§ 68 Hilberträume - Grundbegriffe

In §21 haben wir uns ausführlich mit $\mathbb{R}-$ und $\mathbb{C}-$Vektorräumen mit Skalarprodukt beschäftigt, dort allerdings hauptsächlich mit endlichdimensionalen Vektorräumen. Im Folgenden interessieren wir uns nur für unendlichdimensionale $\mathbb{C}-$Vektorräume mit Skalarprodukt.

Empfehlenswerte Literatur :

(T) H.Triebel : Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972. (Sehr ausführliche Beweise, viele Beispiele, etwas langatmig).

(H) H.Heuser : Funktionalanalysis. B.G.Teubner, Stuttgart 1986. (Oft unnötig ausführlich, da wir nur das 16.Kapitel aus diesem Buch mit 19 Kapiteln und 696 Seiten brauchen.)

(W) J.Weidmann : Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I Grundlagen. B.G.Teubner, Stuttgart 2000 (enthält Alles, was wir hier machen, und noch Vieles mehr, mit gut ausgeführten Beweisen).

F.Hirzebruch / W.Scharlau : Einführung in die Funktionalanalysis. B.I. Taschenbuch 296, Mannheim 1971 (kurz, übersichtlich, Beweise und Beispiele knapp.)

S.Grossmann : Funktionalanalysis I und II im Hinblick auf Anwendungen in der Physik, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1970.

M.Reed / B.Simon : Methods of Modern Mathematical Physics. 1 : Functional Analysis. Academic Press, New York 1972.

R.Meise / D.Vogt : Einführung in die Funktionalanalysis. vieweg studium 62, Braunschweig 1992.

Außerdem finden sich manche Sätze in

J.Dieudonné : Foundations of Modern Analysis I. Academic Press, New York 1960.

(K) Konrad Königsberger : Analysis 1, 6.Auflage. Springer-Lehrbuch, Berlin, Heidelberg 2004.

(L) Konrad Königsberger : Analysis 2, 5.Auflage. Springer-Lehrbuch, Berlin, Heidelberg 2003.

(G) Otto Forster : Analysis 3. vieweg studium 52, Braunschweig 1984.

Wir zitieren die Sätze aus diesen Büchern wie bisher mit Seitenangabe:
(L 243) bedeutet: Königsberger, Analysis 2, Seite 243.

Vor der Definition des Hilbertraums lernen wir zwei Begriffe aus der Topologie kennen :

Definition 68.1 : Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge D von X heißt **dicht** in X, falls ihr Abschluss $\overline{D}$ gleich X ist.

Definition 68.2 : Ein metrischer Raum X heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

Beispiele : 1.) $\mathbb{R}$ mit $d(x,y) := |x-y|$ ist separabel, denn $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Teilmenge mit $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2.) $\mathbb{C}$ mit der Betragsmetrik ist auch separabel, denn

$$\mathbb{Q}[i] \quad := \quad \{\ a + bi \ \big|\ a, b \in \mathbb{Q}\ \}$$

ist abzählbar, und $\overline{\mathbb{Q}[i]} = \mathbb{C}$.

Bemerkung 68.3 : Sei V ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt

$$< \ , \ >: \ V \times V \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad ,$$

so ist $< \ , \ >$ nach Definition 21.1.7 eine positiv definite hermitesche Form, und V wird mit der durch

$$\|v\| \quad := \quad \sqrt{< v, v >}$$

definierten Norm nach Folgerung 21.2.6 ein normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum, also mit

$$d(v, w) \quad := \quad \|v - w\|$$

ein metrischer Raum. Nach Definition 32.7 heißt V ein **vollständiger** normierter Raum, kurz: **Banachraum** , wenn in V jede CAUCHYfolge konvergiert. - Damit versteht man die

Definition 68.4 : Ein **Hilbertraum** ist ein unendlichdimensionaler $\mathbb{C}-$ Vektorraum H , mit einem Skalarprodukt $< \ , \ >$, der bezüglich der durch

$$d(v, w) \quad := \quad \|v - w\| \quad , \quad \|v\| \quad := \quad \sqrt{< v, v >} \quad \text{für} \quad v, w \in H$$

definierten Metrik vollständig und separabel ist.

Achtung : Dass ein Hilbertraum (i) unendlichdimensional und (ii) separabel ist, wird in vielen Büchern (z.B. KÖNIGSBERGER 2) nicht vorausgesetzt; für uns ist es aber praktisch.

- Die wesentlichen Beispiele für Hilberträume sind die Räume ℓ_2 und L^2:

Definition und Satz 68.5 : Sei

$$\ell_2 \quad := \quad \{\ \xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \ \Big|\ \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 \text{ konvergiert } \}$$

die Menge aller Folgen $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ komplexer Zahlen, für die $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2$ konvergiert. Dann ist ℓ_2 ein Untervektorraum des $\mathbb{C}-$Vektorraums $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$, und mit

$$< \xi, \eta > \quad := \quad \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\xi_k} \eta_k \quad \text{für} \quad \xi = (\xi_k)\,,\ \eta = (\eta_k) \in \ell_2$$

ein Hilbertraum.

Beweis : 1) Für $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{C}$ gilt

$$(|\xi_k| - |\eta_k|)^2 \geq 0 \quad , \qquad \text{also} \quad 2|\xi_k| \cdot |\eta_k| \leq |\xi_k|^2 + |\eta_k|^2 \quad ,$$

also auch

$$\operatorname{Re}(\overline{\xi_k} \eta_k)\,,\ \operatorname{Im}(\overline{\xi_k} \eta_k) \quad \leq \quad \frac{1}{2}(|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2).$$

Seien also $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}\,,\ \eta = (\eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \ell_2$, dann gilt

$$|\xi_k + \eta_k|^2 = \overline{(\xi_k + \eta_k)} \cdot (\xi_k + \eta_k) = |\xi_k|^2 + |\eta_k|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{\xi_k} \eta_k) \quad ,$$

und nach dem Majorantenkriterium konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^2 \quad , \qquad \text{also} \quad \xi + \eta \in \ell_2 \quad , \quad \text{und auch}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{\xi_k}\eta_k \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(\xi_k\eta_k) + i \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}(\overline{\xi_k}\eta_k) \quad ,$$

also ist $< \xi, \eta > \in \mathbb{C}$ definiert. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha\xi_k|^2 \quad = \quad |\alpha|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 \quad ,$$

also ist ℓ_2 ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C})$. $< \ , \ >$ ist ein Skalarprodukt auf ℓ_2 : Linearität im 2.Argument und

$$< \xi, \eta > \quad = \quad \overline{< \eta, \xi >}$$

sieht man sofort, und es gilt

$$< \xi, \xi > = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \xi_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi = 0 ,$$

also ist $< \ , \ >$ positiv definit. ℓ_2 ist unendlichdimensional, denn die Familie

$$(\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \varepsilon^n := (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}_0}$$

ist linear unabhängig in ℓ_2.
2) Sei $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine CAUCHYfolge in ℓ_2 , $\xi^n = (\xi^n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m > n_0$ gilt

$$(*) \qquad \|\xi^n - \xi^m\| < \varepsilon \quad , \quad \text{wobei}$$

$$\|\xi^n - \xi^m\|^2 = < \xi^n - \xi^m, \xi^n - \xi^m > \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\xi^n_k - \xi^m_k|^2$$

ist, also gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$|\xi^n_k - \xi^m_k| \quad < \quad \sqrt{\varepsilon} \quad \text{für} \quad n, m > n_0 \quad ,$$

also ist $(\xi^n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes feste k eine CAUCHYfolge in $\mathbb{C}$ und daher konvergent; es existiert

$$(**) \qquad \xi_k \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \xi^n_k \quad .$$

Wir benutzen die MINKOWSKIsche Ungleichung :
Für $N \in \mathbb{N}$ und $(x_1, \ldots, x_N)$, $(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{C}^N$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \le \quad \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

damit folgt für festes $N \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} |\xi_k - \xi^n_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \le \quad \left(\sum_{k=0}^{N} |\xi_k - \xi^m_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=0}^{N} |\xi^m_k - \xi^n_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Wählen wir nun $n, m > n_0$, so wird der zweite Summand rechts kleiner als ε nach $(*)$. Bei festem N kann man wegen $(**)$ erreichen, dass der erste Summand kleiner als ε wird, für hinreichend großes m, etwa $m > n_1(N)$. Also gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{N} |\xi_k - \xi_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < 2\varepsilon\,, \quad \text{für} \quad n > n_0 \quad \text{und alle} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

und für $m > n_1(N)$, aber die linke Seite hängt gar nicht von m ab. Man kann N beliebig groß wählen und erhält

$$\left(\sum_{k=0}^{N} |\xi_k - \xi_k^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \leq \quad 2\varepsilon \quad ,$$

$$\|\xi - \xi^n\| \leq 2\varepsilon \quad , \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty} \xi^n = \xi \quad .$$

Also konvergiert jede CAUCHYfolge in ℓ_2 : ℓ_2 ist vollständig. 3) Jedes solche $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2$ ist Grenzwert einer Folge $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\eta^n = (r_k^n + is_k^n)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit} \quad r_k^n, s_k^n \in \mathbb{Q}$$

und jedes solche η_n ist Grenzwert von

$$((r_0 + is_0, \ldots, r_N + is_N, 0, 0, \ldots))_{N\in\mathbb{N}} \quad .$$

Man sieht, dass die Menge der Folgen

$$(r_0 + is_0, \ldots, r_N + is_N, 0, 0, \ldots) \quad \text{mit} \quad r_j, s_j \in \mathbb{Q}, N \in \mathbb{N}$$

abzählbar ist. Also besitzt ℓ_2 eine abzählbare dichte Teilmenge, ist also separabel. □

Als Modell für die Quantentheorie hat sich ℓ_2 nicht durchgesetzt (obwohl das auch möglich wäre), sondern die "Funktionenräume" $L_2(U)$, U offen im $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner: $U\,\sigma-$kompakt). Das steht schön ausführlich in KÖNIGSBERGER 2 , §10.3 :

(68.6) - (68.8) , (68.11) - (68.20) : (L 334 oben - L 337 Mitte),
(68.9) - (68.10) : (L 280 unten - L 281 oben)

Definition 68.21 : Seien $f, g \in \mathcal{L}^2(U)$, dann setzen wir

$$< f, g > \quad := \quad \int_U \overline{f(x)} g(x)\, \mathrm{d}x \quad .$$

Bemerkungen : 1) Nach Folgerung 68.15 existiert das Integral.
2) $<\ ,\ >$ ist kein Skalarprodukt, nur eine positiv **semi**definite hermitesche Form. Um ein Skalarprodukt zu erhalten, nehmen wir einen Quotienten-Vektorraum :

Definition 68.22 : Die Menge $\mathcal{N} := \{ f \in \mathcal{L}^2(U) \mid \|f\|_2 = 0 \}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^2(U)$ und besteht aus allen Funktionen

$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = 0$ fast überall. Wir setzen

$$L_2(U) \quad := \quad \mathcal{L}^2(U) \,/\, \mathcal{N} \quad .$$

Folgerung 68.23 : Durch

$$\|f + \mathcal{N}\| \quad := \quad \|f\|_2 \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^2(U)$$

wird eindeutig eine Abbildung

$$\| \quad \| : \; L_2(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert, und $L_2(U)$ mit $\| \quad \|$ ist sogar ein Banachraum.
Der **Beweis** ist leicht. □

Definition und Satz 68.24 : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$. Setzt man für $f, g \in \mathcal{L}^2(U)$:

$$< f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} > \quad := \quad < f, g > \quad ,$$

so ist $< \quad , \quad >$ ein Skalarprodukt auf $L^2(U)$, mit

$$\|f + \mathcal{N}\| \quad = \quad < f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N} >^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

und $L^2(U)$ mit diesem Skalarprodukt ist ein Hilbertraum.
Beweis : 1) Dass $< \quad , \quad >$ eindeutig definiert und ein Skalarprodukt ist, kann man leicht nachrechnen.
2) $L^2(U)$ ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt, und mit der durch

$$\|f + \mathcal{N}\| \quad = \quad < f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N} >^{\frac{1}{2}}$$

gegebenen Norm ist $L^2(U)$ vollständig nach Folgerung 68.23. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $L^2(U)$ separabel und unendlichdimensional ist:
a) Dass es eine abzählbare, dichte Teilmenge von $L^2(U)$ gibt, steht als Lemma in (L 338) : Die Menge $T_{\mathbb{Q}}(U)$ der "rationalen Treppenfunktionen" mit Träger in U liegt dicht in $\mathcal{L}^2(U)$. Dabei heißt eine Treppenfunktion

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \, 1_{Q_k}$$

rational, wenn die $c_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ sind und die Quader Q_k Eckpunkte aus $\mathbb{Q}^n$ haben. $T_{\mathbb{Q}}(U)$ ist abzählbar.
b) Wegen $U \neq \emptyset$ gibt es unendlich viele linear unabhängige Treppenfunktionen

$$g \; = \; \sum_{j=1}^{N} \alpha_j 1_{U_j}$$

mit offenen beschränkten Teilmengen U_j von U , also ist $\mathcal{L}^2(U)$ unendlichdimensional. □

Nach diesen Beispielen wissen wir ungefähr, womit man es bei Hilberträumen zu tun hat - im Grunde schon sehr genau, denn es wird sich zeigen, dass alle Hilberträume isomorph sind. Das Folgende steht bei KÖNIGSBERGER nur für $\mathcal{L}^2(U)$, aber man kann es in einem beliebigen Hilbertraum machen: Aus der Linearen Algebra kann man den Begriff der "Orthonormalbasis" übertragen:

Hilfssatz 68.25 : Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H . Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in H$ nennen wir

$$\alpha_k \quad := \quad < u_k, x >$$

den **$k-$ten Fourierkoeffizienten** von x bezüglich $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad .$$

$\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine CAUCHYfolge in H . Sie konvergiert genau dann gegen das Element x , wenn die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad = \quad \|x\|^2 \quad \text{gilt.}$$

Beweis : Aus den Rechenregeln für das Skalarprodukt folgt

$$(*) \quad 0 \leq \|x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{j,k=0}^{\infty} \overline{\alpha_k}\alpha_j < u_k, u_j >$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k} < u_k, x > - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \overline{< u_k, x >} =$$

$$= \quad \|x\|^2 - 2\sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k}\alpha_k + \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k}\alpha_k \quad = \quad \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2 \quad .$$

Das ist die BESSELsche Ungleichung. Man sieht daraus, dass $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_k|^2\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt ist, also konvergent: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_1(\varepsilon)$, so dass für $n > m > n_0(\varepsilon)$ gilt

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k u_k \right\|^2 \quad = \quad \sum_{j,k=m+1}^{n} \overline{\alpha_k}\alpha_j < u_k, u_j > \quad = \quad \sum_{j=m+1}^{n} |\alpha_k|^2 < \varepsilon \quad ,$$

also ist $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine CAUCHYfolge, besitzt also in H einen Grenzwert, der nach $(*)$ genau dann gleich x ist, wenn

$$\|x\|^2 \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \quad \text{ist.} \qquad \square$$

Definition 68.26 : Ein Orthonormalsystem $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in einem Hilbertraum H heißt ein **vollständiges Orthonormalsystem (VONS)**, wenn für jedes $x \in H$ die Parsevalsche Gleichung gilt.
Bemerkung : Ist $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ ein VONS in H, so gilt für alle $x \in H$:

$$\exists\,(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}) \; : \; x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k \quad .$$

In manchen Büchern, z.B. (L) und (H), wird ein VONS daher auch "Orthonormalbasis" oder "Hilbertraumbasis" genannt. Das widerspricht aber unserer Definition 19.2.9 der Basis eines nicht endlich erzeugten Vektorraums, denn dort wird gefordert, dass $x \in H$ eine Linearkombination

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k \quad \text{mit nur endlich vielen} \quad \alpha_k \neq 0$$

ist. Ähnlich wie bei Basen von Vektorräumen gilt aber
Hilfssatz 68.27 : Ein Orthonormalsystem $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in H ist genau dann ein VONS, wenn für alle $x \in H$ gilt

$$\forall\, j \in \mathbb{N}_0 \; : \; < u_j, x > = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad .$$

Beweis : 1) Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ vollständig. Sei $x \in H$ mit

$$\forall\, j \in \mathbb{N}_0 \; : \; < u_j, x > = 0 \quad ,$$

dann folgt aus der Parsevalschen Gleichung

$$\|x\|^2 = 0 \quad , \qquad \text{also} \quad \|x\| = 0 \quad , \quad x = 0 \quad .$$

2) Es gelte für alle $x \in H$:

$$(*) \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}_0 \; : \; < u_j, x > = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad .$$

Angenommen, $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ ist nicht vollständig, dann gibt es ein $x \in H$, für das die Parsevalsche Gleichung nicht gilt, also

$$\|x\|^2 > \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 \quad \text{für} \quad \alpha_j = < u_j, x > \quad .$$

Nun wissen wir aus dem Beweis von Hilfssatz 68.25, dass

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j u_j \right)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

eine Cauchyfolge ist, also einen Grenzwert

$$y \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j u_j$$

besitzt. Nun ist für $j \in \mathbb{N}_0$:

$$< u_j, x > = \alpha_j \; = < u_j, y > \quad , \qquad \text{also}$$

$$< u_j, x - y > = 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

und damit nach $(*)$: $x - y = 0$, also $x = y$. Das widerspricht aber

$$\|x\|^2 \; > \; \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2 \; = \; \|y\|^2 \quad .$$

□

Hilfssatz 68.28 : Sei H ein Hilbertraum, dann ist für jedes $y \in H$ die lineare Abbildung

$$f_y \; : \; H \; \longrightarrow \; \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) := < y, x > \quad \text{stetig.}$$

