seien X und Y beliebige Mengen,

$$f \ : \ \ X \ \longrightarrow \ Y \quad \text{eine Funktion. Gilt dann}$$

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{P}(X) \ : \ \ f(A) \cap f(B) \ = \ f(A \cap B) \quad ?$$

Wir behaupten, dass diese Aussage falsch ist, und brauchen dazu nur ein Gegenbeispiel : Sei

$$f \ : \ \ \mathbb{Z} \ \longrightarrow \ \mathbb{Z} \quad , \quad f(x) \ := \ x^2 \quad ,$$

$$A \ := \ \{2\}\, ,\, B \ := \ \{-2\} \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$A \cap B \ = \ \emptyset \quad , \quad \text{also} \quad f(A \cap B) \ = \ \emptyset \quad , \quad \text{aber}$$

$$f(A) \ = \ f(B) \ = \ \{4\} \quad , \quad \text{also} \quad f(A) \cap f(B) \ = \ \{4\} \quad .$$

Beispiel 3.10 : Seien X und Y Mengen,

$$f \ : \ \ X \ \longrightarrow \ Y \quad \text{und} \quad A \subset X \quad .$$

a) Dann gilt $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$.
Beweis: Für jedes $x \in A$ gilt $f(x) \in f(A)$ und damit

$$x \in \overset{-1}{f}(f(A)) \quad \text{nach Definition 2.5.}$$

b) Gilt auch allgemein $A = \overset{-1}{f}(f(A))$?
Nein. Gegenbeispiel : $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) := x^2$,

$$A := \{2\} \quad .$$

Dann ist $f(A) = \{4\}$, $\overset{-1}{f}(f(A)) = \{2, -2\} \neq \{2\} = A$.

(3.11) Gutes Formulieren

Die meisten Übungsaufgaben, die Sie künftig lösen müssen, bestehen aus einem Beweis. Sie müssen daher lernen, wie man Beweise richtig aufschreibt, und wenn sie das nicht schon in der Schule gelernt haben, müssen Sie es in den ersten zwei Semestern lernen - meistens dadurch, dass Ihnen Punkte abgezogen werden, wenn Sie es nicht ordentlich machen. Einiges kann ich Ihnen jetzt schon sagen:

1.) Setzen Sie nicht vom Leser Ihrer Beweise voraus, dass der es schon kann. Sprüche wie: "Das ist doch offensichtlich" oder "Es ist doch klar, was ich gemeint habe", verfangen nicht.

2.) Trennen Sie klar zwischen der Behauptung (zu der auch alle Voraussetzungen zählen) und dem Beweis. Im Beweis haben Redewendungen wie: "Zu zeigen ist ..." , "Wir müssen zeigen, dass ... ", nichts zu suchen. Im Beweis ist von den Voraussetzungen auszugehen und dann auf die Behauptung zu schließen, **keineswegs umgekehrt**. Äquivalentes Umformen der Behauptung ist zumindest schlechter Stil, führt häufig zu Fehlschlüssen und verlangt dem Leser unnötiges Nachdenken ab.

3.) Wenn Sie eine Formel aufschreiben: Sei sie noch so kompliziert, sie muss sich auch als deutscher (ggfs. englischer) Text, mit richtiger Grammatik, sprechen lassen, etwa

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

lässt sich sprechen als:

> Es gibt eine reelle Zahl a, so dass für jedes ε größer als 0 eine natürliche Zahl n_0 existiert, so dass für alle n größer als n_0 gilt: Der Betrag von $a_n - a$ ist kleiner als ε.

Das ist zwar länger als die Formel, aber für manchen verständlicher.

4.) Nicht jede beliebige Aneinanderreihung von Zeichen ist eine Formel. Zu beachten ist Bemerkung 1.13, und noch eine Regel zur Benennung von Variablen: Formeln mit "gebundenen Variablen", das sind solche, in denen eine Variable hinter einem Quantor vorkommt, wie das x in

$$\forall\, x \in \mathbb{N} : \quad x \geq 1 \quad ,$$

dürfen nicht zusammengesetzt werden mit Formeln, in denen dieselbe Variable “frei” vorkommt:

$$x \geq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{N} : \ x \geq 1 \quad \text{ist keine zulässige Formel.}$$

5.) Finden Sie einen guten Mittelweg zwischen Text und Formeln. Zu lange Formeln sind oft schwer verständlich, zu viel Text ist unübersichtlich, und trennen Sie Formeln und Text voneinander ab. Also:
“Es ist $n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$” ist schlecht, besser ist
“Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$n > 0 \quad \text{”}$$

6.) Im Text schreibt man Voraussetzungen im Konjunktiv:
“**Sei** X eine Menge und **sei** $x \in X$, dann **ist** $\{x\} \subset X$”.

7.) Machen sie bei jedem Beweisschritt, den Sie aufschreiben, klar, warum er gilt, etwa: “Dann folgt $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ **nach Def. des Urbilds**”.

8.) Alle Objekte (Mengen, Elemente, Funktionen, Aussagen) in der Mathematik bezeichnet man mit Buchstaben. Taucht ein Buchstabe zum ersten Mal auf, muss er definiert werden:
“Sei X eine Menge” oder “sei a eine ganze Zahl”.
Da die 25 kleinen lateinischen Buchstaben nicht ausreichen, verwendet man sehr oft griechische Buchstaben:

$$\alpha, \beta, \ldots, \phi, \psi, \ldots, \Phi, \Psi, \Xi, \Omega, \ldots$$

die Sie unbedingt kennen müssen, seltener Fraktur-Buchstaben

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots,$$

hebräische Buchstaben : $\aleph$ (aleph), in nicht so ferner Zukunft vielleicht chinesische Zeichen (wären praktisch, denn davon gibt es viele) und mathematische Sonderzeichen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots, \vec{a}, \ldots, \inf, \lim, \sin, \ldots \quad .$$

(3.12) Beispiele : 1) Formulieren Sie mit Worten:

a) $\{ \ x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 = 4 \ \} = \emptyset$.

b) $\{ \ n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \text{ hat bei Division durch 4 den Rest 3 } \} = \emptyset$.
Beweisen Sie diese Aussage!

c) $\forall x \in \mathbb{N} \, \exists y \in \mathbb{N} : \ y > x$. Beweis !

d) $\forall U \subset \mathbb{N} : \ ((1 \in U \wedge \forall n \in U : n+1 \in U) \implies U = \mathbb{N})$
(Induktionsaxiom)

2) Schreiben Sie es als Formel:

a) Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt genau ein kleinstes Element.

b) Es gibt ein Element 0 in $\mathbb{Z}$, so dass für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $x + 0 = x$.

c) Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein Element, das, zu x addiert, 0 ergibt.

3) Schreiben Sie, mit passend formulierten Aussagen, als Formel:

a) In manchen Häusern haben nicht alle Wohnungen fließendes Wasser.

($W(x,h) \quad :\Longleftrightarrow \quad x$ ist Wohnung in Haus h ,

$F(x) \quad :\Longleftrightarrow \quad x$ hat fließendes Wasser ,

$H :=$ Menge der Häuser, $W :=$ Menge der Wohnungen.)

b) In manchen Häusern haben alle Wohnungen fließendes Wasser.

c) In jedem Haus haben entweder mindestens zwei Wohnungen oder keine Wohnung fließendes Wasser.

Bilden Sie die Negation in Formeln und übersetzen Sie diese in deutschen Text.

(3.13) Beispiel : Sei

$$M := \{ \ A \ | \ A \text{ ist Menge und } A \notin A \ \}$$

und nehmen Sie an, dass M eine Menge ist.

a) Beweisen Sie durch Widerspruch : $M \notin M$.

b) Beweisen Sie durch Widerspruch : $M \in M$.

Folgerung : M ist keine Menge. Das ist die **Russellsche Antinomie** , die beweist, dass man - anders als es die Definition 1.6 nahelegt - doch nicht alles zu einer Menge zusammenfassen kann.

§4 Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen tauchen im täglichen Leben ständig auf:

Beispiel 4.1 : a) Sie zahlen 0,02 Euro pro Minute fürs Telefonieren, haben eine monatliche Grundgebühr von 20 Euro und wolllen nicht mehr als 30 Euro fürs Telefonieren pro Monat ausgeben. Wie viele Minuten können Sie höchstens telefonieren ?

