# Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 1 W.S.2008/2009 - Ernst Bönecke

### Aufgaben zur Aussagenlogik

**1.)** Seien $A, B, C$ Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, dass folgende Aussagen stets wahr sind:

a) $\neg(\neg A) \iff A$

b) $A \wedge (A \implies B) \implies B$

c) $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$

d) $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$

e) $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$

f) $(A \implies B) \wedge (B \implies A) \iff (A \iff B)$

**2.)** Seien $A$ und $B$ Aussagen. Schreiben Sie eine Wahrheitstafel für die Verknüpfung "entweder $A$ oder $B$ " auf und geben Sie eine logisch gleichwertige Aussage an, in der $A$ und $B$ nur durch $\neg$, $\wedge$, $\vee$ verknüpft sind.

**3.)** Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe der Aussagenlogik und überprüfen Sie ihren Wahrheitswert:

a) 9 ist eine Quadratzahl und gerade, oder 9 ist keine Quadratzahl und ungerade.

b) Wenn 5 Teiler von 35 oder 7 Teiler von 29 ist, dann ist 8 Teiler von 24 und 24 kleiner als 8 .

**4.)** Sind die folgenden Aussagen über ganze Zahlen gleichbedeutend, oder gilt nur " $\implies$ "?

$$\begin{aligned}
x &= 7 \\
x+1 &= 8 \\
(x+1)^2 &= 64 \\
x^2+2x+1 &= 64 \\
2x^2+4x+2 &= 128 \\
\forall\, b \in \mathbb{Z} : \ (2b\,x^2 + 4b\,x + 2b &= 128\,b) \\
0 &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Bitte wenden !

## Aufgaben zur Mengenlehre

**5.)** Sei

$$M_1 := \{4, 8, 12\} \quad , \quad M_2 := \{3, 6, 9\} \quad ,$$
$$M_3 := \{0, 2, 4, 6\} \quad , \quad M_4 := \{6, 12, 18\} \quad .$$

Berechnen Sie $M := ((M_1 \cup M_2) \cap M_3) \setminus M_4$ .

**6.)** Seien $M$ , $N$ , $R$ Mengen. Zeigen Sie :

a) $M \subset N \ \wedge \ N \subset R \implies M \subset R$

b) $M \cap (M \cup N) = M \ \wedge \ M \cup (M \cap N) = M$

c) $M \subset N \implies (M \cap \complement_N M = \emptyset \ \wedge \ M \cup \complement_N M = N)$ .

**7.)** Für jedes $k$ aus einer nichtleeren Menge $K$ sei eine Menge $M_k$ gegeben. Dann setzt man

$$\bigcap_{k \in K} M_k \quad := \quad \{ x \mid \forall k \in K : \ x \in M_k \} \quad \text{und}$$

$$\bigcup_{k \in K} M_k \quad := \quad \{ x \mid \text{es gibt ein} \quad k \in K \quad \text{mit } x \in M_k \} \quad .$$

Sei $K = \mathbb{N}$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$M_k \quad := \quad \{-k, -(k-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k-1, k\} \quad ,$$

$$N_k \quad := \quad \left\{ \frac{r}{k} \;\middle|\; r \in \mathbb{Z} \wedge -k^2 \leq r \leq k^2 \right\} \quad .$$

Berechnen Sie

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad , \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \quad , \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k \quad , \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} N_k \quad .$$

**8.)** Seien $X$ und $Y$ Mengen und

$$f : X \longrightarrow Y$$

eine Funktion. Seien $A$ , $B \subset X$ und $C \subset Y$ . Zeigen Sie:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ,

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ,

c) $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ ,

d) $f(\overset{-1}{f}(C)) \subset C$ .

Die Aufgaben werden in den Übungen am 29.9.08 besprochen.

# Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 3 W.S.2008/2009 - Ernst Bönecke

## Logik und Quantoren

**9.)** Welche der folgenden Formeln sind formal korrekt? Dabei seien $M$, $N$ Mengen und $A(x)$, $B(x)$, $C(x,y)$ Aussagen, deren Wahrheitswert davon abhängt, welches $x$ aus $M$ und welches $y$ aus $N$ man einsetzt:

a) $y \in N \;\wedge\; \forall x \in M : \; A(x) \;\wedge\; B(x)$

b) $\forall x \in M \, \exists y \in N : \; (A(x) \;\wedge\; C(x,y)))$

c) $\forall x \in M \;\wedge\; M : \; (A(x) \;\vee\; B(x))$

d) $x \in M \;\wedge\; \exists (x,y) \in M \times N : \; C(x,y)$

**10.)** Sei $M$ die Menge aller verheirateten Menschen, dann definieren wir für $x, y \in M$:

$$\begin{aligned} S(x) &:= x \text{ kann schwimmen.} \\ N(x) &:= x \text{ ist Nichtschwimmer.} \\ V(x,y) &:= x \text{ ist mit } y \text{ verheiratet.} \end{aligned}$$

Geben Sie damit Aussagen an, die beweisen, dass in den Formeln (4) und (9) von (2.8) nicht " $\Longleftrightarrow$ " stehen darf. Ist die Aussage
$\forall z \in M \, \exists x, y \in M : \; (V(x,z) \;\wedge\; V(y,z))$ richtig ?