Beweis : $<\;\;,\;\;>$ ist linear im 2.Argument, und es gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|f_y(x)| \; = \; | < y, x > | \; \leq \; \|y\| \, \|x\| \quad ,$$

also ist f_y stetig nach Satz 32.19 (F 22). □

Satz 68.29 : In jedem Hilbertraum gibt es ein VONS $(u_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$.
Beweis : H ist separabel, es gibt also eine abzählbare dichte Teilmenge $\{ \; x_j \; \big| \; j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} \; \}$. Dabei kann man annehmen, dass $x_{-1} = 0$ und $x_j \neq 0$ für $j \in \mathbb{N}_0$ ist. Wir setzen

$$v_0 \quad := \quad \frac{x_0}{\|x_0\|} \quad \text{und definieren} \quad v_j \quad \text{für} \quad j > 0 \quad \text{rekursiv :}$$

$v_0, \ldots, v_{j-1}$ seien definiert, mit

$$< v_l, v_k > = \delta_{lk} \quad \text{für die} \quad l, k \in \{0, \ldots, j-1\} \quad \text{mit} \quad v_l, v_k \neq 0 \, .$$

Dann setzen wir

$$v_j' \quad := \quad x_j - \sum_{k=0}^{j-1} < v_k, x_j > v_k \quad .$$

Ist $v_j' = 0$, so setzen wir $v_j := v_j' = 0$, sonst

$$v_j \quad := \quad \frac{v_j'}{\|v_j'\|} \quad .$$

Dann gilt für $l < j$:

$$< v_l, v_j > \quad = \quad 0 \quad \text{für} \quad v_j = 0 \quad \text{sowieso, und sonst}$$

$$< v_l, v_j > \;=\; \left(< v_l, x_j > - \sum_{k=0}^{j-1} < v_k, x_j >< v_l, v_k > \right) \frac{1}{\|v_j'\|}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } v_l \;=\; 0 \\ (< v_l, x_j > - < v_l, x_j >)\dfrac{1}{\|v_j'\|} \;=\; 0 & \text{für } v_l \neq 0\,. \end{cases}$$

Nimmt man aus der Folge $(v_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ noch die Nullen heraus, so erhält man eine Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, die ein Orthonormalsystem ist. Die x_j sind (endliche) Linearkombinationen der u_k , und da

$$\{\ x_j \ \big|\ j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}\ \}$$

dicht in H ist, ist erst recht die Menge aller Linearkombinationen von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ dicht in H . Sei also $y \in H$ mit

$$< u_j, y >=\ 0 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

dann können wir eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} y_k \;=\; y$ und

$$y_k \;=\; \sum_{l=1}^{N(k)} \lambda_l^{(k)}\, u_l$$

finden. Dafür gilt dann $< y, y_k >=\ 0$ für alle k . Die Funktion

$$f_y\ :\ H \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \quad , \quad x \longmapsto < y, x >$$

ist stetig nach Hilfssatz 68.28, also folgt aus $\lim\limits_{k\to\infty} y_k \;=\; y$:

$$< y, y > \;=\; < y, \lim_{k\to\infty} y_k > \;=\; \lim_{k\to\infty} < y, y_k > \;=\; 0 \quad ,$$

also $\|y\| \;=\; 0$ und damit $y \;=\; 0$. Nach Hilfssatz 68.27 ist $(u_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ vollständig.□

Wir wollen Hilberträume “in orthogonale Untervektorräume zerlegen”. Dazu die

<u>Definition 68.30 :</u> Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$. M heißt **<u>konvex</u>**, wenn für $x_1, x_2 \in M$ auch

$$\{\ tx_2 + (1-t)x_1 \ \big|\ t \in [0,1]\ \} \quad \subset \quad M \quad \text{ist.}$$

<u>Hilfssatz 68.31 :</u> Sei M eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraums H und $x \in H$. Dann gibt es genau ein $y \in H$ mit

$$\|x - y\| \;=\; \min\{\ \|x - z\| \ \big|\ z \in M\ \} \quad ,$$

also genau ein Element aus M mit minimalem Abstand zu x .

<u>Beweis :</u> Sei $\beta := \inf\{\ \|x - z\| \ \big|\ z \in M\ \}$, dann nennen wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| \;=\; \beta \quad \text{und} \quad z_n \in M$$

eine "Minimalfolge". Sicher gibt es so eine Minimalfolge. In der Parallelogrammgleichung

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \;=\; 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \text{für} \quad u,v \in H$$

setzen wir $u := x - z_m$ und $v := x - z_n$. Wegen

$$u+v \;=\; (x-z_m)+(x-z_n) \;=\; 2\left(x - \frac{z_n+z_m}{2}\right) \quad , \quad u-v \;=\; z_n - z_m \quad ,$$

und da $\dfrac{z_n+z_m}{2}$ wegen der Konvexität von M in M liegt, ist

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 \quad &= \quad 2\|x-z_m\|^2 + 2\|x-z_n\|^2 - 4\left\|x - \frac{z_n+z_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq \quad 2\|x-z_m\|^2 + 2\|x-z_n\|^2 - 4\beta^2 \quad , \end{aligned}$$

und das geht gegen 0 für $n,m \to \infty$, also ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine CAUCHYfolge in H , hat also einen Grenzwert $y \in H$, und da M abgeschlossen ist, ist nach Satz 32.4 (F 15) auch $y \in M$. Wegen

$$\beta \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| \quad = \quad \|x-y\|$$

ist y **ein** Element aus M mit minimalem Abstand zu x. Wir haben aber auch gezeigt: **Jede** Minimalfolge ist eine CAUCHYfolge. Sei nun auch $y' \in M$ mit $\|x-y'\| = \beta$, dann ist die Folge

$$(y, y', y, y', \ldots)$$

eine Minimalfolge, also eine CAUCHYfolge , also gilt $y = y'$. □

<u>**Definition und Satz 68.32 :**</u> Sei H ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Untervektorraum von H . Dann ist

$$\begin{aligned} U^{\perp} \quad &:= \quad \{\ x \in H \ \big|\ \forall\, y \in U\ :\ <x,y>=\ 0\ \} \\ &= \quad \{\ x \in H \ \big|\ \forall\, y \in H\ :\ <y,x>=\ 0\ \} \end{aligned}$$

ebenfalls ein abgeschlossener Untervektorraum von H.

<u>**Beweis :**</u> Seien $x_1, x_2 \in U^{\perp}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt für alle $y \in U$:

$$<y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2> \quad = \quad \lambda_1 <y,x_1> + \lambda_2 <y,x_2> \quad = \quad 0 \quad ,$$

und $0 \in U^{\perp}$, also ist $U^{\perp}$ ein Untervektorraum von H . Da

$$f_y\ :\ H \ \longrightarrow\ \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) \quad := \quad <y,x>$$

für jedes $y \in H$ stetig ist, gilt für $y \in U$ und jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus $U^{\perp}$, die in H gegen x konvergiert, auch

$$<y,x> \quad = \quad <y, \lim_{n\to\infty} x_n> \quad = \quad \lim_{n\to\infty} <y,x_n> \quad = \quad 0 \quad ,$$

also $x \in U^\perp$. Also ist auch $U^\perp$ abgeschlossen. □

<u>**Satz und Definition 68.33 :**</u> Sei H ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Dann gibt es zu jedem $x \in H$ **eindeutig bestimmte** Elemente

$$x_1 \in U\,,\; x_2 \in U^\perp \quad \text{mit} \quad x \;=\; x_1 + x_2 \quad .$$

Man sagt dazu: H ist die <u>**orthogonale Summe**</u> von U und $U^\perp$ und schreibt : $H = U \bigoplus U^\perp$.

<u>**Beweis :**</u> Zu dem Untervektorraum U (der trivialerweise konvex ist) und dem gegebenen $x \in H$ gibt es nach Hilfssatz 68.31 genau ein $x_1 \in U$ mit

$$\|x - x_1\| \quad = \quad \min\{\; \|x - z\| \;\big|\; z \in U \;\} \quad .$$

Wir behaupten: $x - x_1 \in U^\perp$. Beweis: Für beliebiges $\mu \in \mathbb{C}$ und $y \in U$, $y \neq 0$ ist

$$\|x - x_1\|^2 \;\leq\; \|x - (x_1 + \mu y)\|^2 \;=< x - (x_1 + \mu y), x - (x_1 + \mu y) >$$

$$= \quad \|x - x_1\|^2 - \overline{\mu} < y, x - x_1 > -\mu < x - x_1, y > + \mu\overline{\mu}\|y\|^2 \quad .$$

Setzen wir hier

$$\mu \;:=\; \frac{< y, x - x_1 >}{\|y\|^2} \quad , \qquad \text{also} \quad \overline{\mu} \;=\; \frac{< x - x_1, y >}{\|y\|^2} \quad \text{ein, so folgt}$$

$$\|x - x_1\|^2 \;\leq\; \|x - x_1\|^2 - 2\frac{|< x - x_1, y >|^2}{\|y\|^2} + \frac{|< x - x_1, y >|^2}{\|y\|^2} \quad , \qquad \text{also}$$

$$0 \;\leq\; -\frac{|< x - x_1, y >|^2}{\|y\|^2} \quad ,$$

was nur für $< x - x_1, y >= 0$ gilt. Also steht $x - x_1$ auf allen $y \in U \setminus \{0\}$ senkrecht und damit gilt: $x - x_1 \in U^\perp$. Wir haben also

$$x \;=\; x_1 + x_2 \quad \text{mit} \quad x_2 \;:=\; x - x_1 \in U^\perp \;,\; x_1 \in U\,,$$

und x_1, x_2 sind eindeutig bestimmt, denn ist auch

$$x \;=\; y_1 + y_2 \quad \text{mit} \quad y_1 \in U\,,\; y_2 \in U^\perp \quad , \quad \text{dann folgt}$$

$$x_1 + x_2 \;=\; y_1 + y_2 \quad , \quad z \;:=\; x_1 - y_1 \;=\; y_2 - x_2 \quad \text{gehört zu} \quad U \cap U^\perp \;,$$

also $< z, z >= 0$, also $z \;=\; 0$, also

$$x_1 \;=\; y_1 \quad \text{und} \quad x_2 \;=\; y_2 \quad .$$

□

<u>**Bemerkung :**</u> Aus Hilfssatz 68.28 kennen wir bereits einige lineare, stetige Funktionen von H in $\mathbb{C}$, nämlich die

$$f_y \;:\; H \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) \;:=< y, x > \quad \text{für} \quad y, x \in H \quad .$$

Wir wollen zeigen, dass das alle linearen stetigen Funktionen von H in $\mathbb{C}$ sind. Außerdem wollen wir zeigen, dass zwei beliebige Hilberträume "isomorph" sind. Dazu die

Definition 68.34 : (siehe auch Definition 32.20) V und W seien Banachräume über $\mathbb{C}$. Dann sei

$$L(V,W) \quad := \quad \{\ f\ :\ V \longrightarrow W \ \big|\ f \text{ ist } \mathbb{C}-\text{linear und stetig } \} \quad ,$$

und wir setzen noch speziell

$$V' \quad := \quad L(V,\mathbb{C}) \quad , \quad L(V) \quad := \quad L(V,V) \quad .$$

Die Elemente von V' nennen wir **lineare Funktionale** auf V.

Satz 68.35 : Seien V und W Banachräume über $\mathbb{C}$, dann ist $L(V,W)$ mit der durch

$$\|f\| \quad := \quad \sup\{\ \|f(x)\| \ \big|\ x\in V \quad \text{mit} \quad \|x\|\le 1\ \}$$

definierten Norm ein Banachraum.

Beweis : 1) Dass $L(V,W)$ ein Vektorraum ist, ist klar. Es gilt

$$\|f\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|f(x)\| = 0 \quad \text{für alle} \quad x\in V \quad \text{mit} \quad \|x\|\le 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \|f(x)\| = 0 \quad \text{für alle} \quad x\in V \quad ,$$

denn für $x\in V$, $x\neq 0$ ist $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, und aus $\left\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = 0$ folgt $\dfrac{1}{\|x\|}\|f(x)\| = 0$, also $\|f(x)\| = 0$, also

$$\|f\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x\in V \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \quad .$$

Für $\lambda\in\mathbb{C}$ gilt

$$\|\lambda f\| \quad = \quad \sup\{\ \|\lambda f(x)\| \ \big|\ x\in V \quad \text{mit} \quad \|x\|\le 1\ \} \quad = \quad |\lambda|\,\|f\| \quad ,$$

und für $f,g\in L(V,W)$:

$$\|f+g\| = \sup\{\ \|f(x)+g(x)\| \ \big|\ x\in V \quad \text{mit} \quad \|x\|\le 1\ \} \le \|f\|+\|g\| .$$

Also ist $L(V,W)$ ein normierter Vektorraum.
2) Sei $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge aus $L(V,W)$. Für jedes $x\in V$ gilt

$$\|f_j(x)-f_k(x)\| \quad = \quad \|(f_j-f_k)(x)\| \quad \le \quad \|f_j-f_k\|\,\|x\|$$

für $j,k\in\mathbb{N}_0$, also ist $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge in W. Es gibt also ein $y\in W$ mit $y = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x)$. Wir setzen

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} f_j(x) = y \quad , \quad \text{dann gilt für } x,x'\in V\,,\ \lambda\in\mathbb{C} :$$

$$f(x+x') = \lim_{j\to\infty} f_j(x+x') = \lim_{j\to\infty}(f_j(x)+f_j(x')) = f(x)+f(x') ,$$

$$f(\lambda x) = \lim_{j\to\infty} f_j(\lambda x) = \lim_{j\to\infty}(\lambda f_j(x)) = \lambda\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \lambda f(x) ,$$

f ist also linear. Sei nun $x \in V$ mit $\|x\| \leq 1$. Dann gilt für $k, j \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_j(x)\| &\leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_j(x)\| \\ &\leq \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k - f_j\| \quad .\end{aligned}$$

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es ein j_0 , so dass für $k, j > j_0$ gilt

$$\|f_k - f_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Zu gegebenem x gibt es ein $k_0 \geq j_0$, so dass für $k, j > j_0$ gilt

$$\|f(x) - f_k(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \quad \text{Also gilt für} \quad j > j_0 \; :$$

$$(*) \qquad \|f(x) - f_j(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in V \quad \text{mit} \quad \|x\| \leq 1 \, , \quad \text{also}$$

$$\|f - f_j\| \quad \leq \quad \varepsilon$$

und damit $f = \lim\limits_{j \to \infty} f_j$, und wegen $(*)$ ist $f - f_j$ nach Satz 32.19 (F 22) auch stetig,

$$f - f_j \in L(V, W) \quad \text{und damit} \quad f \in L(V, W) \quad .$$

Also ist $L(V, W)$ ein Banachraum. □

Beispiel : Sei H ein Hilbertraum, $y \in H$, dann gilt für

$$f_y \; : \; H \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_y(x) := < y, x >$$

wegen $|f_y(x)| = |< y, x >| \leq \|y\| \, \|x\|$:

$$(*) \qquad \qquad \|f_y\| \leq \|y\| \quad .$$

Andererseits gilt für $y \neq 0$:

$$1 = \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = \frac{1}{\|y\|^2} < y, y > = \frac{1}{\|y\|} \left| f_y \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq \frac{1}{\|y\|} \|f_y\| \, ,$$

also $\|f_y\| \geq \|y\|$. Mit $(*)$ folgt $\|y\| = \|f_y\|$. □

Der folgende Satz sagt nun, dass die f_y bereits alle linearen Funktionale auf H sind:

Satz 68.36 (Darstellungssatz von Fréchet-Riesz) : Sei H ein Hilbertraum und $f \in H'$. Dann gibt es genau ein $y \in H$ mit

$$f = f_y \quad , \quad \text{und es gilt} \quad \|f\| = \|y\| \quad .$$

Beweis : 1) Die Eindeutigkeit von y ist klar: Seien $y, z \in H$ mit

$f_y = f_z$, dann gilt $\forall \, x \in H \; : \; 0 = < y, x > - < z, x > = < y - z, x >$,

also speziell $0 = < y-z, y-z > = \|y-z\|^2$, also $y = z$.
Nun zur Existenz von y : Für $f = 0$ können wir $y := 0$ nehmen. Sei $f \neq 0$, dann ist

$$H_1 \quad := \quad \operatorname{Ker} f \;=\; \{\; z \in H \;\big|\; f(z) \;=\; 0 \;\}$$

ein echter Untervektorraum von H . f ist stetig, $\{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$, also ist $H_1 = \overset{-1}{f}(\{0\})$ abgeschlossen in H nach Satz 32.18 (F 24). Wir haben also nach Satz 68.33:

$$H \;=\; H_1 \perp\!\!\!\!\bigcirc\; H_1^\perp \quad \text{mit} \quad H_1^\perp \neq \{0\} \quad \text{wegen} \quad H_1 \underset{\neq}{\subset} H \quad .$$

Sei $u \in H_1^\perp \setminus \{0\}$, also $f(u) \neq 0$. Sei $x \in H$ beliebig, dann ist

$$x - \frac{f(x)}{f(u)} u \in H_1 \quad \text{wegen} \quad f\left(x - \frac{f(x)}{f(u)} u\right) \;=\; 0 \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$0 \quad = \quad < u, x - \frac{f(x)}{f(u)} u > \quad = \quad < u, x > - \frac{f(x)}{f(u)} \|u\|^2 \quad ,$$

$$f(x) \quad = \quad \frac{f(u)}{\|u\|^2} < u, x > \quad = \quad < y, x > \quad \text{mit} \quad y := \frac{\overline{f(u)}}{\|u\|^2} u \quad .$$

3) Dass $\|f_y\| = \|y\|$ gilt, haben wir als "Beispiel " gezeigt. □

Wir wollen zeigen, dass zwei beliebige Hilberträume "isomorph" sind. Was soll überhaupt ein "Isomorphismus von Hilberträumen" sein ?