Antwort: Wenn Sie maximal x Minuten telefonieren, gilt

$$20 + x \cdot 0{,}02 = 30 \quad , \quad \text{also}$$

$$x \cdot 0{,}02 = 30 - 20 = 10 \quad ,$$

$$x = \frac{10}{0{,}02} = \frac{1000}{2} = 500 \quad .$$

Sie können also 500 Minuten telefonieren. □

Das war ein Beispiel für eine **lineare** Gleichung.

b) Man fragt, wo die Kurve $y = x^2 - 2$, also die Menge

$$\{ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ | \ y = x^2 - 2 \ \}$$

die Gerade $y = 2x + 1$ schneidet, das ist die Menge

$$\{ \ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ | \ y = 2x + 1 \ \} \quad ,$$

wobei $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge der **geordneten Paare** (x,y) ist, mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Man kann mengentheoretisch exakt formulieren, was ein geordnetes Paar ist, merken muss man sich nur, dass für $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x,y) = (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \wedge y = b \quad .$$

Die Frage ist hier also: Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^2 - 2 = 2x + 1 \quad ?$$

Das ist eine **quadratische** Gleichung für x. Es gilt

$$\begin{aligned} & x^2 - 2 = 2x + 1 \\ \iff \quad & x^2 - 2x - 3 = 0 \, , \end{aligned}$$

und man kann quadratische Ergänzung machen:

$$\begin{aligned} \ldots \quad \iff \quad & x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \\ \iff \quad & x^2 - 2x + 1 = 4 \\ \iff \quad & (x-1)^2 = 2^2 \\ \iff \quad & (x-1)^2 - 2^2 = 0 \\ \iff \quad & ((x-1) - 2) \cdot ((x-1) + 2) = 0 \\ \iff \quad & x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \\ \iff \quad & x = 3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Welche Eigenschaften der reellen Zahlen haben Sie dabei benutzt ?

(4.2) Allgemeine Formulierung : "Die Lösung x einer Gleichung" zu finden, ist folgendes Problem: Gegeben Sei eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

dann suchen wir ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$. Je nachdem, wie f aussieht, unterscheidet man verschiedene Arten von Gleichungen:

(4.3) Lineare Gleichungen : Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := ax + b$ mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$, dann heißt

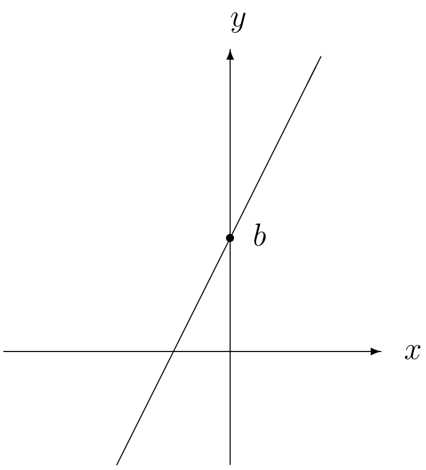
$$f(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad ax + b = 0$$

eine **lineare Gleichung**. Ob und wie man eine Lösung bekommt, kann man sich graphisch veranschaulichen:

a) Ist $a \neq 0$, so ist

$$G := \{ \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax + b \ \}$$

eine Gerade, mit einer "Steigung" $a \neq 0$:



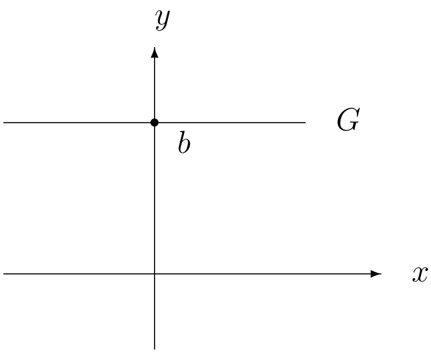
Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $ax + b = 0$, denn es gilt

$$ax+b = 0 \iff ax = -b \iff x = -\frac{b}{a} \quad .$$

Für $a = 0$ geht das natürlich nicht:
b) Für $a = 0\,,\, b \neq 0$ ist

$$G = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\ \}$$

eine zur $x-$Achse parallele Gerade, aber nicht die $x-$Achse selber.



G hat keinen Schnittpunkt mit der $x-$Achse, die Menge

$$\{\ x \in \mathbb{R} \mid 0 \cdot x + b = 0\ \} \quad \text{ist leer,}$$

es gibt keine Lösung.
c) Für $a = 0$ und $b = 0$ hat $ax+b = 0$, also
$0 = 0$, jedes $x \in \mathbb{R}$ als Lösung, die Menge

$$\{\ x \in \mathbb{R} \mid 0 \cdot x + 0 = 0\ \} \quad \text{ist ganz} \quad \mathbb{R} \quad .$$

Insgesamt : $ax+b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat

$$\begin{cases} \text{genau eine Lösung, falls } a \neq 0 \\ \text{keine Lösung, falls } a = 0 \text{ und } b \neq 0 \\ \text{jedes } x \in \mathbb{R} \text{ als Lösung, falls } a = b = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

(4.4) Quadratische Gleichungen : Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

heißt eine **quadratische Gleichung** . Dabei können wir
$a \neq 0$ annehmen, denn $bx + c = 0$ ist eine lineare Gleichung, und die haben wir in (4.3) schon behandelt. Für

$$f(x) := ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \quad \text{gilt dann}$$

$$f(x) = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad ,$$

und wenn wir $p := \dfrac{b}{a}$, $q := \dfrac{c}{a}$ setzen, haben wir die Gleichung

$$x^2 + p\,x + q = 0 \quad .$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$x^2 + p\,x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad , \quad \text{also mit}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad .$$

Für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ erhalten wir keine Lösung in $\mathbb{R}$, aber für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist das gleichbedeutend mit

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad , \quad \text{also mit}$$

$$\boxed{(1) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Als Lösungsmenge $L := \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ x^2 + p\,x + q = 0 \ \}$ erhalten wir also

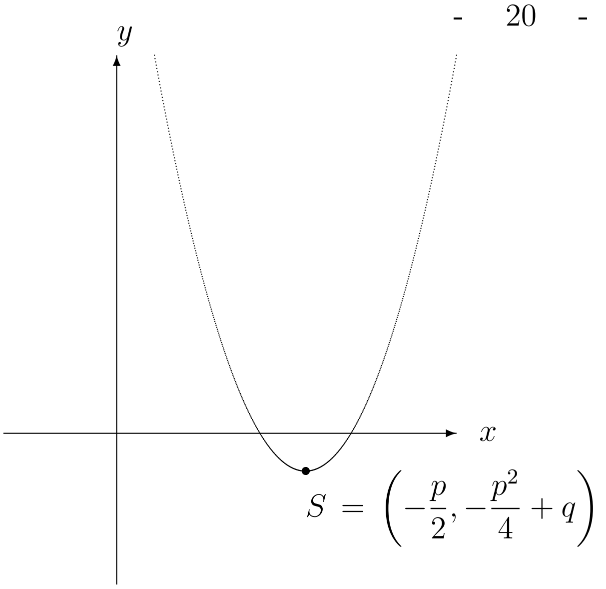
$$L = \begin{cases} \left\{ -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right\} , & \text{falls } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0\,, \\ \left\{ -\frac{p}{2} \right\} \quad , & \text{falls } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0\,, \\ \emptyset \quad , & \text{falls } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \end{cases}$$

ist. Die Formel (1) heißt auch <u>$p, q-$**Formel**</u> .
Setzt man wieder $\frac{b}{a}$ für p und $\frac{c}{a}$ für q ein, so erhält man

$$\boxed{(2) \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

als Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$. Eine der beiden Formeln (1) oder (2) sollten Sie auf jeden Fall kennen, auch wenn Sie mitternachts aus dem Schlaf gerissen werden. (2) heißt daher <u>**Mitternachtsformel**</u>. (Es gibt schon noch ein paar mehr Formeln, die Sie auf jeden Fall auswendig können müssen.)
Dass es für die Lösungsmenge L von $x^2 + p\,x + q = 0$ drei Möglichkeiten gibt, sieht man, wenn man

$$\{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y = x^2 + p\,x + q \ \} \quad \text{zeichnet :}$$



Im Punkt S hat $f(x) := x^2 + p\,x + q$ ein Minimum, und je nachdem, ob $\frac{p^2}{4} - q > 0\,, = 0$ oder < 0 ist, hat f zwei, eine oder keine Nullstelle.