**11.)** Sind die folgenden Aussagen wahr ? Geben Sie einen Beweis für Ihre Behauptung an:

a) $\forall x \in \mathbb{N} \, \exists y \in \mathbb{N} : \; y < x$,

b) $\forall x \in \mathbb{Z} \, \exists y \in \mathbb{Z} : \; y < x - 2$,

c) $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : \; (x = y^2 \;\wedge\; x = z^3)$,

d) $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : \; x^2 + y^2 = z^2$,

e) $\exists x, y, z \in \mathbb{N} : \; x^3 + y^3 = z^3$,

f) $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists p \in \mathbb{N} : \; (p > n \;\wedge\; p \text{ ist prim} \;\wedge\; p + 2 \text{ ist prim})$ .

( e) und f) werden Sie vielleicht nicht heute schaffen. )

**12.)** Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe von Quantoren in möglichst einfacher Form, verneinen Sie die Aussagen und übersetzen Sie sie wieder in deutsche Sätze:

a) Jedes Haus hat einen Aufzug.

b) Jedes Haus hat eine Wohnung mit Balkon.

c) Jedes Haus hat eine Wohnung ohne Balkon.

d) Es gibt ein Haus mit einer Wohnung mit Balkon.

e) Es gibt ein Haus, in dem alle Wohnungen einen Balkon haben.

Bitte wenden!

## Gleichungen und Ungleichungen

**13.)** Finden Sie die reellen Lösungen $x$ der folgenden Gleichungen:

a) $$|x-3| = 2x \quad ,$$

b) $$\frac{2x+7}{4x-2} = \frac{x-10}{4x-5} \quad ,$$

c) $$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+5} - \sqrt{3x} = 0 \quad .$$

**14.)** Finden Sie die reellen Lösungen $x$ von $f(x) = 0$ für

a) $f(x) := 3x^2 - 3x - 6$ ,
b) $f(x) := x^2 - 4x + 4$ ,
c) $f(x) := x^2 + 144$ ,

und zeichnen Sie die Mengen $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \}$ .

**15.)** Haben die folgenden Ungleichungssysteme eine Lösung ? Zeichnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge:

a) $y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y \leq -|x-3| + 2$ ,
b) $y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y < -|x-3|$ ,
c) $x \geq y^2 - 2 \quad \wedge \quad x \leq 2 - y^2$ .

**16.)** Im Analysis-Teil haben Sie den binomischen Lehrsatz

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, a, b \in \mathbb{R} \,:\; (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

kennengelernt. Zeigen Sie damit (ohne Induktion)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\; (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

und damit (direkt, ohne Induktion)

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \,:\, (x \geq 0 \implies (1+x)^n \geq 1 + nx)$ ,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \,:\, \left( x \geq 0 \;\wedge\; n \geq 2 \implies (1+x)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x^2 \right)$

und mit b), direkt, dass für alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 2 gilt :

c) $\sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ .

Die Aufgaben werden in den Übungen am 1.10.08 besprochen.

# Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 5 a W.S.2008/2009 - Ernst Bönecke

## Geraden und Ebenen

**17.)** Im $\mathbb{R}^2$ seien $p := (1,2)$ und $q := (-3,5)$.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden $G$ durch $p$ und $q$ an.

b) Geben Sie eine Gleichungsdarstellung dieser Geraden an, d.h. finden Sie $c \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; < c, x > = \alpha \right\}$$

ist. (Tipp: Satz 5.11.)

**18.)** Sei $H_{c,\alpha} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid < c, x > = \alpha \}$ mit $c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichungsdarstellung einer Geraden. Berechnen Sie, wenn sie existieren, die Schnittpunkte dieser Geraden mit der $x_1-$ und der $x_2-$Achse und zeichnen Sie die Gerade.

**19.)** Für $c := (1,-1,2) \in \mathbb{R}^3$ und $\delta := -1$ sei

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < c, x > = \delta \right\} \quad .$$

Finden Sie Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $a \perp b$, $a \perp c$ und $b \perp c$, ein Element $p \in E$ und zeigen Sie damit

$$E = E_{p,a,b} \quad .$$

Geht das auch allgemein für beliebiges $c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\delta \in \mathbb{R}$ ?
Hinweis: Sei $x \in \mathbb{R}^3$ , dann ist $(x, a, b, c)$ nach Folgerung 6.18 linear abhängig. Zeigen Sie damit, dass $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren mit $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$.

**20.)** Sei $E_{p,ab}$ mit $p, a, b \in \mathbb{R}^3$ und linear unabhängigem Paar $(a,b)$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ .

a) Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{R}^3$ mit $c \perp a$ und $c \perp b$, so dass

$$E_{p,a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < c, x > = < c, p > \right\} \quad \text{ist.}$$

b) Berechnen Sie $c$ und $< p, c >$ für
$p := (1,-1,2)$ , $a := (3,-4,7)$ und $b := (1,1,3)$ .

c) Wie kann man allgemein $c$ aus $a$ und $b$ berechnen ?