Definition 68.37 : H_1 und H_2 seien Hilberträume, D ein Untervektorraum von H_1 und R einer von H_2 . Sei

$$f \;:\; D \;\longrightarrow\; R \quad \text{linear und surjektiv.} \quad f \quad \text{heißt}$$

a) **isometrisch** , wenn $\forall\, x \in D \,:\, \|f(x)\| = \|x\|$ gilt, und
b) **unitär** , wenn zusätzlich $D = H_1$ und $R = H_2$ gilt. □

Dabei haben wir in a) , wie auch schon in Satz 68.35, dasselbe Zeichen $\| \quad \|$ für die Normen in H_1 und H_2 geschrieben. Auch für die Skalarprodukte in H_1 und H_2 schreiben wir dasselbe Zeichen :

Satz 68.38 : Sei f eine isometrische lineare Abbildung, wie in Definition 68.37. Dann gilt

$$\forall\, x, y \in D \,:\, < f(x), f(y) > \quad = \quad < x, y > \quad .$$

Auf dem Wertebereich R existiert eine isometrische lineare Umkehrfunktion

$$f^{-1} \;:\; R \;\longrightarrow\; D \quad .$$

Ist f unitär, so ist auch f^{-1} unitär.
Beweis : 1) Für $x, y \in D$ gilt

$$\begin{aligned} < x, y > \quad = \quad & \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{y-x}{2}, \frac{y-x}{2} \right\rangle \\ & +i \left\langle \frac{y+ix}{2}, \frac{y+ix}{2} \right\rangle - i \left\langle \frac{y-ix}{2}, \frac{y-ix}{2} \right\rangle \\ = \quad & \left\langle \frac{f(x)+f(y)}{2}, \frac{f(x)+f(y)}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{f(y)-f(x)}{2}, \frac{f(y)-f(x)}{2} \right\rangle \\ & +i \left\langle \frac{f(y)+if(x)}{2}, \frac{f(y)+if(x)}{2} \right\rangle - i \left\langle \frac{f(y)-if(x)}{2}, \frac{f(y)-if(x)}{2} \right\rangle \\ = \quad & < f(x), f(y) > \quad . \end{aligned}$$

2) $f \; : \; D \longrightarrow R$ ist surjektiv, aber auch injektiv, denn seien $x_1, x_2 \in D$ und $f(x_1) = f(x_2)$, dann ist

$$f(x_1 - x_2) = 0 \quad , \quad \|f(x_1 - x_2)\| = 0 \quad , \quad \text{also}$$

$\|x_1 - x_2\| = \|f(x_1 - x_2)\| = 0$, da f isometrisch ist, also $x_1 = x_2$. Also gibt es eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} \; : \; R \longrightarrow D \quad .$$

Man kann nachrechnen, dass f^{-1} linear ist, und f^{-1} ist isometrisch, denn zu $y \in R$ gibt es ein x mit $f(x) = y$, also

$$\|y\| = \|f(x)\| = \|x\| = \|f^{-1}(y)\| \quad .$$

3) Ist f unitär, so hat man

$$D = H_1 \quad \text{und} \quad R = H_2 \quad ,$$

also ist auch f^{-1} unitär. □

Bemerkung : Seien H_1 , H_2 Hilberträume, und die lineare Abbildung

$$f \; : \; H_1 \longrightarrow H_2$$

sei unitär, dann ist f stetig nach Satz 32.19, denn

$$(*) \qquad \forall\, x \in H_1 \; : \; \|f(x)\| = \|x\| \leq 1 \cdot \|x\| \quad .$$

Also ist $f \in L(H_1, H_2)$, und es ist $\|f\| = 1$, denn es gibt ein $x \in H_1$, $x \neq 0$, also

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \quad \text{und} \quad \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \text{, also wegen } \quad (*) \; :$$

$$\sup \{ \; \|f(y)\| \; \big| \; y \in H_1 \wedge \|y\| \leq 1 \; \} \quad = \quad 1 \quad .$$ □

Es ist nun leicht, zu zeigen, dass zwei beliebige Hilberträume "isomorph" sind:

Satz 68.39 : Sei H ein Hilbertraum, dann gibt es eine unitäre lineare Abbildung

$$f : H \longrightarrow \ell_2 \quad .$$

Beweis : Nach Satz 68.29 gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $(u_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ von H . Nach Hilfssatz 68.25 gilt dann für jedes $x \in H$:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k u_k \quad \text{mit} \quad \mu_k := < u_k, x > \quad . \quad \text{Wir setzen}$$

$$f(x) := (\mu_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad . \quad \text{Wegen} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{ist} \quad f(x) \in \ell_2 \quad ,$$

und f ist linear. f ist isometrisch, denn nach der PARSEVALschen Gleichung gilt

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\mu_k|^2 = \|x\|^2 \quad .$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass f surjektiv ist : Sei

$$(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2 \quad ,$$

dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 < \infty$, also gilt für $n, m \in \mathbb{N}_0$,

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} \beta_k u_k \quad \text{und} \quad n > m :$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \beta_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\beta_k|^2 \quad ,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine CAUCHYfolge in H , also konvergent, also existiert

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k \in H \quad , \quad \text{und dafür gilt}$$

$$f(x) = (\beta_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad .$$

Also ist $f : H \longrightarrow \ell_2$ unitär. □

Nach Satz 68.38 ist auch die Umkehrfunktion einer unitären linearen Abbildung unitär. Damit erhalten wir die

Folgerung 68.40 : Zwischen zwei beliebigen Hilberträumen H_1 und H_2 gibt es eine unitäre lineare Abbildung.

Beweis : Wir haben unitäre lineare Abbildungen

$$f : H_1 \longrightarrow \ell_2 \quad \text{und} \quad g : H_2 \longrightarrow \ell_2 \quad ,$$

und $g^{-1} \circ f : H_1 \longrightarrow H_2$ ist auch unitär. □

Insbesondere sind die Hilberträume ℓ_2 und $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ als Vektorräume isomorph, und es gibt sogar einen Isomorphismus

$$f\ :\ \ \ell_2 \ \longrightarrow\ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \forall\, x, y \in \ell_2 \ :\ < x, y > = < f(x), f(y) > \qquad .$$

- Mit Hilfe des Darstellungssatzes 68.38 kann man den adjungierten Operator definieren:

<u>**Satz und Definition 68.41 :**</u> Sei H ein Hilbertraum, $f \in L(H)$. Dann gibt es zu jedem f genau ein $f^* \in L(H)$ mit

$$\forall x, y \in H \ :\ < y, f(x) > \quad = \quad < f^*(y), x > \qquad .$$

f^* heißt der <u>**zu f adjungierte Operator**</u>. Es gilt $\|f^*\| \ = \ \|f\|$.

<u>**Beweis :**</u> Sei $x \in H$ fest. Dann ist

$$g_x\ :\ \ H \ \longrightarrow\ \mathbb{C} \quad , \quad g_x(y) \ := < x, f(y) >$$

linear und stetig, denn für $\|y\| \leq 1$ ist

$$|g_x(y)| \ \leq\ \|x\| \cdot \|f(y)\| \ \leq\ \|x\| \cdot \|f\| \qquad .$$

Also ist $g_x \in H'$, und nach Satz 68.36 (Fréchet-Riesz) gibt es genau ein $z =: h(x) \in H$ mit

$$g_x(y) \ = < h(x), y > \qquad \text{für alle} \quad y \in H \quad , \qquad \text{also}$$

$$< h(x), y > = < x, f(y) > \qquad \text{für alle} \quad x, y \in H \quad .$$

Das so definierte $h\ :\ \ H \ \longrightarrow\ H$ ist linear, denn für $y, x, x' \in H$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$< h(\lambda x + x'), y > = < \lambda x + x', f(y) > = \ \overline{\lambda} < x, f(y) > + < x', f(y) >$$

$$= \ \overline{\lambda} < h(x), y > + < h(x'), y > = < \lambda h(x) + h(x'), y > \quad ,$$

und da $h(\lambda x + x')$ eindeutig bestimmt war nach Satz 68.36, folgt

$$h(\lambda x + x') \quad = \quad \lambda h(x) + h(x') \quad .$$

h ist stetig, denn für $x, y \in H$ und $\|x\| \leq 1$ gilt

$$| < h(x), y > | \ = \ | < x, f(y) > | \ \leq\ \|x\|\,\|f(y)\| \ \leq\ \|x\|\,\|f\|\,\|y\|$$

$$\leq\ \|f\|\,\|y\| \quad , \quad \text{insbesondere}$$

$$\|h(x)\|^2 \ \leq\ \|f\|\,\|h(x)\| \quad , \qquad \text{also} \quad , \quad \text{auch für} \quad h(x) \ = \ 0\ :$$

$$\|h(x)\| \ \leq\ \|f\| \quad , \qquad \text{also} \quad \|h\| \ \leq\ \|f\| \quad .$$

Also ist $h \in L(H)$. Durch

$$\forall\, x, y \in H \,:\, < h(x), y > \;=\; < x, f(y) >$$

ist h durch f eindeutig bestimmt, man kann daher $f^* := h$ schreiben und hat

$$(*) \qquad \|f^*\| \leq \|f\| \quad .$$ Wegen

$$< x, h(y) > \;=\; \overline{< h(y), x >} \;=\; \overline{< y, f(x) >} \;=\; < f(x), y >$$

für alle $x, y \in H$ folgt $h^* = f$, also $(f^*)^* = f$, also, wenn man $(*)$ auf f^* statt f anwendet:

$$\|f\| = \|(f^*)^*\| \leq \|f^*\| \quad , \quad \text{und damit} \quad \|f\| = \|f^*\| \quad . \qquad \square$$

Die Rechenregeln für den adjungierten Operator erhalten Sie als Übungsaufgabe:

Satz 68.42 : Sei H ein Hilbertraum ; seien $f, f_1, f_2 \in L(H)$ und f^*, f_1^*, f_2^* die zugehörigen adjungierten Operatoren. Dann gilt:

a) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^* = \overline{\lambda_1} f_1^* + \overline{\lambda_2} f_2^*$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

b) $(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^*$ und $(f^*)^* = f$,

c) Existiert der inverse Operator $f^{-1} \in L(H)$, so existiert auch $(f^*)^{-1} \in L(H)$, und es ist $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. $\square$

Es gibt Operatoren f mit $f^* = f$; dazu gehören die Projektoren:

Definition 68.43 : Sei H ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Untervektorraum von H . Dann haben wir nach Satz 68.33 die orthogonale Zerlegung

$$H \;=\; U \bigoplus U^\perp \quad ;$$

zu jedem $x \in H$ gibt es eindeutig bestimmte $x_1 \in U$, $x_2 \in U^\perp$ mit

$$x = x_1 + x_2 \quad , \quad \text{wir können also}$$

$$p(x) \;:=\; x_1$$

setzen, dann ist p offenbar linear, und stetig, denn

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = < x_1 + x_2, x_1 + x_2 > = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|p(x)\|^2 \quad ,$$

also $\|p(x)\| \leq \|x\|$ und damit $\|p\| \leq 1$. Ist $U = \{0\}$, so ist $p = 0$ und damit $\|p\| = 0$. Ist $U \neq \{0\}$, so gibt es ein $z \in U$ mit $\|z\| = 1$. Dafür gilt

$$\|p(z)\| = \|z\| \quad \text{und damit :} \quad \|p\| = 1 \quad .$$

Für $x, y \in H$ gibt es $x_1, y_1 \in U$ und $x_2, y_2 \in U^\perp$ mit

$$x = x_1 + x_2 \quad , \quad y = y_1 + y_2 \quad , \qquad \text{also}$$

$< p(x), y > = < x_1, y_1 + y_2 > = < x_1, y_1 > = < x_1 + x_2, y_1 > = < x, p(y) >$,
also ist $p^* = p$. Für $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$, $x_2 \in U^\perp$ ist

$$p(p(x)) = p(x_1) = x_1 = p(x) \quad ,$$

also $p^2 = p$. - Die so definierte Abbildung $p \in L(H)$ heißt der **Projektor** von H auf U.

Satz 68.44 : Für alle $p \in L(H)$ gilt

$$p^* = p \wedge p^2 = p \quad \Longleftrightarrow \quad p \quad \text{ist ein Projektor.}$$

Beweis : " $\Longleftarrow$ " haben wir gerade gezeigt.
" $\Longrightarrow$ " : Wir setzen $U := \{ z \in H \mid p(z) = z \}$. Da p linear ist, ist

$$U = \{ z \in H \mid (p - \mathrm{id})(z) = 0 \} = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id})$$

ein Untervektorraum. $p - \mathrm{id}$ ist stetig, $\{0\}$ ist abgeschlossen, also ist

$$U = (p - \mathrm{id})^{-1}(\{0\}) \quad ,$$

das Urbild von $\{0\}$ unter $p - \mathrm{id}$, abgeschlossen nach Satz 32.18. Für $x \in H$ haben wir

$$x = p(x) + (x - p(x)) \quad ,$$

mit $p(x) \in U$, denn $p(p(x)) = p^2(x) = p(x)$, und $x - p(x) \in U^\perp$, denn für $z \in U$ gilt

$$< z, x - p(x) > \; = \; < z, x > - < z, p(x) >$$

$$= \; < z, x > - < p(z), x > \quad \text{wegen} \quad p^* = p$$

$$= \; < z - p(z), x > \; = \; < 0, x > \; = \; 0 \quad .$$

Also ist p der Projektor von H auf U. □

Das zentrale Thema in diesen Kapiteln ist die Bestimmung von Eigenwerten:

Bemerkung : Ist V ein **endlich**dimensionaler $K-$Vektorraum, K ein Körper, $f : V \longrightarrow V$ $K-$linear und $\lambda \in K$, so gibt es nur zwei Möglichkeiten :

(1) $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ ist nicht injektiv. Dann ist $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{0\}$; es gibt ein $x \in V \setminus \{0\}$ mit
$f(x) = \lambda x$, λ ist ein Eigenwert von f. Oder:

(2) $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ ist injektiv, λ ist kein Eigenwert von f.
(∗) Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist dann
$f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ sogar surjektiv,
wir haben die Umkehrfunktion
$(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Den Schluss $(*)$ können wir für unendlichdimensionales V nicht machen. Es kann sein, dass ein $\lambda \in K$ zwar kein Eigenwert von f ist, aber trotzdem $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{-1}$ nicht existiert. Nur die $\lambda \in K$, für die $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ bijektiv ist, wollen wir als "gutartig" (und damit uninteressant) ansehen :

Definition 68.45 : Sei B ein Banachraum über $\mathbb{C}$, W ein Untervektorraum von B und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, B)$. Dann heißt

$$M_f \quad := \quad \{\ \lambda \in \mathbb{C}\ \big|\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_W)^{-1} \ :\ B \longrightarrow B \quad \text{existiert und ist stetig}\ \}$$

die **Resolventenmenge** von f. Zu $\lambda \in M_f$ heißt

$$r_\lambda \quad := \quad (f - \lambda\,\mathrm{id}_W)^{-1}$$

die **Resolvente** von f zu λ, und

$$S_f \quad := \quad \mathbb{C} \setminus M_f$$

das **Spektrum** von f.

Bemerkung : Dass das Inverse einer linearen Abbildung $f\ :\ V \longrightarrow W$ wieder linear ist, wenn f bijektiv ist, wissen wir : Seien $x, y \in W$ und $\mu \in K$, dann gilt

$$f(f^{-1}(\mu x + y)) \ = \ \mu x + y \ = \ \mu f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y))$$
$$f(\mu f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \quad ,$$

und Anwendung von f^{-1} ergibt das Gewünschte. Hat man also

$$f\ :\ B \longrightarrow B \quad , \quad B \ \text{ein Banachraum,} \quad f \ \text{linear und stetig,}$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad , \quad \text{und existiert} \quad (f - \lambda\,\mathrm{id}_B)^{-1}\ :\ B \longrightarrow B \quad ,$$

so ist diese Abbildung linear. Sie ist dann sogar stetig; der Beweis dafür ist aber keineswegs trivial : Wegen Satz 32.18 muss man zeigen, dass das Urbild jeder offenen Menge $U \subset B$ bei $(f - \lambda\,\mathrm{id}_B)^{-1}$, also das Bild

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}_B)(U) \quad , \quad \text{offen ist :}$$

Definition 68.46 : Seien M und M' metrische Räume und $g\ :\ M \longrightarrow M'$. g heißt eine **offene Abbildung**, wenn für $U \subset M$, U offen, gilt :

$$g(U) \quad \text{ist offen in} \quad M'. \qquad \square$$

Den folgenden Satz können wir nicht beweisen, da wir dazu viel zu weit ausholen müssten :

Satz 68.47 (Satz von der offenen Abbildung) (H 242) : Seien B, B' Banachräume über $\mathbb{C}$ und $f\ :\ B \longrightarrow B'$ $\mathbb{C}-$linear, stetig und **surjektiv**. Dann ist f eine offene Abbildung. $\square$

Folgerung 68.48 (H 243): Seien B, B' Banachräume über $\mathbb{C}$ und $f\ :\ B \longrightarrow B'$ stetig und $\mathbb{C}-$linear.
f ist genau dann offen, wenn der Bildraum $f(B)$ abgeschlossen ist. $\square$

Direkt aus der Bemerkung vor Definition 68.45 und dieser Folgerung folgt

Folgerung 68.49 : Seien B, B' Banachräume über $\mathbb{C}$ und $f : B \longrightarrow B'$ $\mathbb{C}-$linear, stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(B) \longrightarrow B \quad \text{stetig.} \qquad \square$$

Eine erste, vielleicht etwas grobe, Aussage über das Spektrum macht
Satz 68.50 : Sei B ein $\mathbb{C}-$Banachraum und $f \in L(B)$. Dann ist

$$S_f \quad \subset \quad \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|f\| \} \quad .$$

Für $|\lambda| > \|f\|$ ist $\left(-\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Elementen aus $L(B)$. Der Grenzwert dieser Folge, den wir mit $-\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}}$ bezeichnen, ist die zu $f - \lambda\,\mathrm{id}$ inverse lineare Abbildung. Dabei ist unter f^j die $j-$fache Hintereinanderausführung von f zu verstehen, $f^0 := \mathrm{id}$.