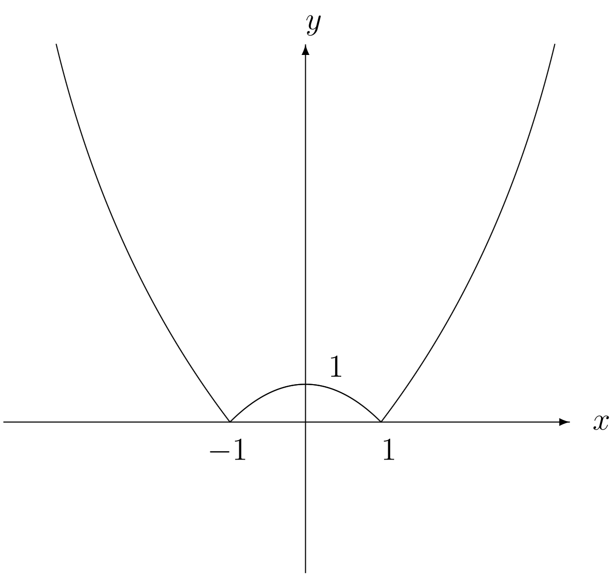
(4.5) Betragsgleichungen : Für reelle Zahlen a definiert man den **Betrag** von a durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

ist. Damit kann man Funktionen wie

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) := |x^2 - 1|$$

definieren:



Es gilt dann

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{falls } x \leq -1 \text{ oder } x \geq 1 \text{ ist,} \\ 1 - x^2, & \text{falls } -1 < x < 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Bei der Lösung von Gleichungen muss man also Fallunterscheidungen machen:

(4.6) Beispiel : Gesucht sind die Lösungen x von

$$|x^2 - 1| = x \quad .$$

Wie wir gesehen haben, müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Ist
$\underline{|x| \geq 1}$, so ist $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, wir suchen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x^2 - 1 = x \quad \text{und} \quad |x| \geq 1 \quad , \quad \text{also}$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{und} \quad |x| \geq 1 \quad , \quad \text{das ergibt}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{1} \quad \wedge \quad |x| \geq 1 \quad .$$

Nun ist $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \dfrac{\sqrt{9}-1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$, also haben wir (wegen $\left|\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > \dfrac{1+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{3}{2} \geq 1$) nur $x_1 := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ als Lösung. Ist
$\underline{|x| < 1}$, so ist $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, wir suchen $x \in \mathbb{R}$ mit

$$1 - x^2 = x \quad \text{und} \quad |x| < 1 \quad , \quad \text{also}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{und} \quad |x| < 1 \quad , \quad \text{also}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad |x| < 1 \quad .$$

Nun ist $\left|\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < \dfrac{\sqrt{4}+1}{2} = \dfrac{3}{2} < 1$, also haben wir nur $x_2 := -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ als Lösung (überzeugen Sie sich davon, dass $|x_2| < 1$ ist !).
Insgesamt ist

$$L = \left\{ \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \right\} \quad \text{die Lösungsmenge von} \quad |x^2 - 1| = x \quad .$$

(4.7) Gleichungssysteme: Manchmal sucht man Zahlen, die gleichzeitig Lösungen mehrerer Gleichungen sind, also von Gleichungssystemen. Beispiele:
a) Wir suchen die Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ 3x + 4y & = & 3 \end{array} \right.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten. Geometrisch sind das die Gleichungen zweier Geraden, und der Punkt (x, y), der beide Gleichungen erfüllt, ist der Schnittpunkt. Zum Lösen addieren wir das $(-3)-$fache der 1. zur 2. Gleichung Da wir dann wieder das $3-$fache der 1. zur 2.Gleichung addieren könnten, ist das eine Äquivalenzumformung, ändert also nichts am Ergebnis:

$$(1') \qquad \begin{cases} x - 2y &= 1 \\ 10y &= 0 \end{cases}$$

also $y = 0$, $x = 1$, und $(1,0)$ ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.
b) Wir suchen die $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$(2) \qquad \begin{cases} 2x - 6y &= 4 \\ -3x + 9y &= -6 \end{cases}$$

und stellen fest: Wenn wir das $\frac{3}{2}-$fache der 1.Gleichung zur 2. addieren, erhalten wir

$$(2') \qquad \begin{cases} 2x - 6y &= 4 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

und alle Punkte auf der Geraden $2x - 6y = 4$ sind Lösungen. Der Unterschied zu a) ist: Für die “Vektoren”

$$(2,-6,4) \quad \text{und} \quad (-3, 9-6) \quad \text{gilt}$$

$$3 \cdot (2,-6,4) + 2 \cdot (-3,9,6) = (0,0,0) \quad ,$$

man sagt: Das Paar $((2,-6,4)\,,\,(-3,9,-6))$ ist linear abhängig.Wir werden darauf in §5 noch eingehen.

(4.8) Gleichungen vom Grad ≥ 3:
Definition : Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **(polynomiell) vom Grad n**, wenn es $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$a_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \;\; f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad .$$

Für $n = 3$ und $n = 4$ gibt es Lösungsformeln für $f(x) = 0$, die aber so kompliziert sind, dass man sie heutzutage nicht mehr lernt, weil man die Lösungen schnell mit beliebig vorgegebener Genauigkeit auf dem Computer berechnen kann. Für $n \geq 5$ kann man beweisen: Es gibt keine für alle Fälle gültigen Lösungsformeln.
(4.9) Biquadratische Gleichungen haben die Form $f(x) = 0$ mit

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \;\; f(x) = ax^4 + bx^2 + c \quad ,$$

es sind also Gleichungen 4.Grades, in denen aber x und x^3 nicht vorkommen. Man löst sie, indem man $z := x^2$ setzt und dann $z \in \mathbb{R}$ mit

$$az^2 + bz + c = 0$$

bestimmt. Hat man dann eine Lösung z mit $z \geq 0$, so kann man x aus $z = x^2$ berechnen. So erhält man insgesamt $0, 1, 2, 3$ oder 4 Lösungen.

(4.10) Beispiel : Gesucht sind die Lösungen $x \in \mathbb{R}$ von

$$x^4 - 3x^2 = 4 \quad .$$

Lösung: Für $z := x^2$ ergibt sich

$$z^2 - 3z - 4 = 0 \quad , \quad \text{also}$$

$$z = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad , \quad \text{also}$$

$$x^2 = z \in \{4, -1\} \quad .$$

$x^2 = -1$ kann für $x \in \mathbb{R}$ nicht gelten, also

$$x^2 = 4 \quad , \quad x \in \{\pm 2\} \quad .$$

Hier hat man also 2 Lösungen. □

Hat man Gleichungen, die nicht von der beschriebenen Form sind, so kann man versuchen, sie auf eine Form zu bringen, die man lösen kann:

(4.11) Beispiel: Gesucht sind die $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} - \sqrt{3x} = 0 \quad .$$

Ehe man quadriert, sollte man so umstellen, dass sich nach dem Quadrieren die Anzahl der Wurzeln verringert:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{3x}$$

$$\begin{array}{lrcl}
\Longrightarrow & x+2+x+3+2\sqrt{(x+2)(x+3)} & = & 3x \\
\Longrightarrow & 2\sqrt{x^2+5x+6} & = & x-5 \\
\Longrightarrow & 4(x^2+5x+6) & = & x^2-10x+25 \\
\Longleftrightarrow & 3x^2+30x-1 & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2+10x-\dfrac{1}{3} & = & 0 \\
\Longleftrightarrow & x_{1,2} & = & -5 \pm \dfrac{\sqrt{228}}{3} \quad .
\end{array}$$

Es ist $x_1 = \dfrac{\sqrt{228}}{3} - 5 > \dfrac{\sqrt{225}}{3} - 5 = \dfrac{15}{3} - 5 = 0 \quad , \quad x_2 < 0 \quad .$

Beachten Sie dabei: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, es gilt nur: $a = b \quad \Longrightarrow \quad a^2 = b^2$. Man muss also die Probe machen und sehen, ob das gefundene x tatsächlich eine Lösung ist. Hier ist nur x_1 nichtnegativ, $\sqrt{3x_2}$ ist nicht definiert, wir haben nur eine Lösung.

(4.12) Rechnen mit Ungleichungen : In der Analysis lernt man: Für reelle Zahlen ist eine Anordnung "$<$" definiert, mit folgenden Regeln:

(A1) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Aussagen

$$0 < a \quad , \quad a = 0 \quad , \quad a < 0 \quad ,$$

(A2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \ (0 < a \ \wedge \ 0 < b \quad \Longrightarrow \quad 0 < a+b) \quad ,$

(A3) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : \ (0 < a \ \wedge \ 0 < b \quad \Longrightarrow \quad 0 < a \cdot b) \quad .$

Man definiert :

$$a < b \quad :\Longleftrightarrow \quad 0 < b - a \quad , \quad b > a \quad :\Longleftrightarrow \quad a < b \quad ,$$

$$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad (a < b \ \vee \ a \ = \ b) \quad , \quad b \geq a \quad :\Longleftrightarrow \quad a \leq b$$

und kann dann folgende Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen beweisen, die man sich merken muss: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(1)		$a < b$	$\Longleftrightarrow$	$a + c < b + c$
(2)	falls $c > 0$ ist:	$a < b$	$\Longleftrightarrow$	$ac \ < \ bc$
(3)	falls $c < 0$ ist:	$a < b$	$\Longleftrightarrow$	$ac \ > \ bc$
(4)	falls $a, b > 0$ sind:	$a < b$	$\Longleftrightarrow$	$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

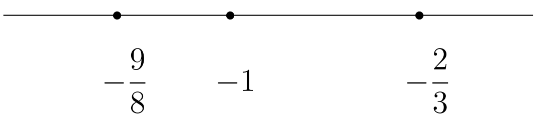
(4.13) Beispiel : Gesucht ist die Lösungsmenge L von

$$(1) \qquad \frac{5 + 2x}{2 + 3x} \ < \ -2 \quad .$$

Zur Lösung müssen wir eine Fallunterscheidung machen:
a) Ist $2 + 3x > 0$, so ist