Die Aufgaben werden in den Übungen am 6.10.08 besprochen.

# Übungen zum Vorkurs Mathematik

Blatt 6 W.S.2008/2009 - Ernst Bönecke

## Matrizenrechnung

**21.)** Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

**22.)** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times m, \mathbb{R})$. Dann definiert man die $k-$te Potenz $A^k$ von $A$ rekursiv durch

$$A^0 := E_m \quad , \quad A^{k+1} := A^k \cdot A \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Berechnen Sie $A^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $A :=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen durch Induktion.

**23.)** In $\mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$ setzt man

$$0_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Zeigen Sie : $\forall\, A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R}) \; : \; 0_2 \cdot A \;=\; A \cdot 0_2 \;=\; 0_2 \quad .$

b) Gilt die Aussage :

$\forall\, A, B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R}) \; : \; (A \neq 0_2 \,\wedge\, B \neq 0_2 \;\Longrightarrow\; A \cdot B \neq 0_2)$ ?

**24.)** Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$. Unter welcher Voraussetzung existiert ein $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit

$$A \cdot B \;=\; B \cdot A \;=\; E_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

a) Zeigen Sie mit Rechenregel (6.7) b) : Wenn so ein $B$ existiert, ist es eindeutig bestimmt. Man schreibt daher

$$A^{-1} \quad := \quad B \quad .$$

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $A^{-1}$ an, falls es existiert.

c) Zeigen Sie: Seien $A, C \in \mathcal{M}\mathrm{at}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und es existiere $A^{-1}$ und $C^{-1}$ . Dann existiert auch $(A \cdot C)^{-1}$ .

Bitte wenden !

## Lineare Gleichungssysteme

**25.)** Im $\mathbb{R}^3$ seien die Ebenen

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \right\} ,$$

$$F := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \right\}$$

gegeben. Geben Sie, falls existent, die Schnittgerade $G := E \cap F$ in Parameterform an.

**26.)** Geben Sie eine auf der Ebene $E := E_{(0,1,1),(1,-1,2),(0,2,1)}$ senkrechte Gerade $G$ durch $(2,-2,0)$ in Parameterform an, bestimmen Sie den Schnittpunkt $s$ von $G$ und $E$ und den Abstand $\|s-(2,-2,0)\|$ .

**27.)** Bestimmen Sie, abhängig von $\beta \in \mathbb{R}$, alle Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ von

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & (1-\beta)x_2 & + & (\beta-3)x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} ,$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & \beta \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2\beta \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array} .$$

**28.)** Prüfen Sie, ob $(a, b, c)$ linear unabhängig ist, für folgene Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^4$ :

a) $a := (1,2,3,4)$, $b := (5,6,7,8)$, $c := (9,10,11,12)$ ,

b) $a := (1,1,2,2)$, $b := (2,1,2,1)$, $c := (3,4,5,-1)$ .

Die Aufgaben werden in den Übungen am 6.10.08 besprochen.

**Aufgaben, die nicht mehr besprochen werden**
(und über die Sie bis zum Beginn der Vorlesungen nachdenken können):

**29.)** Seien $s, m, n, r \in \mathbb{N}$, $C \in \mathcal{M}\mathrm{at}(s \times m, \mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}\mathrm{at}(m \times n, \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times r, \mathbb{R})$. Beweisen Sie die Rechenregel (6.7) b) ("Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation"):

$$C \cdot (A \cdot B) \quad = \quad (C \cdot A) \cdot B$$

Hinweis: $A \cdot B$ ist die Matrix $(d_{kl})$ mit

$$d_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \quad \text{für} \quad k \in \{1, \ldots, m\}, \, l \in \{1, \ldots, r\} \quad ,$$

es kommt auf einen geschickten Umgang mit dem Summenzeichen an.

**30.)** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}\mathrm{at}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Berechnen Sie $B := A^{-1}$ mit dem Gauß-Algorithmus. Fassen Sie dazu die Spalten $b^j$ der Matrix $B$ als unbekannten Vektor im Gleichungssystem $A \cdot b^j = e^j$ auf, wobei $e^j$ der $j$–te Spaltenvektor von $E_3$ ist, für $j \in \{1, 2, 3\}$. Das sind drei Gleichungssysteme mit je 3 Unbekannten und der gleichen einfachen Koeffizientenmatrix, die Sie (am besten gleichzeitig) lösen können, indem Sie die Matrix $A$ durch elementare Zeilenumformungen nicht nur auf Zeilenstufenform, sondern sogar auf die Form $E_3$ bringen, und natürlich die gleichen Umformungen an den "rechten Seiten" $e^j$ vornehmen.

**31.)** Sei $n \in \mathbb{N}$, $A, C \in \mathcal{M}\mathrm{at}(n \times n, \mathbb{R})$, und wir setzen voraus, dass $A^{-1}$, $C^{-1}$ existieren mit

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \quad , \quad C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E_n \quad .$$

a) Zeigen Sie (allgemeiner als in Aufgabe 24), dass auch $(A \cdot C)^{-1}$ und $(C \cdot A)^{-1}$ existieren.
b) Existiert auch $(A + C)^{-1}$ ?