Beweis : 1) Wir zeigen, dass $\left(\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|\lambda| > \|f\|$ eine Cauchy-folge ist: Für $f_1, f_2 \in L(B)$ und $x \in B$ gilt

$$\|(f_1 \circ f_2)(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\| \cdot \|x\| \quad , \qquad \text{also}$$

$$(*) \qquad \|f_1 \circ f_2\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\| \quad , \qquad \text{also}$$

$$\|f^j\| \leq \|f\|^j \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N} \quad ,$$

und wegen der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{\|f\|^j}{|\lambda|^j}$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n > m > N_0$ gilt

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\|f\|}{|\lambda|} \right)^j < \varepsilon \quad .$$

2) Da $L(B)$ nach Satz 68.37 ein Banachraum ist, existiert der Grenzwert

$$r_\lambda := -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} := \lim_{n\to\infty} \left(-\sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right) \in L(B) \quad ,$$

und aus $(*)$ folgt : Es gibt ein $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_1(\varepsilon)$ gilt :

$$\left\| f \circ r_\lambda - f \circ \left(-\sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right) \right\| \leq \|f\| \left\| r_\lambda + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right\| < \varepsilon \quad .$$

Also konvergiert auch die Folge $\left(f \circ \left(-\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right) \right)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen $f \circ r_\lambda$. Also ist

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ r_\lambda \;=\; f \circ r_\lambda - \lambda\, r_\lambda \;=$$

$$= \lim_{n\to\infty} f \circ \left(- \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}} \right) - \lim_{n\to\infty} \left(- \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j}} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(- \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{j+1}}{\lambda^{j+1}} + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{\lambda^{j}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathrm{id} - \frac{f^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \right) = \mathrm{id} \quad .$$

Analog beweist man

$$r_\lambda \circ (f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad = \quad \mathrm{id} \quad .$$

Also ist $f - \lambda\,\mathrm{id}$ bijektiv, besitzt die Umkehrfunktion r_λ und λ gehört zu M_f . $\square$

In einigen Spezialfällen wollen wir das Spektrum genauer untersuchen :

§69 Das Spektrum kompakter Operatoren

Definition 69.1 : Seien V und W Banachräume über $\mathbb{C}$, und

$$f \;:\; V \;\longrightarrow\; W \quad \text{sei} \quad \mathbb{C}-\text{linear.}$$

f heißt **kompakte lineare Abbildung** , wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 69.2 : Seien V und W Banachräume über $\mathbb{C}$ und

$$f \;:\; V \;\longrightarrow\; W \quad \text{sei} \quad \mathbb{C}-\text{linear und kompakt.}$$

Dann ist f stetig, also $f \in L(V,W)$.

Beweis : Angenommen, f ist nicht stetig. Dann gibt es nach Satz 32.19 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in V$ mit

$$\|f(x_n)\| \;>\; n\,\|x_n\| \quad , \qquad \text{also} \quad x_n \neq 0 \quad ,$$

und für $y_n \;:=\; \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ gilt :

$$\|y_n\| \;=\; 1 \quad \text{und} \quad \|f(y_n)\| \;>\; n \quad .$$

Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V ist also beschränkt, aber für jede Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\|f(y_{n_k})\| \;>\; n_k \quad ,$$

also ist $(f(y_{n_k}))$ unbeschränkt und kann nicht konvergieren, Widerspruch dazu, dass f kompakt ist. $\square$

Man könnte nun auf die Idee kommen, dass umgekehrt auch jede stetige lineare Abbildung kompakt ist. Um zu zeigen, dass das nicht so ist, brauchen wir einige Hilfssätze:

Hilfssatz 69.3 : Sei V ein normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum, dann gibt es zu endlich vielen linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ stets ein $\beta > 0$, so dass

$$\forall\,(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n\ :\ \ \|x_1v_1+\ldots+x_nv_n\|\ \geq\ \beta\,\|x\|$$

ist, wobei $\|x\| \,=\, \|(x_1,\ldots,x_n)\| \,=\, \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^2}$ ist.

<u>**Beweis :**</u> Jedes Element $\sum\limits_{j=1}^{n} x_jv_j$ aus $\operatorname{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\sum_{j=1}^{n} y_jv_j + \sum_{j=1}^{n} y_{n+j}iv_j \quad \text{mit} \quad (y_1,\ldots,y_{2n})\in\mathbb{R}^{2n} \quad ,$$

$$x_j \,=\, y_j + iy_{n+j} \quad \text{für} \quad j\in\underline{n} \quad . \quad \text{Die Abbildung}$$

$$g\ :\ \mathbb{R}^{2n}\ \longrightarrow\ V \quad , \quad g(y_1,\ldots,y_{2n}) \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} y_jv_j + \sum_{j=1}^{n} y_{n+j}iv_j$$

ist $\mathbb{R}-$linear und stetig nach Satz 32.19, denn

$$\|g(y_1,\ldots,y_{2n})\|\ \leq\ \sum_{j=1}^{n}|y_j|\,\|v_j\|\ +\ \sum_{j=1}^{n}|y_{n+j}|\,\|v_j\|\ \leq\ 2nM\|y\|$$

$$\text{mit}\quad \|y\|^2\ =\ \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 \quad , \quad M\ :=\ \max\left\{\ \|v_j\|\ \middle|\ j\in\underline{n}\ \right\} \quad .$$

Auch $h\ :\ \mathbb{R}^{2n}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$, $h(y_1,\ldots,y_{2n})\ :=\ \|g(y_1,\ldots,y_{2n})\|$, ist stetig, da $\|\ \ \|\ :\ V\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$ stetig ist, und

$$S \quad := \quad \left\{\ y\in\mathbb{R}^{2n}\ \middle|\ \|y\|\ =\ 1\ \right\} \quad \text{ist kompakt,}$$

da S abgeschlossen und beschränkt ist, also ist nach Satz 33.10 auch $h(S)$ kompakt, und nach Satz 33.11 existiert

$$\beta\ :=\ \min h(S)\ \geq\ 0 \quad , \quad \text{sogar} \quad \beta\ >\ 0 \quad ,$$

denn aus $\beta\,=\,0$ würde folgen: Es gibt ein $(y_1,\ldots,y_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$ mit $\|y\|\,=\,1$, also $y\neq 0$, und

$$0\ =\ h(y)\ =\ \left\|\sum_{j=1}^{n} y_jv_j + \sum_{j=1}^{n} y_{n+j}iv_j\right\| \quad , \qquad \text{also}$$

$$0\ =\ \sum_{j=1}^{n}(y_j+iy_{n+j})v_j \quad ,$$

im Widerspruch dazu, dass $(v_1,\ldots,v_n)$ über $\mathbb{C}$ linear unabhängig war. Also gilt für $(y_1,\ldots,y_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}$ mit $\|y\|\,=\,1$:

$$\|g(y_1,\ldots,y_{2n})\| \;\geq\; \beta \;>\; 0\,,$$

und für beliebiges $y \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\|g(y_1,\ldots,y_{2n})\| \;\geq\; \beta\,\|y\|$$

und damit für $(x_1,\ldots,x_n) \;=\; (y_1+iy_{n+1},\ldots,y_n+iy_{2n}) \;\in\; \mathbb{C}^n$ wegen

$$\|x\|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} (y_j^2+y_{n+j}^2) \;=\; \|y\|^2 \;:$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right\| \;\geq\; \beta\,\|x\| \quad . \qquad \square$$

<u>**Folgerung 69.4 :**</u> Sei W ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum, mit Basis $(v_1,\ldots,v_n)$. Dann konvergiert eine Folge

$$(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \quad = \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(k)} v_j\right)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{gegen} \quad y \;=\; \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j$$

in W genau dann, wenn

$$\forall\, j \in \underline{n} \;:\; \lim_{k\to\infty} \eta_j^{(k)} \;=\; \eta_j \quad \text{ist,}$$

d.h. wenn die Folge "komponentenweise" konvergiert.

<u>**Beweis :**</u> 1) Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt: Wenn

$$\lim_{k\to\infty} \eta_j^{(k)} \;=\; \eta_j \quad , \qquad \text{also} \quad \lim_{k\to\infty} \eta_j^{(k)} v_j \;=\; \eta_j v_j$$

für alle $j \in \underline{n}$ gilt, dann ist $\lim\limits_{k\to\infty} y_k \;=\; y$ für obiges $y_k\,,\,y$.

2) Nach Hilfssatz 69.3 gibt es ein $\beta \;>\; 0$ mit

$$\|(\eta_j^{(k)}-\eta_j)_{j\in\underline{n}}\| \;\leq\; \frac{1}{\beta}\|y_k-y\| \quad \text{für} \quad k\in\mathbb{N} \quad ,$$

wobei links die euklidische Norm im $\mathbb{C}^n$ steht. Aus $\lim\limits_{k\to\infty} \|y_k-y\| \;=\; 0$ folgt also $\lim\limits_{k\to\infty} (\eta_j^{(k)})_{j\in\underline{n}} \;=\; (\eta_j)_{j\in\underline{n}}$ in $\mathbb{C}^n$ und damit die Behauptung. $\square$

<u>**Folgerung 69.5 :**</u> Sei V ein normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum und W ein endlichdimensionaler Untervektorraum. Dann ist W abgeschlossen in V .

<u>**Beweis :**</u> Sei $(v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis von W und $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^{(k)} v_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in W mit einem Grenzwert v_0 . Angenommen, es ist $v_0 \notin W$, dann ist $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis des endlichdimensionalen Untervektorraums $W_0 \;:=\; \mathrm{span}(v_0,v_1,\ldots,v_n)$, und in W_0 gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(0\,v_0+\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(k)} v_j\right) \;=\; 1\,v_0+\sum_{j=1}^{n} 0\,v_j \quad ,$$

nach Folgerung 69.4 also $\lim\limits_{k\to\infty} 0 \;=\; 1$, Widerspruch. Also ist $v_0 \in W$, und nach Satz 32.4 (F 15) ist W abgeschlossen.

<u>Hilfssatz 69.6 :</u> Sei V ein normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum. Dann gilt:

$$E := \{ \; v \in V \;\big|\; \|v\| \le 1 \; \} \quad \text{ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{C}} V < \infty \quad .$$

<u>Beweis :</u> 1) Sei $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, dann gibt es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, und nach Hilfssatz 69.3 gibt es ein $\beta > 0$, so dass für $v = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j v_j \in E$ gilt

$$1 \ge \|v\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\| \ge \beta \, \|x\|$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, für das dann $\|x\| \le \dfrac{1}{\beta}$ ist, also

$$E \subset g(K_{\frac{1}{\beta}}) \quad \text{mit} \quad K_{\frac{1}{\beta}} := \{ \; y \in \mathbb{R}^{2n} \;\big|\; \|y\| \le \frac{1}{\beta} \; \}$$

und der im Beweis von Hilfssatz 69.3 definierten stetigen linearen Funktion

$$g : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow V \quad , \quad g(y_1, \ldots, y_{2n}) := \sum_{j=1}^{n} (y_j + i y_{n+j}) v_j \quad .$$

$K_{\frac{1}{\beta}}$ ist abgeschlossen und beschränkt im $\mathbb{R}^{2n}$, also kompakt nach Satz 33.7 (Heine-Borel). $g(K_{\frac{1}{\beta}})$ ist kompakt nach Satz 33.10, da g stetig ist. E ist (als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0;1]$ bei der stetigen Abbildung $\| \;\; \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$) eine abgeschlossene Teilmenge von $g(K_{\frac{1}{\beta}})$, also E kompakt nach Forster 2, §3 , Satz 4 (F 30).
2) E sei kompakt. Es gilt

$$E \subset \bigcup_{x \in E} K_{\frac{1}{2}}(x) \quad ,$$

und es reichen endlich viele dieser offenen Kugeln aus, um E zu überdecken:

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} K_{\frac{1}{2}}(a_j) \quad \text{mit} \quad a_1, \ldots, a_n \in E \quad .$$

Sei $W := \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(a_j)_{j \in \underline{n}}$; wir zeigen $W = V$ und damit $\dim_{\mathbb{C}} V \le n$: Angenommen, es gibt ein $x \in V$, $x \notin W$, dann ist

$$\alpha := \inf \{ \; \|x - y\| \;\big|\; y \in W \; \} > 0$$

nach Beispiel (3.5) in (F 32), denn W ist abgeschlossen nach Folgerung 69.5. Es gibt dann ein $y \in W$ mit

$$\alpha \le \|x - y\| \le \frac{3}{2}\alpha \quad . \quad \text{Für}$$

$$z := \frac{x - y}{\|x - y\|} \quad \text{gilt} \quad \|z\| = 1 \quad , \qquad \text{also} \quad z \in E \quad ,$$

es gibt ein $j \in \underline{n}$ mit $z \in K_{\frac{1}{2}}(a_j)$, ,

$$x = y + \|x - y\| z = y + \|x - y\| a_j + \|x - y\|(z - a_j)$$

und $y + \|x - y\| a_j \in W$. Also gilt

$$\|x-y\|\,\|z-a_j\| \quad = \quad \|x-(y+(\|x-y\|a_j)\| \quad \geq \quad \alpha \quad ,$$
$$\|x-y\| \quad \geq \quad \frac{\alpha}{\|z-a_j\|} \quad \geq \quad \frac{\alpha}{\frac{1}{2}} \quad = \quad 2\alpha \quad , \quad \text{Widerspruch.} \qquad \square$$

Hilfssatz 69.7 (Rieszsches Lemma) : Sei V ein normierter $\mathbb{C}-$Vektorraum und W ein abgeschlossener Untervektorraum, $W \underset{\neq}{\subset} V$ .Dann gibt es zu jedem $\eta \in (0,1)$ einen Vektor $x_\eta \in V$ mit

$$\|\,x_\eta\,\| = 1 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in W \;:\; \|x - x_\eta\,\| \geq \eta \quad .$$

Beweis : In V gibt es einen Vektor $y \notin W$. Dann ist

$$d \quad := \quad \inf\{\ \|x-y\| \ \big|\ x \in W\ \} \ > \ 0$$

nach Beispiel (3.3) in (F 21), und es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in W mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y\| \ = \ d$. Wegen $0 < \eta < 1$ ist $\dfrac{d}{\eta} > d$, also gibt es ein $z \in W$ mit

$$0 \ < \ d \ \leq \ \|z-y\| \ < \ \frac{d}{\eta} \quad .$$

Wir setzen $\gamma \ := \ \dfrac{1}{\|z-y\|}$ und $x_\eta \ := \ \gamma(y-z)$, dann ist $\|\,x_\eta\,\| \ = \ 1$, und für alle $x \in W$ hat man wegen $\gamma \ > \ \dfrac{\eta}{d}$ und $\dfrac{1}{\gamma}x + z \in W$:

$$\|x - \,x_\eta\,\| \ = \ \|x-\gamma(y-z)\| \ = \ \|(x+\gamma z)-\gamma y\| \ = \ \gamma\|(\frac{1}{\gamma}x+z)-y\|$$
$$> \ \frac{\eta}{d}\cdot d \ = \ \eta\,. \qquad \square$$

Satz 69.8 : Sei V ein $\mathbb{C}-$Banachraum. Genau dann sind alle Elemente aus $L(V)$ kompakt, wenn $\dim_{\mathbb{C}} V \ < \ \infty$ ist.

Beweis : 1) Sei $\dim_{\mathbb{C}} V \ < \infty$ und $f \in L(V)$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in V , es gebe also ein $c \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\|x_n\| \ \leq \ c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{dann ist}$$
$$\left\|\frac{x_n}{c}\right\| \quad \leq \quad 1 \quad ,$$

die $\dfrac{x_n}{c}$ liegen also in der nach Hilfssatz 69.6 kompakten Einheitskugel $E \ = \ \{\ x \in V \ \big|\ \|x\| \leq 1\ \}$. Nach FORSTER 2, §3, Satz 8 (F 33) (BOLZANO-WEIERSTRASS) gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $a \in E$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f in a folgt daraus

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \quad = \quad f(a) \quad ,$$

d.h. $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine konvergente Teilfolge, f ist kompakt.

Sei $\dim_{\mathbb{C}} V = \infty$. Die Abbildung id_V ist sicher stetig. Wir zeigen, dass id_V nicht kompakt ist, dass es also eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, für die $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathrm{id}_V(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aber keine konvergente Teilfolge enthält: Zunächst gibt es ein $x_1 \in V$ mit $\|x_1\| = 1$. Sei

$$W_1 \quad := \quad \mathrm{span}\,(x_1)\,,$$

dann ist $W_1 \neq V$, W_1 endlichdimensional, also abgeschlossen. Nach Hilfssatz 69.7 gibt es ein $x_2 \in V$ mit

$$\|x_2\| = 1 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in W_1 : \ \|x - x_2\| \geq \frac{1}{2} \quad .$$

Das macht man nun rekursiv: Seien $x_1, \ldots, x_n$ konstruiert, dann ist $W_n := \mathrm{span}\,(x_1, \ldots, x_n) \neq V$ und abgeschlossen, es gibt also ein $x_{n+1} \in V$ mit

$$\|x_{n+1}\| = 1 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in W_n : \ \|x - x_{n+1}\| \ \geq \ \frac{1}{2} \quad .$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offenbar beschränkt; für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt aber

$$\|x_n - x_m\| \ \geq \ \frac{1}{2} \quad ,$$

es gibt also nicht einmal eine Teilfolge, die CAUCHYfolge ist. □

Nach Satz 68.35 ist $L(V, W)$ mit

$$\|f\| \quad := \quad \sup\{\ \|f(x)\| \ \big| \ \|x\| \leq 1\ \}$$

wieder ein Banachraum. Damit ist “Konvergenz in $L(V, W)$ ” definiert:

Satz 69.9 : Seien V, W Banachräume über $\mathbb{C}$, dann bilden die kompakten Operatoren einen abgeschlossenen Untervektorraum von $L(V, W)$.