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad 5{+}2x < -2{\cdot}(2{+}3x) \wedge 2{+}3x > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8x < -9 \wedge 3x > -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x < -\frac{9}{8} \wedge x > -\frac{2}{3} \quad ,
\end{aligned}$$

aber wegen $-\dfrac{2}{3} > -\dfrac{9}{8}$ gibt es solche x nicht :



b) Ist $2 + 3x < 0$ so ist

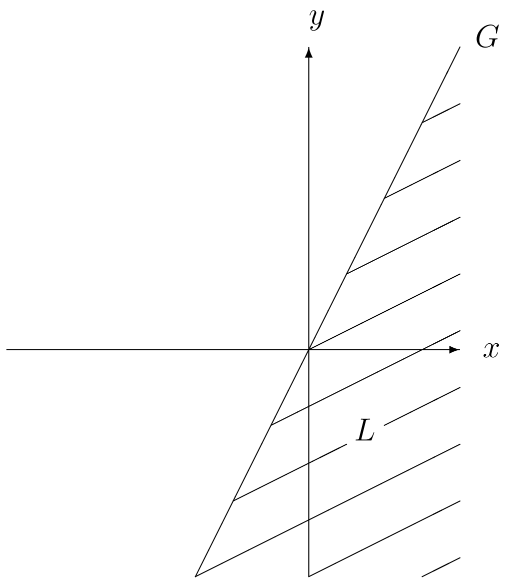
$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad 5{+}2x > -2{\cdot}(2{+}3x) \wedge 2{+}3x < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 8x > -9 \wedge 3x < -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x > -\frac{9}{8} \wedge x < -\frac{2}{3} \quad ,
\end{aligned}$$

also ist $L \ = \ \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ -\dfrac{9}{8} < x < -\dfrac{2}{3} \ \}$.

Bemerkung 4.14 : Es ist wichtig zu wissen,dass man sich die Lösungsmenge von Ungleichungen im $\mathbb{R}^2$ anschaulich machen kann:

$G \ := \ \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y \ = \ 2x + 1 \ \}$ ist eine Gerade,

$L \ := \ \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ y \leq 2x + 1 \ \}$ besteht aus den Punkten auf und unterhalb der Geraden:

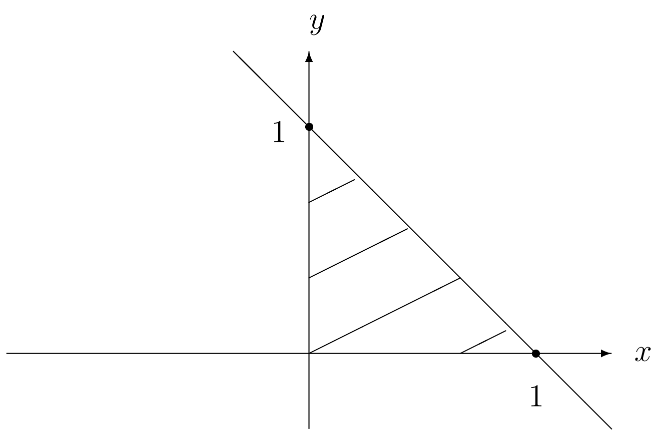


(4.15) Beispiel : Veranschaulichen Sie die Menge

$$L := \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ |x| + |y| < 1 \ \} \quad .$$

Lösung: Man muss für x und y Fallunterscheidungen machen:
a) Ist $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ("1.Quadrant") , so gilt

$$|x| + |y| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y < 1 - x \ :$$



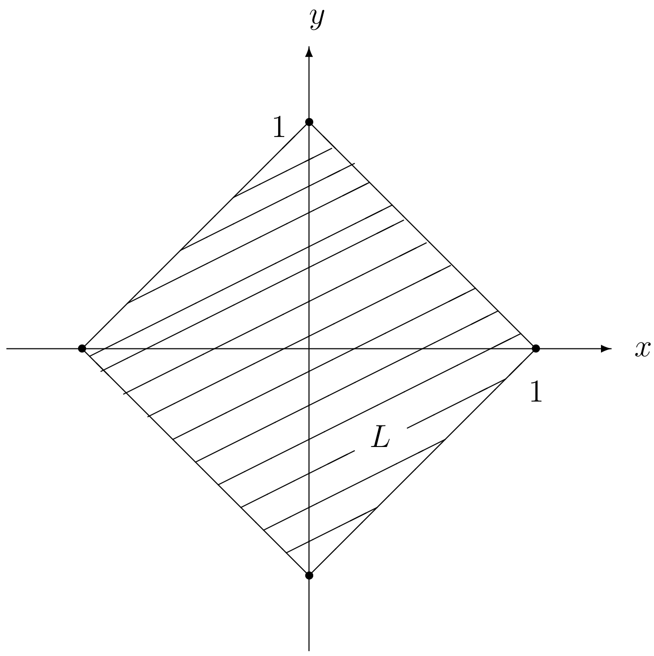
b) Entsprechend erhält man für

$$x < 0 \wedge y \geq 0 : \ (x \in L \quad \Longleftrightarrow \quad y < 1 + x) \quad ,$$

$$x \geq 0 \wedge y < 0 : \ (x \in L \quad \Longleftrightarrow \quad y > x - 1) \quad ,$$

$$x < 0 \wedge y < 0 : \ (x \in L \quad \Longleftrightarrow \quad y > -1 - x) \quad ,$$

und insgesamt sieht L so aus :



(4.16) Weitere Aufgaben:

(1) Veranschauliche $M := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x+3 \wedge y > x^2 \}$.
(2) Zeichne $L := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x-3| \wedge y < -|x-3|+2 \}$.
(3) Zeichne $L := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \}$.
(4) Zeichne $L := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \}$.
(5) Zeichne für $a,b,c \in \mathbb{R}$: $E := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \}$.
(6) Durch welche Ungleichung wird die Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(3,5)$ und Radius 2 beschrieben ?

§5 Der $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Vektorraum

Definition 5.1 : Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besteht $\mathbb{R}^n$ aus den $n-$tupeln

$$(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{mit} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad .$$

Wie bei Paaren definiert man für $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} : \; x_j = y_j \quad .$$

Definition 5.2 : Man kann Elemente von $\mathbb{R}^n$ addieren :

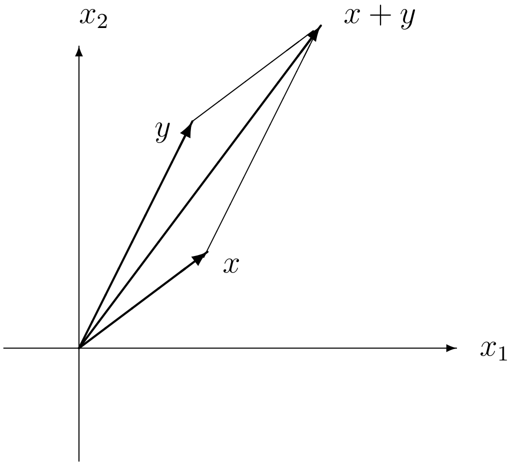
$$(x_1, \ldots x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \quad ,$$

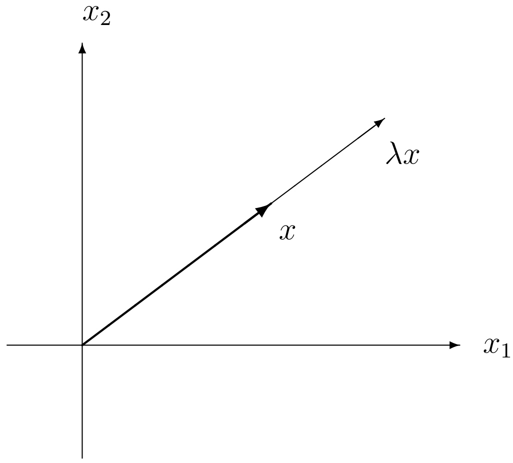
und von links mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren :

$$\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \quad ,$$

für $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Wir nennen die Elemente von $\mathbb{R}^n$ **Vektoren** und die Zahlen aus $\mathbb{R}$ **Skalare** . Für $n=2$ und $n=3$ kann man sich

diese Rechenoperationen veranschaulichen:
Im $\mathbb{R}^2$:





Noch zur Schreibweise: Man hat die reelle Zahl 0 , und

$$0 \;:=\; (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

wir schreiben für beide Elemente dasselbe Zeichen. Zu

$$x \;=\; (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{hat man}$$

$$-x \;:=\; (-x_1,\ldots,-x_n) \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \text{dafür gilt}$$

$$x + (-x) \;=\; 0 \quad .$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir kurz

$$x - y \;:=\; x + (-y) \quad .$$

Bemerkung 5.3 : Sie werden es in der Linearen Algebra lernen: $\mathbb{R}^n$ mit $+$ und der Skalarmultiplikation ist ein $\mathbb{R}-$Vektorraum. Aber man hat für Vektoren im $\mathbf{\mathbb{R}^n}$ noch eine weitere Rechenoperation:

Definition 5.4 : Für

$$x \;=\; (x_1,\ldots,x_n) \quad , \quad y \;=\; (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{nennen wir}$$

$$< x, y > \quad := \quad x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

das **kanonische Skalarprodukt** von x und y. Man hat also die Abbildung

$$< \;,\; >: \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad ,$$

$$(x, y) \quad \longmapsto \quad < x, y > \quad ,$$

d.h. zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird der Skalar $< x, y > \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Behauptung 5.5 : Für alle $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{lrcl}
(S1) & < x + x', y > & = & < x, y > + < x', y > \quad , \\
 & < \lambda x, y > & = & \lambda < x, y > \quad , \\
(S2) & < x, y > & = & < y, x > \quad , \\
(S3) & \multicolumn{3}{l}{< x, x > \;\geq\; 0 \;\wedge\; (x \neq 0 \;\Longrightarrow\; < x, x > \;>\; 0) \quad .}
\end{array}$$

Beweisen kann man diese Aussagen direkt mit der Definition. Zum Beweis von (S3) braucht man noch die Anordnungsaxiome (A1) - (A3) aus (4.12). □

Wegen (S3) ist die folgende Definition sinnvoll:
Definition 5.6 : Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nennen wir

$$\|x\| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

die **Norm** (**Länge**) von x. □

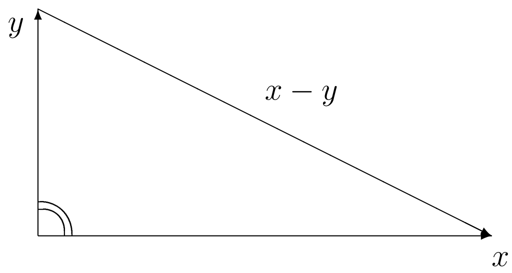
Den Winkel zwischen zwei Vektoren wollen wir jetzt nicht definieren, dazu fehlen uns Kenntnisse aus der Analysis. Aber wir können definieren, wann zwei Vektoren aufeinander "senkrecht" stehen:

Definition 5.7 : Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen, x und y stehen **senkrecht** aufeinander, oder: x und y sind zueinander **orthogonal** , in Zeichen: $x \perp y$, wenn gilt $< x, y > = 0$. □

Ganz einfach zu beweisen (aber letztlich nur eine Folge davon, dass wir unsere Definitionen passend gewählt haben) ist

Satz 5.8 (Pythagoras) : Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \perp y$, dann gilt

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$



Beweis :

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &\overset{5.6}{=} < x-y, x-y > \overset{5.5}{=} < x, x-y > - < y, x-y > \\ &\overset{5.5}{=} < x,x > - < x,y > - < y,x > + < y,y > \\ &\overset{5.7}{=} < x,x > + < y,y > = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad . \end{aligned}$$

□

Definition 5.9 : Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $p, a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Dann heißt die Menge

$$G_{p,a} := \{ \ p + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R} \ \}$$

die **Gerade** durch p, mit der **Richtung** a. Die Schreibweise $G_{p,a}$ für eine Gerade heißt eine **Parameterdarstellung** für diese Gerade.

Bemerkung 5.10 : p und a sind bei dieser Schreibweise nicht eindeutig bestimmt. Man überlege sich: Für $p, q, a, b \in \mathbb{R}^n$, $a, b \neq 0$, gilt

$$G_{p,a} = G_{q,b} \iff q \in G_{p,a} \wedge \exists\, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ b = \mu\, a \quad .$$

□

Man kann mit dieser Parameterdarstellung durchaus rechnen, z.B. kann man Schnittpunkte ausrechnen, wenn sie existieren. Im $\mathbb{R}^2$ kann man Geraden auch anders, als Lösungsmenge <u>einer</u> linearen Gleichung, angeben:

Satz 5.11 : Seien $p, a \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \neq 0$,

$c := (-a_2, a_1)$ und $\alpha := < p, c >$, dann ist

$G_{p,a} = H_{c,\alpha}$ mit

$$H_{c,\alpha} := \{ \ x \in \mathbb{R}^2 \ | \ < c, x > = \alpha \ \} \quad .$$

Statt $< c, x > = \alpha$ kann man ausführlicher

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \alpha$$

schreiben, deshalb heißt $H_{c,\alpha}$ auch eine **Gleichungsdarstellung** dieser Geraden.

Beweis : 1) Sei $x \in G_{p,a}$, dann folgt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \ x = p + \lambda a \quad , \quad \text{also für} \quad c = (-a_2, a_1) :$$

$$\begin{aligned} < c, x > &= < (-a_2, a_1) \, , \, p + \lambda a > \\ &= < (-a_2, a_1), p > + \lambda < (-a_2, a_1), (a_1, a_2) > \\ &= < p, c > + \lambda \, (-a_2 a_1 + a_1 a_2) = \alpha \, , \end{aligned}$$

also ist $x \in H_{c,\alpha}$.

2) Sei $x \in H_{c,\alpha}$, also $< c, x > = \alpha$ mit $\alpha = < p, c >$, dann gilt

$< c, x > - < p, c > = 0$, also

$< x - p, (-a_2, a_1) > = 0$,

und wenn wir $y := x - p$ setzen, $y = (y_1, y_2)$:

$(*)$ $\quad - a_2 \, y_1 + a_1 \, y_2 = 0$.

Ist nun $\underline{a_1 \neq 0}$, so erhalten wir mit $\lambda := \dfrac{y_1}{a_1}$:

$$y_1 = \lambda \, a_1 \quad \wedge \quad y_2 = a_2 \frac{y_1}{a_1} = \lambda \, a_2 \quad , \qquad \text{also} \quad y = \lambda \, a \, ,$$

und ist $\underline{a_1 = 0}$, so ist wegen $a \neq 0$: $a_2 \neq 0$, aus $(*)$ folgt

$$y_1 = 0 \quad , \qquad \text{also} \quad y = (0, y_2) = \frac{y_2}{a_2} (0, a_2) = \lambda \, a \quad \text{mit} \quad \lambda := \frac{y_2}{a_2} \quad ,$$

in jedem Fall: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$x - p = y = \lambda \, a$,

$x = p + \lambda \, a$, also $x \in G_{p,a}$. □

Im $\mathbb{R}^3$ (und im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$) gilt der Satz nicht mehr, eine Gerade ist niemals die Lösungsmenge zu <u>einer</u> linearen Gleichung.

Bemerkung 5.12 : Im $\mathbb{R}^3$ seien drei Vektoren

$$p, a, b$$

gegeben, wie kann man sich die Menge

$$E_{p,a,b} := \{ \; p + \lambda\, a + \mu\, b \;\mid\; \lambda\,,\; \mu \in \mathbb{R} \; \}$$

veranschaulichen ?

a) Für $a = b = 0$ ist $E_{p,a,b} = \{p\}$ die Menge mit dem einen Element p.

b) Für $a \neq 0\,,\; b = 0$ ist $E_{p,a,b} = \{ \; p + \lambda\, a \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R} \; \}$ nach Definition 5.9 eine Gerade, ebenso für $a = 0\,,\; b \neq 0$.

c) Im Fall $a \neq 0$, $b \neq 0$ kann es sein, dass gilt:

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R} \;:\; b = \gamma a \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$\begin{aligned} E_{p,a,b} &= \{ \; p + \lambda a + \mu\gamma a \;\mid\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \} \\ &= \{ \; p + (\lambda + \mu\gamma) a \;\mid\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \} \\ &\subset G_{p,a} \quad , \quad \text{sogar} \qquad G_{p,a} = E_{p,a,b} \quad , \end{aligned}$$

denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$p + \lambda a = p + \lambda a + 0b \in E_{p,a,b} \quad .$$

Ebenso gilt: Sind $a, b \neq 0$ und $\exists\, \delta \in \mathbb{R} \;:\; a = \delta\, b$, so ist

$$E_{p,a,b} = G_{p,b} \quad .$$

Jedenfalls: In den Fällen a) - c) ist $E_{p,a,b}$ ein Punkt oder eine Gerade. Die Voraussetzung für die Fälle a) -c) kann man allgemein formulieren als

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \;:\; \lambda\, a + \mu\, b = 0 \quad .$$

Das Paar (a, b) heißt in diesem Fall linear abhängig:

Definition 5.13 : Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Das Paar (a, b) heißt **linear unabhängig**, wenn gilt

$$\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (\lambda\, a + \mu b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu = 0) \quad .$$

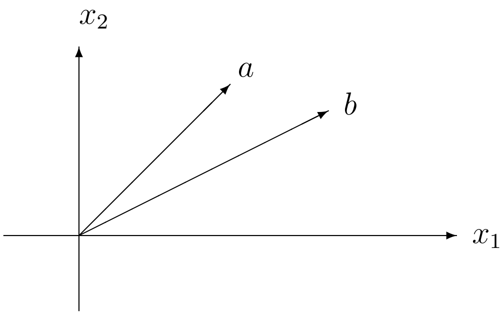
<u>**Folgerung 5.14 :**</u> (1) Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
(a,b) \quad & \text{ist linear abhängig} \\
\iff \quad & \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \ (\lambda\, a + \mu\, b = 0 \quad \wedge \quad (\lambda,\mu) \neq (0,0)) \\
\iff \quad & \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \ (\lambda \neq 0 \quad \wedge \quad a = -\frac{\mu}{\lambda} b) \\
& \vee \ \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 : \ (\mu \neq 0 \quad \wedge \quad b = -\frac{\lambda}{\mu} a) \quad ,
\end{aligned}
$$