Beweis : 1) Seien f, g kompakt und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in V, dann können wir eine Teilfolge

$$(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{finden, so dass} \quad (f(x_{j_k}))_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und davon wiederum eine Teilfolge

$$(x_{j_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}} \quad , \quad \text{so dass} \quad (g(x_{j_{k_n}}))_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergiert. Dann konvergiert auch $(\lambda f(x_{j_{k_n}}) + \mu g(x_{j_{k_n}}))_{n\in\mathbb{N}}$, also ist $\lambda f + \mu g$ kompakt.

2) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $L(V, W)$ konvergente Folge kompakter linearer Abbildungen und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in V :

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+^* : \ \|x_j\| \leq c \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N} \quad .$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{1j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_1(x_{1j}))_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, davon wiederum eine Teilfolge $(x_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_2(x_{2j}))_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, allgemein eine Teilfolge $(x_{n+1,j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $(f_{n+1}(x_{n+1,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nehmen wir die "Diagonalglieder"

$$y_j \quad := \quad x_{jj} \quad ,$$

so ist $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, jedenfalls vom Index $j = n$ an, eine Teilfolge von $(x_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$, also konvergiert $(f_n(x_{nj}))_{j\in\mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, dann gibt es zu dem in $L(V,W)$ existierenden $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_{n_0} - f\| < \varepsilon \quad \text{ist.}$$

Dann gilt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $l,k > k_0$

$$\|f_{n_0}(y_l) - f_{n_0}(y_k)\| < \varepsilon$$

ist; dann gilt für diese l,k:

$$\|f(y_l) - f(y_k)\| \le \|f(y_l) - f_{n_0}(y_l)\| + \|f_{n_0}(y_l) - f_{n_0}(y_k)\| + \|f_{n_0}(y_k) - f(y_k)\|$$

$$< \varepsilon\|y_l\| + \varepsilon + \varepsilon\|y_k\| \le (2c+1)\varepsilon \quad .$$

Also ist $(f(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHYfolge im Banachraum W und damit eine konvergente Teilfolge von $(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$. □

Definition 69.10 : Sei B ein $\mathbb{C}-$Banachraum. Ein $f \in L(B)$ heißt **ausgeartet** , wenn für den Wertebereich

$$R(f) \quad := \quad f(B) \quad \text{gilt :} \quad \dim_{\mathbb{C}} R(f) < \infty \quad .$$ □

Folgerung 69.11 : Sei B ein $\mathbb{C}-$Banachraum und $f \in L(B)$ ausgeartet. Dann ist f kompakt.

Beweis : Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in B , also

$$\exists\, c \in \mathbb{R}_+^* : \ \|x_n\| \le c \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad , \qquad \text{und}$$

$$\|f(x_n)\| \le \|f\|\,\|x_n\| \le c \cdot \|f\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die

$$y_n \quad := \quad f\left(\frac{x_n}{c\|f\|}\right)$$

liegen also in

$$E \quad := \quad \{\ z \in R(f) \ \big|\ \|z\| \le 1\ \} \quad ,$$

und E ist nach Hilfssatz 69.6 kompakt. Nach FORSTER 2 §3, Satz 8 (F 33) (BOLZANO-WEIERSTRASS) hat $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen einen Punkt $a \in E$ konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Also gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \quad = \quad c\,\|f\|\cdot a \quad ,$$

also ist f kompakt. □

Wir kommen nun wieder zu Hilberträumen :

Hilfssatz 69.12 : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$ ausgeartet. Dann gibt es endliche Familien $(e_j)_{j\in\underline{k}}$, $(e_j^*)_{j\in\underline{k}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit

$$< e_l, e_r >= \delta_{lr} \quad , \quad k = \dim R(f) \quad \text{und}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} < e_j^*, x > e_j \quad \text{für alle} \quad x \in H\,,\ l, r \in \underline{k} \quad .$$

Der adjungierte Operator f^* ist ebenfalls ausgeartet, und es gilt

$$\dim R(f^*) = k \quad \text{und} \quad f^*(x) = \sum_{j=1}^{k} < e_j, x > e_j^* \quad .$$

Beweis : Sei $k := \dim R(f)$. Dann gibt es in $R(f)$ eine Orthonormalbasis $(e_j)_{j\in\underline{k}}$. Jedes $f(x)$, $x \in H$, ist eine Linearkombination

$$f(x) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x)\, e_j \quad .$$

Bilden wir das Skalarprodukt mit e_l für $l \in \underline{k}$, so erhalten wir

$$< e_l, f(x) > \quad = \quad \alpha_l(x)$$

und wegen

$$|\alpha_l(x)| \le \|e_l\|\,\|f\|\,\|x\|$$

ist α_l ein lineares Funktional auf H, und nach Satz 68.36 (Fréchet-Riesz) gibt es ein $e_l^* \in H$ mit

$$\alpha_l(x) = < e_l^*, x > = < f^*(e_l), x > \quad \text{für alle} \quad x \in H \quad , \qquad \text{also}$$

$$f(x) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} < e_j^*, x > e_j \quad .$$

Für beliebige $x, y \in H$ erhalten wir

$$< y, f(x) > = \sum_{j=1}^{k} < e_j^*, x > < y, e_j > = \left\langle \sum_{j=1}^{k} < e_j, y > e_j^*, x \right\rangle \quad ,$$

andererseits ist f^* definiert durch

$$< y, f(x) > \quad = \quad < f^*(y), x > \quad , \quad \text{also gilt}$$

$$f^*(y) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} < e_j, y > e_j^* \quad ,$$

also ist auch f^* ausgeartet, $(e_j^*)_{j\in\underline{k}}$ ist ein Erzeugendensystem von $R(f^*)$, also $\dim R(f^*) \le \dim R(f)$. Wegen $(f^*)^* = f$ folgt dann aber auch

$$\dim R(f) \;=\; \dim R((f^*)^*) \;\leq\; \dim R(f^*) \quad ,$$

also $\dim R(f^*) \;=\; \dim R(f) \quad .$ □

Satz 69.13 : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$.

(1) f ist genau dann kompakt, wenn es eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ausgearteter Operatoren gibt mit $\lim\limits_{j\to\infty} \|f - f_j\| \;=\; 0$.

(2) f ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator f^* kompakt ist.

Beweis : (1) " $\Longleftarrow$ " : Ausgeartete Operatoren sind kompakt nach Folgerung 69.11, und nach Satz 69.9 ist der Grenzwert einer Folge kompakter Operatoren kompakt. Also ist der Grenzwert einer Folge ausgearteter Operatoren kompakt.
" $\Longrightarrow$ " : f sei kompakt, und

$$E \quad = \quad \{\; x \in H \;\big|\; \|x\| \leq 1 \;\} \quad \text{die Einheitskugel in } H \quad .$$

Dann hat jede Folge $(y_n) \;=\; (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aus $f(E)$ eine konvergente Teilfolge, denn f ist kompakt und (x_n) beschränkt. Wir behaupten:
$(*)$ Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_m \in f(E)$, so dass $f(E) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} K_\varepsilon(a_k)$ ist.

Beweis von $(*)$: Angenommen, $(*)$ ist falsch, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(E)$ nicht von endlich vielen offenen Kugeln mit Radius ε überdeckt werden kann. Wir konstruieren damit rekursiv eine Folge

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{in} \quad f(E) \quad \text{mit} \quad \|y_k - y_n\| \;\geq\; \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k, n \in \mathbb{N}_0\,,\; k \neq n \;:$$

y_0 können wir beliebig aus $f(E)$ wählen. Seien $y_0, \ldots, y_n$ schon so definiert, dass $\|y_k - y_l\| \;\geq\; \varepsilon$ für $k, l \leq n\,,\; k \neq l$ gilt. Da die Kugeln $K_\varepsilon(y_k)$, $k \leq n$, keine Überdeckung von $f(E)$ bilden, gibt es ein $y_{n+1} \in f(E)$ mit

$$y_{n+1} \quad \notin \quad \bigcup_{k=0}^{n} K_\varepsilon(x_k) \quad , \qquad \text{also}$$

$$\|y_{n+1} - y_k\| \;\geq\; \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \leq n \quad .$$

Sei nun $z \in f(E)$ beliebig, dann liegt in $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ höchstens ein Element der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, denn zwei Elemente von $K_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ haben einen Abstand $< \varepsilon$. Also hat die Folge (y_n) keine gegen einen Punkt $z \in f(E)$ konvergente Teilfolge, Widerspruch. Damit ist $(*)$ bewiesen.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben, dann haben wir nach $(*)$

$$a_1, \ldots, a_{m(\varepsilon)} \;\in\; f(E) \quad \text{mit} \quad f(E) \;\subset\; \bigcup_{k=1}^{m(\varepsilon)} K_\varepsilon(a_k) \quad . \quad \text{Sei}$$

$$H_\varepsilon \quad := \quad \operatorname{span}\,(a_j)_{j\in\underline{m(\varepsilon)}} \quad \text{und}$$

$p_\varepsilon : H \longrightarrow H$ der Projektor von H auf den endlichdimensionalen, also nach Folgerung 69.5 abgeschlossenen, Untervektorraum H_ε. Dann ist

$$f_\varepsilon \quad := \quad p_\varepsilon \circ f \quad \text{ausgeartet wegen} \quad \dim R(f_\varepsilon) \le m(\varepsilon) \quad .$$

Sei $x \in H$ mit $\|x\| = 1$. Dann folgt

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \quad \le \quad \min\{\ \|f(x) - z\| \ \big|\ z \in H_\varepsilon\ \}$$

nach Konstruktion der orthogonalen Zerlegung in Satz 68.33. Wegen $a_j \in H_\varepsilon$ folgt

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \le \min\{\ \|f(x) - a_j\| \ \big|\ j \in \underline{m(\varepsilon)}\ \} \le \varepsilon \quad ,$$

also $\|f - f_\varepsilon\| \le \varepsilon$. Also bekommt man f als Grenzwert einer Folge ausgearteter Operatoren.

(2) Sei f kompakt. Dann gibt es nach (1) eine Folge ausgearteter Operatoren f_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$. Nach Hilfssatz 69.12 sind die f_n^* ausgeartet, und nach Satz 68.41 ist

$$\|f^* - f_n^*\| = \|f - f_n\| \quad ,$$

also auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^* = f^*$, und nach (1) ist f^* kompakt. Ist umgekehrt f^* kompakt, so folgt mit diesem Schluss, dass $f = (f^*)^*$ kompakt ist. □

Hilfssatz 69.14 : Sei H_1 ein Untervektorraum des Hilbertraums H. Dann ist auch der Abschluss $\overline{H_1}$ ein Untervektorraum von H.
Beweis : Das folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte. □

Hilfssatz 69.15 : Sei $f \in L(H)$. Dann ist (mit der schon in Definition 69.10 eingeführten Abkürzung $R(g) := g(H)$ für $g : H \longrightarrow H$) H die orthogonale Summe

$$\begin{aligned} H \quad &= \quad \overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})} \ \textcircled{\perp}\ \operatorname{Ker}(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \\ &= \quad \overline{R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})} \ \textcircled{\perp}\ \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad . \end{aligned}$$

Beweis : Zu dem abgeschlossenen Untervektorraum $\overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})}$ haben wir nach 68.33 die orthogonale Summe

$$H \quad = \quad \overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})} \ \textcircled{\perp}\ \overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})}^{\perp} \quad .$$

Sei $y \in \overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})}^{\perp}$. Dann gilt für alle $x \in H$:

$$0 = \langle y, (f - \lambda\,\mathrm{id})(x) \rangle = \langle (f - \lambda\,\mathrm{id})^*(y), x \rangle \quad , \qquad \text{also}$$

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})^*(y) = 0 \quad , \quad f^*(y) - \overline{\lambda} y = 0 \quad ,$$

$$y \in \operatorname{Ker}(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad . \quad \text{Also gilt}$$

$$\overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})}^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad .$$

Sei umgekehrt $y \in \operatorname{Ker}(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})$, so ist für $x \in H$:

$$< y, (f - \lambda\,\mathrm{id})(x) > = < (f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y), x > = 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$y \in R(f - \lambda\,\mathrm{id})^{\perp} \quad ,$$

und da $< \ , \ >: H \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, auch

$$y \in \overline{R(f - \lambda\,\mathrm{id})}^{\perp} \quad .$$

Der zweite Teil der Formel folgt aus $(f^*)^* = f$, wenn wir f^* für f einsetzen.

□

Für kompaktes f wird der Satz etwas einfacher:

<u>Satz 69.16 :</u> Sei $f \in L(H)$ ein kompakter Operator und $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Dann ist H die orthogonale Summe

$$\begin{aligned} H &= R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \\ &= R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad . \end{aligned}$$

<u>Beweis :</u> Wegen Hilfssatz 69.15 müssen wir nur zeigen, dass $R(f - \lambda\,\mathrm{id})$ ein abgeschlossener Untervektorraum ist.
1.) Wir zeigen zunächst, dass es ein $c \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit

$$(*) \qquad \|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x)\| \geq c \cdot \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad ,$$

oder, was gleichbedeutend ist:

$$\|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x)\| \geq c \quad \text{für alle} \quad x \in R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad \text{mit} \quad \|x\| = 1 \,.$$

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es gibt kein solches c. Dann gibt es eine Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_j \in R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad \text{und} \quad \|x_j\| = 1 \quad \text{und}$$

$$(**) \qquad \|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x_j)\| < \frac{1}{j} \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

f ist kompakt und die Folge $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also gibt es eine Teilfolge $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, so dass $(f(y_j))_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Andererseits ist nach $(**)$:

$$\lim_{j \to \infty} (f(y_j) - \lambda y_j) = 0 \quad ,$$

also konvergiert auch die Folge $(\lambda y_j)_{j \in \mathbb{N}}$,

$$-\lambda y_j = f(y_j) - \lambda y_j - f(y_j) \quad ,$$

und wegen $\lambda \neq 0$ konvergiert auch $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, etwa gegen y . f ist stetig, also $\lim\limits_{j \to \infty} f(y_j) = f(y)$, also

$$y \in \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad ,$$

andererseits, da $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge von $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ war,
$x_j \in R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})$:

$$y \in \overline{R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})} \;=\; \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})^{\perp} \quad \text{nach Hilfssatz 69.15} ,$$

also $y = 0$, im Widerspruch zu $\|y\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|y_j\| = 1$.
2.) Wir zeigen nun, dass $R(f - \lambda\,\mathrm{id})$ abgeschlossen ist. Sei dazu $y \in H$ und es gebe eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $R(f - \lambda\,\mathrm{id})$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} y_j = y$, und dazu $z_j \in H$ mit

$$y_j \quad = \quad (f - \lambda\,\mathrm{id})(z_j) \quad .$$

Nach Hilfssatz 69.15 kann man z_j eindeutig zerlegen in

$$z_j = x_j + n_j \quad \text{mit} \quad x_j \in \overline{R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})} \quad \text{und} \quad n_j \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad , \quad \text{also}$$

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})(z_j) \;=\; (f - \lambda\,\mathrm{id})(x_j) + 0 \;=\; y_j \quad .$$

Auf die x_j wenden wir nun $(*)$ aus 1.) an :

$$\|x_j - x_k\| \;\le\; \frac{1}{c}\,\|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x_j - x_k)\| \;=\; \frac{1}{c}\,\|y_j - y_k\| \quad ,$$

also konvergiert auch die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, etwa gegen x. Damit folgt

$$y \;=\; \lim_{j\to\infty} y_j \;=\; \lim_{j\to\infty} (f - \lambda\,\mathrm{id})(x_j) \;=\; (f - \lambda\,\mathrm{id})(x) \quad , \qquad \text{also}$$

$$y \in R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad .$$

Nach Satz 2 in §2 (F 10) ist $R(f - \lambda\,\mathrm{id})$ abgeschlossen.
Man muss nun noch f durch f^* ersetzen, um die zweite Aussage des Satzes zu bekommen. Das geht, da wir nach Satz 69.13 wissen:
f kompakt $\iff$ f^* kompakt. □

Nun können wir den zentralen Satz für kompakte Operatoren beweisen :

Satz 69.17 : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$ kompakt. Dann gilt:
(a) Das Spektrum S_f ist die Menge der Eigenwerte, vereinigt mit $\{0\}$.
(b) S_f ist höchstens abzählbar (d.h. endlich oder abzählbar). Eine konvergente Folge von verschiedenen Elementen aus S_f kann nur gegen 0 konvergieren.
(c) Jeder von 0 verschiedene Eigenwert λ hat **endliche Vielfachheit**, d.h. $\dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) < \infty$.
(d) Es ist $S_{f^*} = \{\, \overline{\lambda} \mid \lambda \in S_f \,\}$.