(a, b) ist also genau dann linear abhängig, wenn a ein Vielfaches von b oder b ein Vielfaches von a ist.
(2) Dass (a, b) linear unabhängig ist, bedeutet nach (1) also, dass a und b verschiedene Richtungen haben, und

$$\{ \ \lambda a + \mu b \mid \lambda\,,\, \mu \in \mathbb{R} \ \}$$

ist die von a und b "aufgespannte" Ebene durch den Nullpunkt:

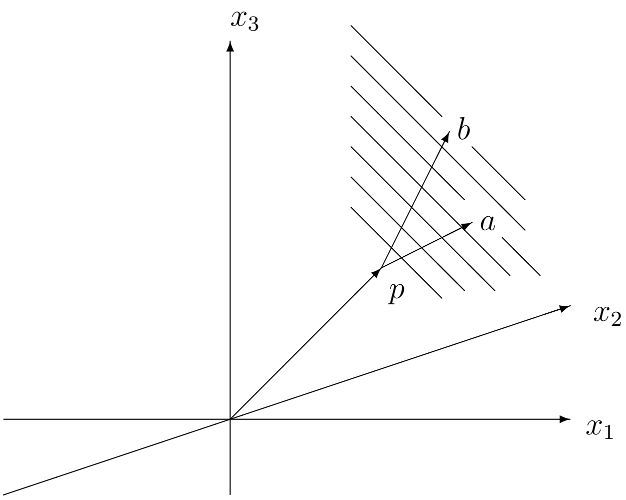


<u>**Definition 5.15 :**</u> Seien $p, a, b \in \mathbb{R}^n$, a und b seien linear unabhängig. Dann heißt

$$E_{p,a,b} = \{ \ p + \lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \}$$

die <u>**von den Vektoren a und b aufgespannte Ebene durch p.**</u>

Im $\mathbb{R}^3$ kann man sich $E_{p,a,b}$ vorstellen:



$E_{p,a,b}$ heißt die Parameterdarstellung der Ebene. Man kann sich überlegen, dass eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge einer Gleichung

$$< x, c > = \alpha \quad \text{mit einem} \quad c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad \text{ist.} \qquad \square$$

Uns geht es hier um den Begriff der linearen Unabhängigkeit, man kann die Definition 5.13 verallgemeinern:

Definition 5.16 : Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, $k, n \in \mathbb{N}$. Dann heißt das $k-$tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ **linear unabhängig** , wenn gilt:

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \,:\, (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \,=\, 0 \Longrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, k\} \,:\, \lambda_j \,=\, 0)\,.$$

(5.17) Beispiele : a) Im $\mathbb{R}^3$ sei

$$v_1 \,:=\, (1,0,-1)\,,\; v_2 \,:=\, (1,-1,2)\,,\; v_3 \,:=\, (2,1,1)\,,$$

dann ist (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig, denn aus

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \,=\, 0 \quad \text{folgt}$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrl} 1 \cdot \lambda_1 & +1 \cdot \lambda_2 & +2 \cdot \lambda_3 & = 0 \\ & -1 \cdot \lambda_2 & +1 \cdot \lambda_3 & = 0 \\ -1 \cdot \lambda_1 & +2 \cdot \lambda_2 & +1 \cdot \lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \quad ,$$

und wenn wir die 1. zur 3. Gleichung addieren:

$$(1') \qquad \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & 3\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Nun addieren wir das 3-fache der 2. zur 3. Gleichung :

$$(1'') \qquad \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \\ & & 6\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \quad ,$$

woraus nacheinander $\lambda_3 \,=\, 0\,,\, \lambda_2 \,=\, 0\,,\, \lambda_1 \,=\, 0$ folgt.
b) Im $\mathbb{R}^3$ sei

$$v_1 \,:=\, (2,-1,3)\,,\; v_2 \,:=\, (-1,1,2)\,,\; v_3 \,:=\, (4,-3,-1) \quad .$$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \,=\, 0$ ist gleichbedeutend mit

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & -3\lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 & +2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \quad .$$

Wir addieren das 2-fache der 2. zur 1. und das 3-fache der 2. zur dritten Gleichung, und vertauschen die ersten beiden Gleichungen:

$$(2') \qquad \left\{ \begin{array}{rrrl} -\lambda_1 & +\lambda_2 & -3\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ & 5\lambda_2 & -10\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

und wenn wir jetzt das $(-5)-$fache der 2.Gleichung zur 3. addieren, bekommen wir $0 = 0$ als 3.Gleichung. Für

$$(2'') \qquad \begin{cases} -\lambda_1 & +\lambda_2 & -3\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

gibt es aber eine Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$: Mit $\lambda_3 := 1$ wird $\lambda_2 = 2$, $\lambda_1 = -1$. Probe: Es ist

$$(-1)v_1 + 2v_2 + 1 \cdot v_3 = (0,0,0) \quad .$$

Also ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig. □

Wir sehen: Um lineare Unabhängigkeit nachzuprüfen, muss man lineare Gleichungen lösen. Wir wollen das etwas systematischer machen:

§6 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Definition 6.1 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$ (nicht notwendig $n = m$), und für $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ seien

$$a_{kj} \in \mathbb{R}\,,\ b_k \in \mathbb{R} \qquad \text{gegeben.} \qquad \text{Dann heißt}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11} & x_1 & + & \dots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & \dots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{cases}$$

ein **lineares Gleichungssystem** von m Gleichungen mit den (gesuchten) n **Unbekannten** $x_1, \dots, x_n$. □

Wir möchten das System (1) kürzer und ohne die Benutzung so vieler Indizes aufschreiben. Dazu müssen wir Matrizen einführen:

Definition 6.2 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Für $k \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ seien $a_{kj} \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt das rechteckige Zahlenschema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n-$**Matrix** mit reellen Elementen.

b) Wenn Sie den Ausdruck "rechteckiges Zahlenschema" zu unpräzis finden: Eine $m \times n-$Matrix ist eine Abbildung

$$A : \ \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$
$$(k, j) \longmapsto a_{kj} \quad .$$

c) Zur Schreibweise: Statt A schreibt man auch

$$A = (a_{kj}) \quad , \quad \text{genauer:} \quad A = (a_{kj})_{(k,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}} \quad .$$

d) Für die Menge aller $m \times n-$ Matrizen mit reellen Elementen schreiben wir

$$\underline{\mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R})} \quad .$$

e) Sei

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R}) \quad .$$

Dann nennen wir die Vektoren

$$a_k \quad := \quad (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, m\}$$

die **Zeilenvektoren** von A , und die

$$a^j \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{für } j \in \{1, \dots, n\}$$

(wobei das j kein Exponent,sondern ein hochgestellter Index ist,)
die **Spaltenvektoren** von A.
Etwas präziser, und um klar zu machen, dass man a_k waagrecht und a^j senkrecht schreibt: Es ist

$$a_k \in \mathcal{M}\mathrm{at}(1 \times n, \mathbb{R}) \quad , \quad a^j \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times 1, \mathbb{R}) \quad .$$

Bemerkung 6.3 : Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$,

$$A = (a_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(r \times s, \mathbb{R}) \quad .$$

Wann $A = B$ gilt, ist nach Definition 6.2 b) klar:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow$$

$$m = r \wedge n = s \wedge \forall (k, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} : \ a_{kj} = b_{kj} \quad .$$

Man kann Matrizen addieren und multiplizieren:

Definition 6.4 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und

$$A = (a_{kj}) \, , \, B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R}) \quad .$$

Dann setzt man

$$A + B \quad := \quad (a_{kj} + b_{kj}) \quad ,$$

d.h. man addiert ganz einfach "komponentenweise", wie bei Vektoren. □

Wichtiger, aber auch etwas komplizierter, ist die Matrizen-Multiplikation :

Definition 6.5 : Seien $m, n, r \in \mathbb{N}$,

$$A = (a_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R}) \quad , \quad B = (b_{jl}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times r, \mathbb{R}) \quad .$$

Für $k \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{1, \dots, r\}$ setzen wir

$$c_{kl} := a_{k1} b_{1l} + \dots + a_{kn} b_{nl} \quad ,$$

dann heißt

$$A \cdot B := (c_{kl}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times r, \mathbb{R})$$

das **Produkt der Matrizen** A und B.

(6.6) Bemerkungen : 1) Man kann also nicht beliebige Matrizen multiplizieren:

$$A \cdot B \text{ ist nur für } A \in \mathcal{M}\text{at}(m \times \underline{\underline{n}}, \mathbb{R}) \quad , \quad B \in \mathcal{M}\text{at}(\underline{\underline{n}} \times r, \mathbb{R})$$

definiert, d.h. wenn die Anzahl der Spalten der ersten gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist.

2) Wie man die Elemente c_{kl} der Matrix $A \cdot B$ bildet, merkt man sich am besten so : Man bildet das Skalarprodukt des $k-$ten Zeilenvektors von A mit dem $l-$ten Spaltenvektor von B.

3) Man muss das Multiplizieren von Matrizen an Beispielen üben. Dann sieht man schnell, dass

$$A \cdot B = B \cdot A$$

im Allgemeinen falsch ist, selbst dann, wenn A und B **quadratisch** , also aus $\mathcal{M}\text{at}(m \times m, \mathbb{R})$ sind. Für $m = 2$ sei etwa

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Es gibt aber so einige Rechenregeln für Matrizen :

(6.7) Rechenregeln : Seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$,

$$A\,,\, A' \in \mathcal{M}\text{at}(m \times n, \mathbb{R}) \quad , \quad B \in \mathcal{M}\text{at}(n \times r, \mathbb{R}) \quad ,$$

$$C \in \mathcal{M}\text{at}(s \times m, \mathbb{R}) \quad , \quad D \in \mathcal{M}\text{at}(r \times s, \mathbb{R}) \quad , \quad \text{dann gilt}$$

a) $(A + A') \cdot D = A \cdot D + A' \cdot D \quad , \quad C \cdot (A + A') = C \cdot A + C \cdot A' \quad ,$
wobei man hier genauer: “$(C \cdot A) + (C \cdot A')$” schreiben müsste (was man mit der Regel: “Punktrechnung geht vor Strichrechnung” vermeidet).

b) $C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B$

c) Sei $E_m \in \mathcal{M}\text{at}(m \times m, \mathbb{R})$ die Matrix mit 1 in der Diagonale und 0 sonst, präziser:

$$E_m := (\delta_{kj}) \quad \text{mit} \quad \delta_{kj} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} \quad ,$$

dann gilt

$$E_m \cdot A = A \quad , \quad A \cdot E_n = A \quad .$$

(6.8) Lineare Gleichungssysteme in Matrizen-Schreibweise :

Zu dem linearen Gleichungssystem (1) aus Definition 6.1,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & \ldots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad ,$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{kj} \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times 1, \mathbb{R}) \quad , \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times 1, \mathbb{R})$$

und nennen

$$A := (a_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R})$$

die **einfache Koeffizientenmatrix** von (1),

$$(A, b) \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times (n+1), \mathbb{R})$$

die **erweiterte Koeffizientenmatrix** von (1) . Das System (1) kann man mit der für Matrizen definierten Multiplikation dann als

$$(2) \qquad A \cdot x = b \quad .$$

schreiben. Das System (1) bzw. (2) heißt **homogen** , falls

$$b = 0 := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times 1, \mathbb{R})$$

ist, sonst **inhomogen**. Die Menge

$$\mathrm{Lös}(A, b) \quad := \quad \{ \ x \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times 1, \mathbb{R}) \ | \ A \cdot x = b \ \}$$

heißt die **Lösungsmenge** von (1) bzw.(2) . (2) heißt **lösbar** , wenn

$$\mathrm{Lös}(A, b) \quad \neq \quad \emptyset \quad \text{ist.}$$

Bemerkung 6.9 : 1) Ein homogenes System

$$A \cdot x = 0$$

ist stets lösbar : $x = 0 \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n, 1\times, \mathbb{R})$ ist eine Lösung. Man kann aber fragen, ob es weitere (so genannte "nichttriviale") Lösungen gibt.
2) Inhomogene lineare Gleichungssysteme

$$A \cdot x = b \quad \text{mit} \quad b \neq 0$$

sind nicht immer lösbar (auch wenn $m = n$ ist). Ein einfaches Beispiel ist

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ -x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array} \quad .$$

Besonders leicht ist es, $\mathrm{Lös}(A, b)$ anzugeben, wenn (A, b) "Zeilenstufenform" hat. In allen anderen Fällen formt man (A, b) so um, dass es Zeilenstufenform bekommt:

(6.10) Beispiele : a) Wir suchen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 2 \\ & & x_2 & = & 3 \quad . \end{array}$$

Die Lösung für x_2 steht schon da, wir setzen sie in die 1.Gleichung ein:

$$x_1 - 3 = 2 \quad , \qquad \text{also} \quad : \underline{x_1 = 5 \, , \, x_2 = 3} \quad .$$

b) Wir suchen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & +2 & x_3 & = & 4 \quad . \end{array}$$

Hier können wir $\underline{x_3 \in \mathbb{R}}$ beliebig wählen. Dann wird

$$\underline{x_2 = 4 - 2x_3} \quad , \quad x_1 + 4 - 2x_3 + x_3 = 2 \quad , \qquad \text{also} \quad :$$

$$\underline{x_1 = -2 + x_3} \quad .$$

Definition 6.11 : Sei $A = (a_{kj}) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{N}$. Man sagt, A hat **Zeilenstufenform** , wenn es $j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$$

gibt, so dass

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \_ & & & & & & & & & \\ & | & a_{1j_1} & \ldots & & & & & & \\ & |\_ & \_ & \_ & & & & & & \\ & & & & | & a_{2j_2} & \ldots & * & & \\ & & & & |\_ & \_ & \_ & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & & & | & a_{rj_r} & \ldots \\ & & & & & & & |\_ & \_ & \_ \\ & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

ist, mit

$$a_{1j_1} , \ldots , a_{rj_r} \neq 0 \quad ,$$

so dass unterhalb der "Stufenlinie" nur 0 steht und rechts von den a_{kj_k} irgendetwas. Dabei ist $0 \leq r \leq m$. Wir haben also r **Stufen** .

(6.12) Lösung des Systems (2) bei Zeilenstufenform von (A, b)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (2) aus (6.8), und die erweiterte Matrix $(A, b) \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times (n+1), \mathbb{R})$ habe Zeilenstufenform, also

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccccccccc|c}
_ & & & & & & & & & \\
& | & a_{1j_1} & \dots & & & & & & b_1 \\
& |_ & _ & _ & & & & & & \\
& & & & | & a_{2j_2} & \dots & * & & \vdots \\
& & & & |_ & _ & _ & & & \\
& & & & & & \ddots & & & \vdots \\
& & 0 & & & & & | & a_{rj_r} \ \dots & b_r \\
& & & & & & & |_ & _ \quad _ & _ \\
& & & & & & & & & b_{r+1} \\
& & & & & & & & & _ \\
& & & & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) Es ist $b_{r+1} \neq 0$. Die einfache Matrix hat r Stufen, die erweiterte Matrix (A,b) hat $r+1$ Stufen. Die $(r+1)-$te Gleichung lautet

$$0 = b_{r+1} \quad ,$$

was wegen $b_{r+1} \neq 0$ nicht geht. Das System (2) ist unlösbar,

$$\text{Lös}(A,b) = \emptyset \quad .$$

2.) Es ist $b_{r+1} = 0$. Dann haben A und (A,b) die gleiche Anzahl von Stufen, nämlich r Stufen. Die Unbekannten

$$x_j \quad \text{mit} \quad j \notin \{j_1, \dots, j_r\} \quad ,$$

d.h. die Unbekannten x_j mit einem Index j, zu dem es <u>keine</u> Stufe gibt, kann man frei wählen:

$$\underline{x_j \in \mathbb{R} \quad \text{beliebig für} \quad j \notin \{j_1, \dots, j_r\}} \quad .$$

Die Unbekannten

$$x_j \quad \text{mit} \quad j \in \{j_1, \dots, j_r\}$$

erhält man in Abhängigkeit von diesen Unbekannten, wenn man die Gleichungen

$$\begin{array}{lllll}
a_{rj_r} & x_{j_r} & + & \dots & = b_r \\
\vdots & & & & \quad \vdots \\
a_{1j_1} & x_{j_1} & + & \dots & = b_1
\end{array}$$

in dieser Reihenfolge nach $x_{j_r}, \dots, x_{j_1}$ auflöst. Jedenfalls ist $\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset$. Dabei kann es sein, dass man keine frei wählbaren Unbekannten hat, nämlich dann, wenn

$$j_1 = 1, \dots, j_r = r = n$$

ist, dann hat das System (2) genau eine Lösung. □

Wir sehen uns noch einmal an das

<u>**Beispiel 6.10 :**</u> a) Bei

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 & - & x_2 & = & 2 \\
& & x_2 & = & 3 \quad \text{hat}
\end{array}$$

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform. A und (A, b) haben 2 Stufen, und wir haben zwei Unbekannte. Das System ist eindeutig lösbar.
b) Bei

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array} \quad \text{ist}$$

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \quad ,$$

A und (A, b) haben 2 Stufen, das System ist lösbar. Wir haben aber $n = 3$ Unbekannte, $3 > 2$, das System ist nicht eindeutig lösbar.
c) Das System

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{array}$$

ist nicht lösbar. Hier hat A zwei Stufen, aber (A, b) drei Stufen ! □
Das Schöne ist nun, dass man ein beliebiges lineares Gleichungssystem der Form (2) aus (6.8) umformen kann in eines, bei dem die erweiterte Koeffizientenmatrix Zeilenstufenform hat, das aber dieselbe Lösungsmenge hat wie das ursprüngliche System :