Beweis : (d) Sei M_f die Resolventenmenge von f und $\lambda \in M_f$, dann existiert $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} \in L(H)$. Nach Satz 68.42 c) existiert auch $(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{-1} \in L(H)$. Also ist $\overline{\lambda} \in M_{f^*}$, also gilt: $\lambda \in M_f \implies \overline{\lambda} \in M_{f^*}$.
Wenn man f und f^* vertauscht, erhält man die umgekehrte Richtung, und wegen

$$S_f \quad = \quad \mathbb{C} \setminus M_f \ :$$
$$S_{f^*} \quad = \quad \{ \ \overline{\lambda} \ \big| \ \lambda \in S_f \ \} \quad .$$

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f so ist $f - \lambda\,\mathrm{id}$ nicht injektiv, also kann $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ nicht existieren, also ist $\lambda \in S_f$. Wir zeigen nun die umgekehrte Richtung: Ist $\lambda \neq 0$ und λ kein Eigenwert von f, so gehört λ zu M_f, also nicht zu S_f.
Beweis : Ist λ kein Eigenwert von f und $\lambda \neq 0$, so ist

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad = \quad \{0\} \quad ,$$

also nach Satz 69.16 :

$$H \quad = \quad R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad .$$

Wir zeigen zunächst, dass auch

(1) $H \quad = \quad R(f - \lambda\,\mathrm{id})$ gilt, durch Widerspruch:

Angenommen, $H \neq R(f - \lambda\,\mathrm{id})$, dann ist nach Satz 69.16
$$\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \neq \{0\} \quad ,$$
also $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von f^*, es gibt also ein $x_0 \in H$ mit
$$(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \|x_0\| > 0 \quad .$$
Da $R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = H$ ist, gibt es dazu ein $x_1 \in H$ mit
$$(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(x_1) = x_0 \quad ,$$
man kann rekursiv eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit
$$(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(x_{j+1}) = x_j \quad \text{für} \quad j \in \mathbb{N}_0$$
konstruieren. Dafür ist
$$(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j(x_j) = x_0 \quad \text{und}$$
$$(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{j+1}(x_j) = 0 \quad , \qquad \text{also}$$
$$\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j \ \overset{\subset}{\neq} \ \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{j+1} \quad .$$
Also ist $\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j$ ein echter, wegen der Stetigkeit von $f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$ auch abgeschlossener, Untervektorraum von $\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{j+1}$. Man zerlegt $\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{j+1}$ nun in eine orthogonale Summe

$$\mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{j+1} = \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j \ \bigoplus\!\!\!\!\!\!\perp \ M_j$$

mit einem abgeschlossenen Untervektorraum $M_j \neq \{0\}$. Wir wählen uns nun eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_j \in M_j \quad \text{und} \quad \|y_j\| = 1 \quad .$$

Diese Folge ist beschränkt. Für $j > k$ gilt

$$\|f^*(y_j) - f^*(y_k)\| = \|\overline{\lambda}y_j + (f^*(y_j) - \overline{\lambda}y_j - f^*(y_k))\| \quad ,$$

mit $\overline{\lambda}y_j \in M_j$ und

$$f^*(y_j) - \overline{\lambda} y_j - f^*(y_k) \;=\; \underbrace{\underbrace{(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y_j)}_{\in\ \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j} - \underbrace{(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y_k)}_{\in\ \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^k} - \underbrace{\overline{\lambda} y_k}_{\in\ \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^{k+1}}}_{\subset\ \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id})^j} \quad , \quad \text{also}$$

$$< \overline{\lambda} y_j \quad , \quad f^*(y_j) - \overline{\lambda} y_j - f^*(y_k) > = 0 \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned} \|f^*(y_j) - f^*(y_k)\|^2 \;&=\; \|\overline{\lambda} y_j\|^2 + \|f^*(y_j) - \overline{\lambda} y_j - f^*(y_k)\|^2 \\ &\geq\; |\lambda|^2 \, \|y_j\|^2 \;=\; |\lambda|^2 \quad . \end{aligned}$$

Die Folge $(f^*(y_j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ enthält also keine konvergente Teilfolge. f^* ist also nicht kompakt, also nach Satz 69.13 b) auch f nicht kompakt, Widerspruch zur Voraussetzung, also gilt (1) .

(1) besagt, dass $f - \lambda\,\mathrm{id}$ surjektiv ist, und injektiv ist es, da λ kein Eigenwert von f ist. Also existiert die Umkehrfunktion $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$, von der wir nach der (nicht bewiesenen) Folgerung 68.49 dann auch wissen:
$(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} \in L(H)$. Man kann hier die Stetigkeit von $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ auch direkt zeigen: Wir haben beim Beweis von Satz 69.16 unter 1.) gezeigt: Es gibt ein $c \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x)\| \;\geq\; c \cdot \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad ,$$

wegen $R(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \;=\; H$ also für alle $x \in H$. Also gilt für alle $y \in H$:

$$\|(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(y)\| \;\leq\; \frac{1}{c}\,\|y\| \quad ,$$

womit nach Satz 32.17 die Stetigkeit von $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ gezeigt ist. Also ist $\lambda \in M_f$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass 0 stets zum Spektrum gehört : Angenommen, 0 gehört zur Resolventenmenge M_f, dann wäre mit f auch

$$f^{-1} \;=\; (f - 0\ \mathrm{id})^{-1} \in L(H)$$

und damit

$$\mathrm{id} \;=\; f^{-1} \circ f \quad \text{kompakt,}$$

denn da f kompakt ist, kann man aus jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ auswählen, so dass $(f(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ in H konvergiert, und wegen der Stetigkeit von f^{-1} konvergiert dann auch $((f^{-1} \circ f)(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$, also ist id kompakt. Wie wir im Beweis von Satz 69.8, Teil 2), gesehen haben, ist das wegen $\dim_{\mathbb{C}} H \;=\; \infty$ falsch.

(b) 1) Wir zeigen zunächst den 2.Teil von (b), also dass es keine Folge

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ in } S_f \quad \text{mit} \quad \lambda_j \neq \lambda_k \quad \text{für} \quad k \neq j \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \neq 0$$

gibt, durch Widerspruch: Angenommen, es gibt doch so eine Folge, dann sind fast alle $\lambda_n \neq 0$, nach (a) also Eigenwerte von f, es gibt also Eigenvektoren $x_n \neq 0$ dazu. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine linear unabhängige Familie, denn sonst gäbe es eine linear abhängige endliche Teilfamilie

$$(x_n)_{n\in\{0\}\cup\underline{m}} \quad \text{mit minimalem} \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad \text{also} \quad c_0,\ldots,c_m \in \mathbb{C} \quad \text{mit}$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n x_n \;=\; 0 \quad \text{und} \quad c_m \neq 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \lambda_m x_n \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{m} c_n f(x_n) \;=\; 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\sum_{n=0}^{m} c_n \lambda_n x_n \;=\; 0 \quad \text{und damit} \quad \sum_{n=0}^{m} c_n(\lambda_m - \lambda_n) x_n \;=\; 0 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_n(\lambda_m - \lambda_n) x_n \;=\; 0 \quad ,$$

wegen der Minimalität von m also $c_0,\ldots,c_{m-1} \;=\; 0$, damit aber

$$c_m x_m \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad c_m \neq 0 \quad ,$$

was falsch ist. Also ist

$$V \quad := \quad \operatorname{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

unendlichdimensional. Mit Hilfe des beim Beweis von Satz 68.29 verwendeten Orthonormalisierungsverfahrens konstruieren wir uns in V ein Orthonormalsystem

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \text{mit} \quad y_n \;=\; \sum_{j=0}^{n} \alpha_{nj} x_j \quad , \quad \alpha_{nj} \in \mathbb{C} \quad ,$$

$$< y_j \,,\, y_k >= \delta_{jk} \quad , \quad \text{insbesondere} \quad \|y_j\| \;=\; 1 \quad .$$

Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also beschränkt, und da f kompakt ist, enthält $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt für $j > l$:

$$f(y_j) - f(y_l) \;=\; \lambda_j\,\alpha_{jj}\,x_j \;+\; \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k\,\alpha_{jk}\,x_k \;-\; \sum_{k=0}^{l} \lambda_k\,\alpha_{lk}\,x_k \quad .$$

Nach Konstruktion des Orthonormalsystems $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kann man x_n wieder als Linearkombination von $y_0,\ldots,y_n$ erhalten, es gibt also

$$\gamma_{jlk} \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(y_j) - f(y_l) \;=\; \lambda_j y_j + \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{jlk} y_k$$

und wegen der Orthogonalität von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ folgt

$$\|f(y_j) - f(y_k)\|^2 \;\geq\; |\lambda_j|^2 \cdot \|y_j\|^2 \;=\; |\lambda_j|^2$$

und wegen $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j \;=\; \lambda \neq 0$ gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass für $j > l \geq j_0$ gilt

$$\|f(y_j) - f(y_l)\|^2 \;\geq\; |\lambda_j|^2 \;>\; \frac{|\lambda|^2}{2} \quad .$$

Damit enthält $(f(y_j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ aber keine konvergente Teilfolge, Widerspruch.

Damit ist der erste Teil von (b) bewiesen, aber auch der zweite: Sei $\lambda \in S_f$, $\lambda \neq 0$, dann gibt es keine Folge in $S_f \backslash \{\lambda\}$, die gegen λ konvergiert, also eine offene Kugel

$$K_{r_\lambda}(\lambda) \quad \text{mit} \quad K_{r_\lambda}(\lambda) \cap S_f \;=\; \{\lambda\} \quad ,$$

und in $K_{\frac{r_\lambda}{2}}(\lambda)$ sicher eine Zahl aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Ordnen wir diese Zahl dem Spektralwert $\lambda \in S_f \setminus \{0\}$ als "Index" zu, so haben wir höchstens abzählbar viele "Indizes", und damit ist S_f abzählbar.

(c) Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert, dann ist auch die Restriktion

$$f\big|_{\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})} \quad \text{kompakt, aber}$$

$$f\big|_{\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})} \quad = \quad \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id})} \quad ,$$

was nach dem Beweis von Satz 69.8, Teil 2), nur geht, wenn

$$\dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;<\; \infty \quad \text{ist.}$$ □

Man kann noch etwas mehr als in (c) und (d) beweisen :

Satz 69.18 (T 119) : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$ kompakt. Dann gilt für alle $\lambda \in S_f \setminus \{0\}$:

$$\dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad = \quad \dim \mathrm{Ker}\,(f^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \quad < \quad \infty \quad .$$ □

Zum Schluss dieses Paragraphen vielleicht noch ein Beispiel für einen kompakten Operator :

Beispiel 69.19 (T 75) : Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und

$$k \in \mathcal{L}^2(\Omega \times \Omega) \quad .$$

Dann gehört der durch

$$(K\,f)(x) \quad := \quad \int\limits_\Omega k(x,y)\, f(y) \mathrm{d}^n y \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

definierte Operator K zu $\mathrm{L}^2(\Omega))$. K ist ein kompakter Operator. □

Wir könnten hier aufhören, wenn die in der Physik vorkommenden Operatoren alle kompakt wären. Da sie zum Teil ein “kontinuierliches Spektrum” haben, ist das sicher nicht so.

§ 70 Der Spektralsatz für symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

Definition 70.1 : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$. f heißt ein **symmetrischer Operator** auf H, wenn

$$\forall\, x,y \in H \;:\; < x, f(y) > = < f(x), y > \quad \text{gilt.}$$

Folgerung 70.2 : Gemäß Definition 68.41 ist für einen symmetrischen Operator $f \in L(H)$:

$$f^* \;=\; f \quad . \qquad \square$$

Das Spektrum S_f von $f \in L(H)$ hatten wir schon in 68.45 definiert, und davor auch schon bemerkt, dass es für ein $\lambda \in S_f$ zwei Möglichkeiten gibt: $f-\lambda\,\mathrm{id}$ ist nicht injektiv, oder $f-\lambda\,\mathrm{id}$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv:

Definition 70.3 : Sei V ein Banachraum über $\mathbb{C}$, W ein Untervektorraum von V. Sei $f \in L(W,V)$. Dann nennen wir

$$SP_f := \{\ \lambda \in \mathbb{C} \ \big|\ \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_W) \neq \{0\}\ \}$$

das **Punktspektrum** von f und

$$SC_f := \{\ \lambda \in \mathbb{C} \ \big|\ \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_W) = \{0\} \wedge (f - \lambda\,\mathrm{id}_W)(W) \neq V\ \}$$

das **kontinuierliche Spektrum** von f.

Folgerung 70.4 : Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$. Dann gilt:

a) $S_f = SP_f \cup SC_f \quad , \quad SP_f \cap SC_f = \emptyset \quad .$

b) Ist f ein symmetrischer Operator, so ist $S_f \subset \mathbb{R}$, und

$$SC_f = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \{0\} \wedge \overline{(f - \lambda\,\mathrm{id})(H)} = H \wedge (f - \lambda\,\mathrm{id})(H) \neq H \,\}\,.$$

Beweis : a) ist klar nach Definition von S_f, SP_f und SC_f.

b_1) Zu $\lambda \in SP_f$ gibt es ein $x \in H$, $x \neq 0$, mit

$$f(x) = \lambda x \quad , \qquad \text{also} \quad < x, f(x) > = < x, \lambda x > = \lambda\,\|x\|^2 \quad ,$$

$$\lambda = \frac{1}{\|x\|^2} < x, f(x) > = \frac{1}{\|x\|^2}\overline{< f(x), x >} = \frac{1}{\|x\|^2}\overline{< x, f(x) >} = \overline{\lambda} \quad ,$$

also $\lambda \in \mathbb{R}$.

b_2) Sei $\lambda \in SC_f$. Angenommen, $\overline{(f - \lambda\,\mathrm{id})(H)} \subsetneq H$, dann haben wir nach Satz 68.33 den orthogonalen Untervektorraum

$$\overline{(f-\lambda\,\mathrm{id})(H)}^{\perp} \neq \{0\} \quad ,$$

und darin ein Element y mit $\|y\| = 1$. Für $x \in H$ gilt also

$$< (f-\lambda\,\mathrm{id})(x), y >= 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$0 = < f(x), y > - < \lambda x, y > = < f(x), y > - < x, \overline{\lambda} y >$$
$$= < x, (f-\overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y) > \quad , \quad \text{insbesondere also}$$
$$(f-\overline{\lambda}\,\mathrm{id})(y) = 0 \quad , \quad f(y) = \overline{\lambda} y \quad , \quad \text{und wie in } b_1) :$$
$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\|x\|^2} < y, f(y) > = \lambda \quad , \qquad \text{also} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

$(f-\lambda\,\mathrm{id})(y) = 0\,, y \neq 0$, also $\lambda \in SP_f$, Widerspruch, also ist $\overline{(f-\lambda\,\mathrm{id})(H)} = H$.
Angenommen, es ist $\lambda \notin \mathbb{R}$, also $\overline{\lambda} \neq \lambda$, dann ist für $x \in H$, $x \neq 0$:

$$0 < |\lambda - \overline{\lambda}|\,\|x\|^2 = |(\lambda - \overline{\lambda}) < x, x > |$$

$$= | < x, (f-\lambda\,\mathrm{id})(x) > - < x, (f-\overline{\lambda}\,\mathrm{id})(x) > |$$

$$= | < x, (f-\lambda\,\mathrm{id})(x) > - < (f-\lambda\,\mathrm{id})(x), x > | \leq 2\|(f-\lambda\,\mathrm{id})(x)\|\,\|x\| \quad ,$$

also

(1) $$\|x\| \leq \frac{2}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \|(f-\lambda\,\mathrm{id})(x)\| \quad ,$$

für alle $x \in H$. Wir wissen nun bereits, dass

$$(f-\lambda\,\mathrm{id})^{-1} : (f-\lambda\,\mathrm{id})(H) \longrightarrow H$$

existiert, da $\lambda \notin SP_f$, und wegen (1) , dass diese Abbildung stetig ist:

$$\|(f-\lambda\,\mathrm{id})^{-1}(y)\| \leq \frac{2}{|\lambda - \overline{\lambda}|} \|y\| \quad \text{für alle} \quad y \in (f-\lambda\,\mathrm{id})(H)\,,$$

und dass $\overline{(f-\lambda\,\mathrm{id})(H)} = H$ ist; zu $y \in H$ gibt es also eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $y_n \in (f-\lambda\,\mathrm{id})(H)$. Für $x_n := (f-\lambda\,\mathrm{id})^{-1}(y_n)$ gilt nach (1)

$$\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\| \quad \text{für alle} \quad n, m \in \mathbb{N} \quad ,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHYfolge in H. Es existiert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,

$$f(x_n) = (f-\lambda\,\mathrm{id})(x_n) + \lambda x_n = y_n + \lambda x_n \quad , \qquad \text{also}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y + \lambda x \quad , \quad \text{andererseits wegen} \quad f \in L(H) :$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad , \qquad \text{also} \quad f(x) = y + \lambda x \quad ,$$

$$y = (f - \lambda\,\mathrm{id})(x) \in (f - \lambda\,\mathrm{id})(H) \quad .$$

Also haben wir eine stetige Inverse $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} : \ H \longrightarrow H \quad , \quad \lambda \in M_f$, Widerspruch zu $\lambda \in SC_f$. □

Wir werden die Aussage " $S_f \subset \mathbb{R}$ " noch präzisieren. Zunächst:

Definition 70.5 : Für einen symmetrischen Operator $f \in L(H)$ definieren wir

$$f \geq 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in H : < f(x), x > \ \geq \ 0 \quad .$$ □

Man beachte dabei, dass für $x \in H$ gilt

$$< f(x), x > \quad = \quad \overline{< x, f(x) >} \quad = \quad \overline{< f(x), x >} \quad ,$$

also gilt $< f(x), x > \in \mathbb{R}$ sowieso.

Satz 70.6 (Verallgemeinerte Schwarzsche Ungleichung) :
Ist $f \in L(H)$ symmetrisch und $f \geq 0$, so gilt

$$\forall\, x, y \in H : \ | < f(x), y > |^2 \ \leq < f(x), x > \cdot < f(y), y > \quad .$$

Beweis : $s \ : \ H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, $s(x,y) \ := < f(x), y >$ ist eine positiv semidefinite Hermitesche Form, und dafür gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Satz 21.2.1). □

Satz 70.7 : Seien $f, g \in L(H)$, und es gelte

$$\forall\, x \in H : < f(x), x > = < g(x), x > \quad ,$$

dann ist $f = g$.

Beweis : Für $x, y \in H$ ist

$$4 < f(y), x > = < f(x+y), x+y > - < f(x-y), x-y >$$

$$+ i < f(x+iy), x+iy > - i < f(x-iy), x-iy > \ .$$

Damit folgt nach der Voraussetzung

$$4 < f(y), x > = 4 < g(y), x > \qquad \text{für alle} \quad x, y \in H \quad , \quad \text{also}$$

$$< (f-g)(y), x > = 0 \quad ,$$

insbesondere für $x := (f-g)(y)$, also

$$\|(f-g)(y)\|^2 = 0 \qquad \text{für alle} \quad y \in H \quad , \qquad \text{also}$$

$$f \quad = \quad g \quad .$$ □

Satz 70.8 : Ist $f \in L(H)$ symmetrisch, so ist

$$\|f\| \quad = \quad \sup\{\ |< f(x), x >|\ \big|\ \|x\| = 1\ \} \quad .$$

Beweis : Sei $\nu := \sup\{\ |< f(x), x >|\ \big|\ x \in H \quad \text{mit} \quad \|x\| = 1\ \}$, dann gilt nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$:

$$|< f(x), x >| \ \leq\ \|f(x)\| \cdot \|x\| \ \leq\ \|f\| \cdot \|x\|^2 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\nu \ \leq\ \|f\| \quad .$$

Umgekehrt gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in H$ mit $\|x\| = 1$:

$$\begin{aligned} 4\|f(x)\|^2 \quad &= \quad < f(\lambda x + \frac{1}{\lambda} f(x)), \lambda x + \frac{1}{\lambda} f(x) > \\ &= \quad - < f(\lambda x - \frac{1}{\lambda} f(x)), \lambda x - \frac{1}{\lambda} f(x) > \\ &\leq \ \nu \cdot (\|\lambda x + \frac{1}{\lambda} f(x)\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda} f(x)\|^2) \\ &= \quad 2\nu(\lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\, \|f(x)\|^2) \quad , \end{aligned}$$

letzteres nach der Parallelogrammgleichung 21.2.4 b) (sie besagte: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 \ =\ 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ für $v, w \in H$) .

Für $f(x) \neq 0$ setzen wir $\lambda := \sqrt{\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}}$, dann wird

$$4\,\|f(x)\|^2 \ \leq\ 2\nu \cdot 2\|x\|\,\|f(x)\| \quad ,$$

$$\|f(x)\| \ \leq\ \nu \cdot \|x\| \quad .$$

Das gilt sicher auch für $x = 0$, also

$$\|f\| \ \leq\ \nu \quad ,$$

insgesamt also $\|f\| \ =\ \nu \ =\ \sup\{\ |< f(x), x >|\ \big|\ \|x\| = 1\ \}$. □

Definition 70.9 : Seien $f, g \in L(H)$ symmetrisch, dann definieren wir

$$f \ \leq\ g \quad :\Longleftrightarrow \quad g - f \ \geq\ 0 \quad .$$

Folgerung 70.10 : Seien $f, g, h \in L(H)$ symmetrisch, dann gilt

(1) $f \ \leq\ f$,

(2) $(f \ \leq\ g \wedge g \ \leq\ f) \quad \Longrightarrow \quad f = g$,

(3) $(f \ \leq\ g \wedge g \ \leq\ h) \quad \Longrightarrow \quad f \ \leq\ h$,

(4) $f \ \leq\ g \quad \Longrightarrow \quad f + h \ \leq\ g + h$. Zum **Beweis** von (2) braucht man Satz 70.7, der Rest ist klar. □

Wegen dieser Anordnung ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 70.11 : Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge symmetrischer Operatoren aus

$L(H)$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

a) **monoton wachsend (fallend)** , falls für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gilt

$$f_n \leq f_m \qquad (f_n \geq f_m) \quad ,$$

b) **nach oben (unten) beschränkt** , falls es ein symmetrisches $g \in L(H)$ gibt mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \ f_n \leq g \qquad (\, f_n \geq g\,) \quad ,$$

c) **beschränkt** , falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben und unten beschränkt ist. □

Analog zu dem entsprechenden Satz für reelle Zahlen gilt

Satz 70.12 : Jede monotone und beschränkte Folge symmetrischer Operatoren aus $L(H)$ konvergiert punktweise gegen einen symmetrischen Operator aus $L(H)$.

Beweis für eine monoton wachsende Folge: Sei

$$f_0 \leq f_1 \leq \ldots \leq g \quad ,$$

dann folgt mit Satz 70.8 :

$$\|f_n - f_m\| \quad = \quad \sup\{ \ < f_n(x) - f_m(x), x > \ \big| \ \|x\| \leq 1 \ \}$$

$$\leq \ \sup\{ \ < g(x), x > - < f_0(x), x > \ \big| \ \|x\| \leq 1 \ \} \ =: \alpha \,,$$

und mit Satz 70.6 (mit $y := (f_n - f_m)(x)$) :

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|^4 = < f_n(x) - f_m(x), f_n(x) - f_m(x) >^2$$

$$\leq \ < (f_n - f_m)(x), x > \cdot < (f_n - f_m)^2(x), (f_n - f_m)(x) >$$

$$\leq \ (< f_n(x), x > - < f_m(x), x >) \cdot \alpha^3 \, \|x\|^2 \quad .$$

Für jedes $x \in H$ ist die Folge $(< f_n(x), x >)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Die gerade ausgerechnete Abschätzung zeigt nun, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHYfolge in H ist. Sie konvergiert in H . Sei

$$f(x) \quad := \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad ,$$

dann ist auch $f \in L(H)$ und symmetrisch . □

Nach Folgerung 70.10 (4) darf man zu einer Ungleichung $f \leq g$ von symmetrischen Operatoren addieren. Darf man Ungleichungen auch mit einem positiven Operator multiplizieren ? Dazu

Satz 70.13 : Sind $f, g \in L(H)$, f und $f \circ g$ symmetrisch und $f \geq 0$, so gilt

$$\forall\, x \in H : \ | < (f \circ g)(x), x > | \ \leq \ \|g\| \cdot < f(x), x > \quad .$$

Beweis : Nach Satz 70.6 gilt für $x, y \in H$:

$$| < f(x), y > | \quad \leq \quad \sqrt{< f(x), x > \cdot < f(y), y >} \quad ,$$

und da das geometrische Mittel kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittel ist :

$$(*) \qquad | < f(x), y > | \quad \leq \quad \frac{1}{2}(< f(x), x > + < f(y), y >) \quad .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} &< (f \circ g^n)(x), y > = < g^{n-1}(x), (f \circ g)(y) > \\ &= \; | < (f \circ g^{n-1})(x), g(y) > = < g^{n-2}(x), (f \circ g^2)(y) > \\ &= \; \ldots \; = < x, (f \circ g^n)(y) > \quad , \end{aligned}$$

also ist $f \circ g^n$ symmetrisch , für $n \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt aus $(*)$ die Abschätzung

$$| < (f \circ g^n)(x), x > | \; = \; | < x, (f \circ g^n)(x) > | \; = \; | < f(x), g^n(x) > |$$

$$\begin{aligned} &\leq \; \frac{1}{2}(< f(x), x > + < (f \circ g^n)(x), g^n(x) >) \\ &= \; \frac{1}{2}(< f(x), x > + < x, (f \circ g^{2n})(x) >) \quad . \end{aligned}$$

Durch Induktion nach n erhält man daraus

$$(**) \; < (f \circ g)(x), x > \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right) < f(x), x > + \frac{1}{2^n} < (f \circ g^{2^n})(x), x > \; .$$

Ist $\|g\| = 1$, so konvergiert wegen

$$| < (f \circ g^{2^n})(x), x > | \quad \leq \quad \|f\| \, \|x\|^2$$

der letzte Summand in $(**)$ gegen 0 . Für $n \to \infty$ folgt also

$$| < (f \circ g)(x), x > | \quad \leq \; < f(x), x > \quad .$$

Aus diesem Spezialfall folgt die Behauptung des Satzes, indem man g durch $\frac{g}{\|g\|}$ ersetzt. □

Satz 70.14 : Sind $f, g, h \in L(H)$ symmetrisch, und gilt

$$f \; \leq \; g \quad , \quad h \; \geq \; 0 \quad \text{und} \quad f \circ h = h \circ f \quad , \quad g \circ h = h \circ g \quad ,$$

ist also h mit f und g vertauschbar, so ist

$$f \circ h \; \leq \; g \circ h \quad .$$

Insbesondere gilt: $f \; \geq \; 0 \; \wedge \; h \; \geq \; 0 \; \wedge \; f \circ h = h \circ f \Longrightarrow f \circ h \; \geq \; 0$.

Beweis : Wir zeigen zunächst den letzten Spezialfall: Es gibt ein $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$(1) \qquad \beta h \; \leq \; \mathrm{id} \quad ,$$

denn angenommen, $\forall \beta \in \mathbb{R}_+^* \, \exists x \in H \, : \, < x - \beta\, h(x), x > \, < \, 0$, dann gibt es ein x mit $\|x\| = 1$ und

$$1 - \beta < h(x), x > \, < \, 0 \quad , \quad \frac{1}{\beta} \, < \, < h(x), x > \quad ,$$

wobei $\dfrac{1}{\beta}$ beliebig groß sein kann. Es gilt aber $< h(x), x > \, \leq \, \|h\|$ nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung. Also gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ mit (1); dafür ist auch $\beta\, h \, \geq \, 0$, also

$$0 \;\leq\; \mathrm{id} - \beta\, h \;\leq\; \mathrm{id} \quad .$$

Nach Satz 70.8 ist dann

$$\|\,\mathrm{id} - \beta\, h\| \,=\, \sup\{\; |\underbrace{< (\,\mathrm{id} - \beta\, h)(x), x >}_{\geq\; 0 \quad \text{und} \qquad \leq\; < x, x >}| \;\big|\; \|x\| \,=\, 1 \;\} \;\leq\; 1 \quad ,$$

und da f mit $\mathrm{id} - \beta\, h$ vertauschbar, also $f \circ (\,\mathrm{id} - \beta\, h)$ symmetrisch ist, folgt aus Satz 70.13 :

$$< (f \circ (\,\mathrm{id} - \beta\, h))(x), x > \;\leq\; < f(x), x > \quad , \qquad \text{also}$$

$$f - \beta\, f \circ h \;\leq\; f \quad \text{und damit} \quad f \circ h \;\geq\; 0 \quad .$$

2) Die allgemeine Aussage folgt aus diesem Spezialfall, indem man f durch $g - f \;\geq\; 0$ ersetzt. □

<u>Definition und Satz 70.15 :</u> Sei H ein Hilbertraum und $f \in L(H)$ symmetrisch. Für $x \in H$ ist dann

$$< f(x), x > \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{und wir setzen}$$

$$m(f) \;:=\; \inf\{\; < f(x), x > \;\big|\; x \in H \,\wedge\, \|x\| \,=\, 1 \;\} \quad ,$$
$$M(f) \;:=\; \sup\{\; < f(x), x > \;\big|\; x \in H \,\wedge\, \|x\| \,=\, 1 \;\} \quad .$$

Dann gilt

$$\|f\| \quad = \quad \max\{\, |m(f)|\, ,\, |M(f)|\,\} \quad ,$$

also $m(f)\, ,\, M(f) \,\in\, \mathbb{R}$.

<u>Beweis :</u> Nach Satz 70.8 ist

$$\|f\| \,=\, \sup\{\; |< f(x), x >| \;\big|\; x \in H \quad \text{mit} \quad \|x\| \,=\, 1 \;\} \quad ,$$

also $\|f\| \,=\, \max\{|m(f)|\, ,\, |M(f)|\}$. □

<u>Satz 70.16 :</u> Ist $f \in L(H)$ symmetrisch , so gilt

$$S_f \subset [\, m(f); M(f)\,] \quad \text{und} \quad m(f), M(f) \in S_f \quad .$$

<u>Beweis :</u> Nach Folgerung 70.4 b) ist $S_f \subset \mathbb{R}$.

1.) Ist $m(f) \,>\, 0$, so ist $0 \in M_f$, denn angenommen, es ist

$$0 \,\in\, S_f \quad , \quad \text{dann ist entweder}$$

a) $0 \in SP_f$, also 0 ein Eigenwert von f, also existiert ein $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ und $f(x) = 0 \cdot x = 0$,

$< f(x), x > = < 0, x > = 0$, Widerspruch zu $< f(x), x > \geq m(f) > 0$,

oder
b) $0 \in SC_f$. Nach Folgerung 70.4 wissen wir dann

$$f(H) \underset{\neq}{\subset} H \quad , \quad \text{aber} \quad \overline{f(H)} = H \quad ,$$

und wir zeigen :
$(*)$ Es gibt kein $c \in \mathbb{R}_+^*$, so dass für alle $y \in f(H)$ gilt:

$$\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y) \leq c\|y\| \quad ,$$

wobei $\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}$ die wegen $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ existierende Umkehrfunktion

$$\frac{f^j}{\lambda^{j+1}} : f(H) \longrightarrow H \quad \text{ist :}$$

Angenommen, $(*)$ ist falsch, es gibt so ein c. Wegen $\overline{f(H)} = H$ gibt es zu jedem $z \in H$ eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(H)$ mit

$$z = \lim_{n\to\infty} y_n \quad . \quad \text{Dann gilt für } n, m \in \mathbb{N} :$$

$$\|\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n) - \frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_m)\| \leq c\,\|y_n - y_m\| \quad ,$$

also ist $(\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHYfolge in H, es existiert

$w := \lim_{n\to\infty} \frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)$, und dafür gilt wegen der Stetigkeit von f:

$$f(w) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = z \quad ,$$

also $z \in f(H)$, $H = f(H)$, Widerspruch, also gilt $(*)$.
Wegen $(*)$ gibt es nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in f(H)$ mit

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \|\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)\| > n \quad .$$

Für $x := \dfrac{\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)}{\|\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)\|}$ gilt dann $\|x_n\| = 1$ und

$$\|f(x_n)\| = \frac{1}{\|\frac{f^j}{\lambda^{j+1}}(y_n)\|}\|y_n\| < \frac{1}{n} \quad , \quad \text{also} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \quad ,$$

$$0 \leq |< f(x_n), x_n >| \leq \|f(x_n)\| \cdot \|x_n\| < \frac{1}{n} \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty} < f(x_n), x_n > = 0 \quad ,$$

Widerspruch zu $< f(x_n), x_n > \; \geq \; m(f) \; > \; 0$.
Also ist $0 \in M_f$.
2.) Sei $\lambda \notin [\, m(f); M(f)\,]$, also
$\lambda \; < \; m(f)$, dann ist

$$m(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;=\; \inf\{\; < f(x) - \lambda x, x > \;\big|\; \|x\| \;=\; 1 \;\}$$

$$= m(f) - \lambda \quad > \quad 0 \quad ,$$

also nach 1.) , angewendet auf $f - \lambda\,\mathrm{id}$:

$$0 \in M_{f \,-\, \lambda\,\mathrm{id}} \quad , \qquad \text{also} \quad \lambda \notin S_f \quad , \qquad \text{oder}$$

$\lambda \; > \; M(f)$, dann ist

$$m(\lambda\,\mathrm{id} - f) \;=\; \inf\{\; < \lambda x - f(x), x > \;\big|\; \|x\| \;=\; 1 \;\}$$

$$= \lambda - M(f) \quad > \quad 0 \quad , \quad \text{und nach 1.):}$$

$$0 \in M_{\lambda\,\mathrm{id} \,-\, f} \quad , \qquad \text{also} \quad \lambda \notin S_f \quad .$$

Also ist $S_f \;\subset [\, m(f); M(f)\,]$.
3.) Sei $\lambda := m(f)$, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| \;=\; 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \; < f(x_n), x_n > = m(f) \;=\; \lambda$, nach Definition von $m(f)$. Dann ist

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \; < f(x_n) - \lambda x_n, x_n > = \lim_{n\to\infty} \; < f(x_n), x_n > - \lambda \lim_{n\to\infty} \; \|x_n\|^2$$

$$= \lambda - \lambda \;=\; 0 \quad ,$$

und für alle $x \in H$ mit $\|x\| \;=\; 1$:

$$< f(x) - \lambda x, x > \; \geq \; 0 \quad ,$$

das gilt dann für alle $x \in H$, und nach Definition 70.5 :

$$f - \lambda\,\mathrm{id} \;\; \geq \;\; 0 \quad .$$

Nach Satz 70.6 gilt dann für alle $x, z \in H$:

$$| < (f - \lambda\,\mathrm{id})(x), z > |^2 \;\; \leq \; < (f - \lambda\,\mathrm{id})(x), x > \cdot < (f - \lambda\,\mathrm{id})(z), z > \quad ,$$

speziell für $z := (f - \lambda\,\mathrm{id})(x)$, also

$$\|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x)\|^4 \;\; \leq \; < (f - \lambda\,\mathrm{id})(x), x > \cdot < (f - \lambda\,\mathrm{id})^2(x), (f - \lambda\,\mathrm{id})(x) >$$

$$\leq \; < (f - \lambda\,\mathrm{id})(x), x > \cdot \|f - \lambda\,\mathrm{id}\|^3 \, \|x\|^2 \quad ,$$

und aus $(*)$ folgt für unsere Folge (x_n) :

$$\lim_{n\to\infty} \; \|(f - \lambda\,\mathrm{id})(x_n)\|^4 \;=\; 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\lim_{n\to\infty} \; (f - \lambda\,\mathrm{id})(x_n) \;=\; 0 \quad .$$

Angenommen, es wäre $\lambda \in M_f$, dann hätten wir eine stetige Inverse

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} \; : \;\; H \;\; \longrightarrow \;\; H \quad , \quad \text{und es würde folgen}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(0) = 0 \quad , \quad \text{Widerspruch zu} \quad \|x_n\| = 1 \quad .$$

Also ist $\lambda \in S_f$. Entsprechendes zeigt man für $\lambda := M(f)$. $\square$

Bemerkung 70.17 : Bereits in Definition 68.43 haben wir Projektoren eingeführt und in Satz 68.44 bewiesen: Ein $p \in L(H)$ ist genau dann ein Projektor, wenn

$$p^* = p \quad \text{und} \quad p^2 = p$$

ist. Es wird sich zeigen, dass die Projektoren die "einfachsten" symmetrischen Operatoren aus $L(H)$ sind. Nach Satz 68.44 ist

$$H_1 \quad := \quad p(H)$$

stets ein **abgeschlossener** Untervektorraum von H.
- Eine leichte Übungsaufgabe ist der