Definition 6.13 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und sei

$$(A, b) \in \mathcal{M}\text{at}(m \times (n+1), \mathbb{R})$$

die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems. Die Umformungen
(III) Addition des $\lambda-$fachen der $l-$ten Zeile von (A, b) zur $k-$ten Zeile von (A, b), für $k \neq l$ und $\lambda \in \mathbb{R}$,
(IV) Vertauschung von zwei Zeilen von (A, b),
heißen **elementare Zeilenumformungen** der Matrix (A, b),
vom Typ (III) oder (IV) . □

Es ist klar, dass elementare Zeilenumformungen an der Lösungsmenge des Systems nichts ändern: Umformung
(IV) bedeutet, dass man zwei Gleichungen vertauscht,
(III) bedeutet, dass man das $\lambda-$fache der $l-$ten Gleichung zur $k-$ten Gleichung addiert − und das könnte man rückgängig machen, indem man das $(-\lambda)-$fache der $l-$ten Gleichung zur (neuen) $k-$ten Gleichung addiert.
− Es gilt daher der

Satz 6.14 : Ist die erweiterte Matrix (A', b') durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ (III) oder (IV) aus (A, b) hervorgegangen, so gilt

$$\text{Lös}(A', b') = \text{Lös}(A, b) \quad .$$ □

Uns fehlt nun nur noch der
Satz 6.15 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Jede Matrix

$$A \in \mathcal{M}\text{at}(m \times n, \mathbb{R})$$

kann man durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ (III) oder (IV) in Zeilenstufenform überführen.

Beweis : Wir machen hier keinen exakten Induktionsbeweis, sondern geben die Schritte an, die man praktisch macht und auch so programmieren kann: Ist $a_{kj} = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ so sind wir fertig: A hat Zeilenstufenform, mit 0 Stufen.
(∇) Seien nun nicht alle $a_{kj} = 0$. Die j_1-te Spalte sei diejenige mit dem kleinsten Index, in der nicht nur Nullen stehen, also

$$a^1 = \dots = a^{j_1 - 1} = 0 \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times 1, \mathbb{R}), \quad \text{und}$$
$$\exists\, k \in \{1, \dots, m\} : \; a_{kj_1} \neq 0 \quad .$$

Wenn nicht schon $a_{1j_1} \neq 0$ ist, vertauschen wir die 1. mit der $k-$ten Zeile (das ist eine Umformung vom Typ IV) und erhalten eine Matrix A' mit

$$a'_{1j_1} \neq 0 \quad .$$

In der Matrix A' addieren wir nun zur $k-$ten Zeile, $k = 2, \dots, m$, jeweils das $-\dfrac{a'_{kj_1}}{a'_{1j_1}}-$fache der 1.Zeile, das sind $m - 1$ Umformungen vom Typ (III), und erhalten so eine Matrix A'' mit

$$a''_{kj_1} \quad = \quad a'_{kj_1} - \frac{a'_{kj_1}}{a'_{1j_1}} \cdot a'_{1j_1} \quad = \quad 0 \quad \text{für} \quad k > 1 \quad .$$

A'' hat also die Form

$$A'' \quad = \quad \begin{pmatrix} \_ & & & & \\ & | & a''_{1j_1} & & * \\ & |\_ & \_ & & \\ & & 0 & | & \\ & & \vdots & | & B_1 \\ & & 0 & | & \end{pmatrix} ,$$

wobei $*$ irgendwelche Zahlen aus $\mathbb{R}$ bezeichnet und B_1 weniger Zeilen hat als A''. Besteht B_1 nur aus Nullen oder ist $j_1 = n$, so sind wir fertig. Anderenfalls fangen wir wieder bei (∇) an, mit B_1 statt A . Nach r solchen Schritten, $r \leq m$, erhlt man eine Matrix der Form

$$B \quad = \quad \begin{pmatrix} \_ & & & & & & & & & & \\ & | & b_{1j_1} & \dots & & & & & & & \\ & |\_ & \_ & \_ & & & & & & & \\ & & & & | & b_{2j_2} & \dots & & * & & \\ & & & & |\_ & \_ & \_ & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & & | & b_{rj_r} & \dots \\ & & & & & & & & |\_ & \_ & \_ \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} ,$$

also eine Matrix in Zeilenstufenform.

Bemerkung 6.16 : Das im Beweis von Satz 6.15 beschriebene Verfahren, eine Matrix A auf Zeilenstufenform zu bringen, heißt der **Gauß-Algorithmus**.

Man kann zeigen, dass es das Verfahren ist, lineare Gleichungssysteme mit geringstmöglichem Rechenaufwand zu lösen. Der Rechenaufwand ist proportional zu n^2, bei anderen Verfahren, etwa bei der CRAMERschen Regel, proportional zu n^3 (wenn man diese überhaupt anwenden kann). Sie sollten sich also von vornherein daran gewöhnen, nur den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

(6.17) Beispiele : a) Zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & +2 & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

schreiben wir die erweiterte Matrix auf:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & 2 & -5 & | & 1 \end{pmatrix}$$

und bringen Sie auf Zeilenstufenform:

$$(A,b) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -7 & | & 0 \\ 0 & 3 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & -7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} =: (A'',b'') .$$

A'' und (A'',b'') haben 2 Stufen, das System ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, da wir 3 Unbekannte haben. Mit

$\underline{x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}}$ folgt $\underline{x_2 = \frac{7}{3}x_3}$,

$x_1 = 1 + \frac{7}{3}x_3 - 2x_3$, $\underline{x_1 = 1 + \frac{1}{3}x_3}$.

b) Machen wir dasselbe mit

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \quad , \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \quad , \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \quad , \end{array}$$ so ergibt sich

$$(A,b) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -3 & | & 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} =: (A'',b'')$$

A'' hat 2 Stufen, (A'',b'') hat 3 Stufen: Das System ist nicht lösbar,

$$\text{Lös}(A,b) = \emptyset .$$

Bemerkung 6.18 : Wir können nun auch die in §5 gestellte Frage:
"Wie kann man möglichst leicht feststellen, ob für k Vektoren

$$v^1,\ldots,v^k \in \mathbb{R}^n \quad \text{gilt:} \quad (v^1,\ldots,v^k) \quad \text{ist linear unabhängig ?"}$$

beantworten: Die Gleichung

(3) $\lambda_1 v^1 + \ldots + \lambda_k v^k = 0$

aus Definition 5.16 ist ein lineares homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen und k Unbekannten, und es ist die Frage, ob es <u>nur</u> die triviale Lösung gibt(dann ist $(v^1,\ldots,v^k)$ linear unabhängig), also ob das System (3) eindeutig lösbar ist. Die einfache Koeffizientenmatrix von (3) ist die Matrix A mit $v^1,\ldots,v^k$ als Spalten, also

$A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times k, \mathbb{R})$.

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A, 0)$ betrachten wir hier nicht, denn die letzte Spalte, die aus Nullen besteht, ändert sich bei elementaren Zeilenumformungen nicht. Wir bringen also A auf Zeilenstufenform A' . A' hat höchstens k Stufen, denn A hat nur k Spalten:

a) Hat A' genau k Stufen, so ist (3) eindeutig lösbar,

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \,,$$

und $(v^1, \ldots, v_k)$ ist linear unabhängig.

b) Hat A' weniger als k Stufen, so gibt es für $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auch Lösungen $\neq 0$: $(v^1, \ldots, v^k)$ ist linear abhängig. □

Daraus, dass eine $n \times k$ −Matrix in Zeilenstufenform höchstens n Stufen hat, ergibt sich die

Folgerung 6.19 : Hat man k Vektoren $v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^n$ und ist $k > n$, so ist $(v^1, \ldots, v^k)$ linear abhängig .

(6.20) Beispiel : Wir wollen wissen, ob (v^1, v^2, v^3) mit

$$v^1 := (1, 2, -1, 3, -2) \,,\; v^2 := (2, 1, 0, 1, -1) \,,$$
$$v^3 := (1, 5, -3, 8, -5) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{linear unabhängig ist:}$$

Wir bilden die Matrix A mit den v^j als Spalten und bringen sie auf Zeilenstufenform:

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 8 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben nur 2 Stufen: (v^1, v^2, v^3) ist linear abhängig.

Bemerkung 6.21 : Sie werden es in der Linearen Algebra lernen: Man kann die Vektoren $v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^n$ auch als Zeilen einer Matrix $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(k \times n, \mathbb{R})$ hinschreiben, und auch da gilt: Bringt man B auf Zeilenstufenform B' , so ist $(v^1, \ldots, v^k)$ genau dann linear unabhängig, wenn B' genau k Stufen hat.

(6.20) Beispiel , nochmal: Wir bilden

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

und bringen auf Zeilenstufenform:

$$B \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wir haben 2 Stufen, (v^1, v^2, v^3) ist linear abhängig. □