Satz 70.18 : Sei H ein Hilbertraum, p ein Projektor von H und $U := p(H)$. Dann gilt für jedes $f \in L(H)$:

a) $f(U) \subset U \iff f \circ p = p \circ f \circ p$,

b) $f(U) \subset U \;\wedge\; f(U^\perp) \subset U^\perp \iff f \circ p = p \circ f$. $\square$

Satz 70.19 : Seien p_1, p_2 Projektoren auf H,
$U_j := p_j(H)$ für $j \in \underline{2}$. Dann gilt :

a) Ist $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$, so ist $p_1 \circ p_2$ ein Projektor, und

$$(p_1 \circ p_2)(H) = U_1 \cap U_2 \quad .$$

b) Ist $p_1 \circ p_2 = 0$, so ist auch $p_2 \circ p_1 = 0$, U_1 und U_2 sind zueinander orthogonal und $p_1 + p_2$ ist der Projektor von H auf den abgeschlossenen Untervektorraum

$$U_1 \oplus U_2 := \{\, u_1 + u_2 \;\big|\; u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2 \,\} \quad .$$

Beweis : a) $(p_1 \circ p_2)^2 = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2$ und

$$(p_1 \circ p_2)^* = (p_2 \circ p_1)^* = p_1^* \circ p_2^* = p_1 \circ p_2 \quad ,$$

also ist $p_1 \circ p_2$ ein Projektor nach Satz 68.44. Es ist wegen

$$U_1 \quad = \quad \{\, x \in H \;\big|\; p_1(x) = x \,\} \; :$$

$$\begin{aligned}(p_1 \circ p_2)(H) &= \{\, x \in H \;\big|\; p_1(p_2(x)) = x \,\} \\ &= \{\, x \in H \;\big|\; p_2(p_1(x)) = x \,\} = U_1 \cap U_2 \quad .\end{aligned}$$

b) Es ist $p_2 \circ p_1 = p_2^* \circ p_1^* = (p_1 \circ p_2)^* = 0^* = 0$.
Nach Teil a) ist daher $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und für $x \in U_1$, $y \in U_2$:

$$< x, y > \quad = \quad < p_1(x), p_2(y) > \quad = \quad < x, (p_1 \circ p_2)(y) > \quad = \quad 0 ,$$

U_1 und U_2 sind also zueinander orthogonal, $U_1 \oplus U_2$ ist definiert, und man kann leicht zeigen, dass $U_1 \oplus U_2$ abgeschlossen ist. Es ist

$$(p_1 + p_2)^* = p_1^* + p_2^* = p_1 + p_2 \quad \text{und}$$

$$(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 + p_2^2 = p_1 + p_2 \quad ,$$

und für $z \in H$ ist

$$(p_1 + p_2)(z) = p_1(z) + p_2(z) \in U_1 \oplus U_2 \quad ;$$

umgekehrt gilt für $x \in U_1$, $y \in U_2$ wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$:

$$x + y = p_1(x) + p_2(y) = p_1(x+y) + p_2(x+y)$$
$$= (p_1 + p_2)(x+y) \in (p_1 + p_2)(H) \quad ,$$

also $(p_1 + p_2)(H) = U_1 \oplus U_2$. □

Bemerkung 70.20 : Sei p ein Projektor, dann gilt für $x \in H$:

$$< p(x), x > \;=\; < p^2(x), x > \;=\; < p(x), p(x) > \quad , \qquad \text{also}$$

$$0 \leq \; < p(x), x > \;=\; \|p(x)\|^2 \leq \|p\|^2 \cdot \|x\|^2 \;=\; \|p\|^2 < x, x >$$

und für $p \neq 0$ ist $\|p\| = 1$ nach 68.43 :

$$< x - p(x), x > \;=\; < x, x > - < p(x), x > \;\geq\; 0 \quad ,$$

also nach Definition 70.5 : $\mathrm{id} - p \geq 0$, also

$$0 \leq p \leq \mathrm{id} \quad .$$ □

Weitere Aussagen über die Anordnung stehen in

Satz 70.21 : Seien p_1, p_2 Projektoren auf H,

$$u_j \;:=\; p_j(H) \quad \text{für} \quad j \in \underline{2} \quad .$$

Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend :

(a) $p_1 \leq p_2$,

(b) $\forall\, x \in H : \; \|p_1(x)\| \leq \|p_2(x)\|$,

(c) $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = p_1$,

(d) $U_1 \subset U_2$,

(e) $p_2 - p_1$ ist ein Projektor .

Beweis : (a) $\Longrightarrow$ (b) : Für $x \in H$ gilt

$$\|p_1(x)\|^2 \;=\; < p_1(x), p_1(x) > \;=\; < p_1^2(x), x >$$

$$= \; < p_1(x), x > \overset{(a)}{\leq} \; < p_2(x), x > \;=\; \|p_2(x)\|^2 \quad .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Für $x \in H$ gilt

$$< p_1(x), p_1(x) > \ \leq \ < p_2(x), p_2(x) > \quad \text{und damit}$$

$$< p_1(x), x > \quad \leq \ < p_2(x), x > \quad , \qquad \text{also} \quad p_1 \ \leq \ p_2 \quad .$$

(a) $\Longrightarrow$ (c) : Aus $p_1 \ \leq \ p_2$ folgt $\mathrm{id} - p_2 \ \leq \ \mathrm{id} - p_1$, also

$$\|((\mathrm{id} - p_2) \circ p_1)(x)\|^2 \quad = \quad < (\mathrm{id} - p_2)(p_1(x)), (\mathrm{id} - p_2)(p_1(x)) >$$

$$= \quad < (\mathrm{id} - p_2)(p_1(x)), p_1(x) > \quad ,$$

denn auch $(\mathrm{id} - p_2)^2 \ = \ \mathrm{id} - p_2$ und $(\mathrm{id} - p_2)^* \ = \ \mathrm{id} - p_2$, also

$$\ldots \quad \leq \ < (\mathrm{id} - p_1)(p_1(x)), p_1(x) > \quad = \quad < 0, p_1(x) > \quad = \quad 0 \quad ,$$

also $(\mathrm{id} - p_2) \circ p_1 \ = \ 0$, $p_1 \ = \ p_2 \circ p_1$, und

$$p_1 \ = \ p_1^* \ = \ (p_2 \circ p_1)^* \ = \ p_1^* \circ p_2^* \ = \ p_1 \circ p_2 \quad .$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) : Für $y \in U_1$ ist

$$y \ = \ p_1(y) \ = \ (p_2 \circ p_1)(y) \ = \ p_2(y) \, , \quad \text{also} \quad y \in U_2 \quad .$$

(d) $\Longrightarrow$ (e) : Es ist $(p_2 - p_1)^* \ = \ p_2^* - p_1^* \ = \ p_2 - p_1$, und jedes $x \in H$ lässt sich eindeutig zerlegen in

$$x \ = \ x_2 + x'' \quad \text{mit} \quad x_2 \in U_2 \, , \, x'' \in U_2^{\perp} \quad .$$

Man kann x_2 zerlegen in

$$x_2 \ = \ x_1 + x' \quad \text{mit} \quad x_1 \in U_1 \, , \, x' \in U_1^{\perp} \quad , \qquad \text{also}$$

$$x \quad = \quad x_1 + x' + x'' \quad ,$$

$$p_1(x) \ = \ x_1 \quad , \quad (p_1 \circ p_2)(x) \ = \ p_1(x_1 + x') \ = \ x_1 \quad ,$$

$$(p_2 \circ p_1)(x) \ = \ p_2(x_1) \quad = \ x_1 \quad ,$$

$$\begin{aligned} (p_2 - p_1)^2(x) \quad &= \quad p_2(x) - (p_2 \circ p_1)(x) - (p_1 \circ p_2)(x) + p_1(x) \\ &= \quad p_2(x) - p_1(x) \quad , \end{aligned}$$

also $(p_2 - p_1)^2 \ = \ p_2 - p_1$.

(e) $\Longrightarrow$ (a) : Es ist

$$< (p_2 - p_1)(x), x > \quad = \quad < (p_2 - p_1)(x), (p_2 - p_1)(x) > \ \geq \ 0 \quad ,$$

also $p_2 \ \geq \ p_1$. $\square$

Wir brauchen noch zwei Hilfssätze für das Rechnen mit Ungleichungen zwischen Operatoren. Wir wissen aus Satz 70.14 :

$$f \;\geq\; 0 \quad\Longrightarrow\quad f^2 \;\geq\; 0 \quad ,$$

es liegt nahe, gleich Polynomfunktionen zu betrachten :

Hilfssatz 70.22 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch,

$$m := m(f) \quad , \quad M := M(f) \qquad \text{(siehe Definition 70.15).}$$

Seien p, q Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten. Gilt dann

$$\forall\, \lambda \in [\, m; M\,] : \; p(\lambda) \;\geq\; q(\lambda) \quad , \quad \text{so gilt}$$

$$p(f) \;\geq\; q(f) \quad .$$

Dabei ist unter $p(f)$ der Operator zu verstehen, den man durch Einsetzen von f in p erhält:

$$p(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j \quad\Longrightarrow\quad p(f) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f^j \quad .$$

Beweis : Es genügt, zu zeigen :

$$(*) \qquad\qquad \forall\, \lambda \in [\, m; M\,] : \; p(\lambda) \;\geq\; 0 \quad\Longrightarrow\quad p(f) \;\geq\; 0 \quad .$$

Um $(*)$ zu beweisen, zerlegen wir $p(x)$ in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren:

$$p(x) \quad=\quad \alpha \prod_{\nu=1}^{n} (x - \lambda_\nu) \quad ,$$

wobei die Faktoren mehrfach auftreten können. Für $\alpha = 0$ ist $(*)$ richtig. Sei also $\alpha \neq 0$. Dann bezeichnen wir mit

α_j die Nullstellen $\leq\; m$,
β_k die Nullstellen $\geq\; M$,
γ_l die Nullstellen in $(\, m; M\,)$,
$\delta_r \;=\; \zeta_r + i\eta_r$ die nicht-reellen Nullstellen von $p(x)$.

Dann ist mit δ_r auch $\overline{\delta_r}$ eine Nullstelle, und jedes γ_l hat gerade Vielfachheit, denn sonst würde $p(\lambda)$ bei $\lambda = \gamma_l$ das Vorzeichen wechseln; es ist aber $p(\lambda) \;\geq\; 0$ für $\lambda \in [\, m, M\,]$. Bei geeigneter Numerierung haben wir also

$(x - \gamma_l)(x - \gamma_{l+1}) \;=\; (x - \gamma_l)^2$ für $l \;=\; 1\,, 3\,, \ldots$,
$(x - \delta_r)(x - \overline{\delta_r}) \;=\; (x - \zeta_r)^2 + \eta_r^2$ für $r \;=\; 1\,, 3\,, \ldots$

und damit

$$p(\lambda) \;=\; \alpha' \cdot \prod_j (\lambda - \alpha_j) \prod_k (\beta_k - \lambda) \prod_{l \text{ ungerade}} (\lambda - \gamma_l)^2 \cdot \prod_{r \text{ ungerade}} ((\lambda - \zeta_r)^2 + \eta_r^2)$$

mit einem $\alpha' \;>\; 0$, also

$$p(f) \;=\; \alpha' \prod_j (f - \alpha_j \,\mathrm{id}) \circ \prod_k (\beta_k \,\mathrm{id} - f) \circ$$

$$\circ \prod_{l \text{ ungerade}} (f - \gamma_l \,\mathrm{id})^2 \circ \prod_{r \text{ ungerade}} ((f - \zeta_r \,\mathrm{id})^2 + \eta_r^2 \,\mathrm{id})\,.$$

$p(f)$ ist damit ein Produkt positiver, vertauschbarer Operatoren, also positiv nach Satz 70.14 . □

In diesem Hilfssatz kann man stetige Funktionen statt Polynomfunktionen nehmen, wegen des folgenden Satzes, und dann sogar Funktionen, die sich von oben durch stetige Funktionen annähern lassen:

Weierstraßscher Approximationssatz : Sei $[a;b]$ ein reelles Intervall und $\varphi \in \mathcal{C}[a;b]$. Dann gibt es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen p_k , die auf $[a;b]$ gleichmäßig gegen φ konvergiert.
Beweis : siehe etwa (K 313). □

Definition 70.23 : Seien $m, M \in \mathbb{R}$, $m < M$, dann bezeichnen wir mit K_1 die Menge aller Funktionen

$$\varphi : \; [\,m; M\,] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad ,$$

zu denen es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen

$$\varphi_n : \; [\,m; M\,] \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad \text{gibt mit}$$

$$\forall\,\lambda \in [\,m, M\,] : \; (\varphi_n(\lambda) \;\geq\; \varphi_{n+1}(\lambda) \;\geq\; 0 \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda) \;=\; \varphi(\lambda)\,) \quad .$$

Für Polynomfunktionen p_k , $\varphi = \lim\limits_{k\to\infty} p_k$ und symmetrisches $f \in L(H)$ kann man dann

$$\varphi(f) \quad := \quad \lim_{k\to\infty} p_k(f)$$

setzen, auch für $\varphi \in K_1$; man muss zeigen, dass $\varphi(f)$ eindeutig ist, also nicht von der Wahl der Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abhängt, die gegen φ konvergiert. Die erforderlichen Beweisschritte sind in (H 551) skizziert. Man erhält

Satz 70.24 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch , $m := m(f)$, $M := M(f)$, und K_1 wie in Definition 70.23. Dann gilt für $\varphi\,,\,\psi \in K_1$ und $\alpha \in \mathbb{R}\,,\,\alpha \;\geq\; 0$:

(a) $\forall\,\lambda \in [\,m; M\,] : \; \varphi(\lambda) \;\leq\; \psi(\lambda) \quad\Longrightarrow\quad \varphi(f) \;\leq\; \psi(f)$.

(b) $\alpha\varphi\,,\,\varphi + \psi$ und $\varphi \cdot \psi$ gehören zu K_1 , so dass

$$(\alpha\varphi)(f) \;=\; \alpha \cdot \varphi(f) \quad \text{und} \quad (\varphi \overset{+}{\cdot} \psi)(f) \;=\; \varphi(f) \overset{+}{\circ} \psi(f)$$

definiert sind.

(c) $\varphi(f)$ ist vertauschbar mit $\psi(f)$ und sogar mit jedem $g \in L(H)$, das mit f vertauschbar ist.

(d) Wird φ von oben durch stetige Funktionen φ_n approximiert, gilt also $\varphi_n \downarrow \varphi$, so ist auch $\varphi(f) \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(f)$.

Man macht das noch allgemeiner; man möchte auch Funktionen mit negativen Werten zulassen und erweitert daher die Menge K_1 zu K_2:

Definition und Satz 70.25 : Seien m, M und f wie in Satz 70.24 und

$$K_2 \quad := \quad \{ \varphi - \psi \mid \varphi, \psi \in K_1 \} \quad ,$$

dann ist

$$(\varphi - \psi)(f) \quad := \quad \varphi(f) - \psi(f)$$

eindeutig definiert. Es gilt

(a) $\mathcal{C}([m; M]) \subset K_2$.

(b) Für $\varphi, \psi \in K_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind

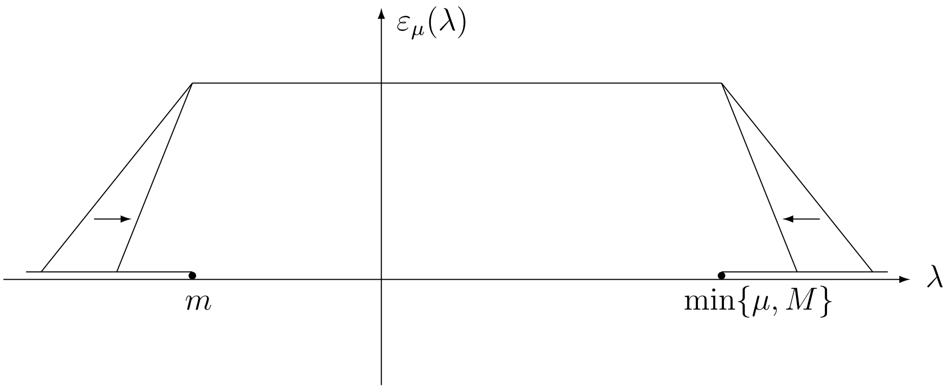
$$\varphi + \psi \, , \, \alpha \varphi \quad \text{und} \quad \varphi \cdot \psi \in K_2 \quad .$$

(c) Für φ, $\psi \in K_2$ ist $\varphi(f)$ vertauschbar mit $\psi(f)$ und sogar mit jedem $g \in L(H)$, das mit f vertauschbar ist.

Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ ist nun die Funktion

$$\varepsilon_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \varepsilon_\mu(\lambda) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{für } m \leq \lambda \leq \min\{\mu, M\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Element von K_1 :



Damit kann man die folgende, für das Weitere grundlegende, Definition verstehen:

Definition 70.26 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch,

$$m := m(f) \quad \text{und} \quad M := M(f) \quad .$$

Dann setzen wir für jedes reelle μ:

$$e_\mu \quad := \quad \varepsilon_\mu(f) \quad .$$

e_μ ist symmetrisch, da f symmetrisch ist, und $e_\mu^2 = e_\mu$, da $\varepsilon_\mu^2 = \varepsilon_\mu$ ist. Die e_μ sind also Projektoren. Die Familie $(e_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ heißt die **Spektralschar des Operators f** und erfüllt die folgenden Axiome:

(Sch 1) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist e_λ ein Projektor.

(Sch 2) $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ ist monoton wachsend: $e_\lambda \leq e_\mu$ für $\lambda \leq \mu$.

(Sch 3) $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ ist rechtsseitig stetig : $\lim\limits_{\mu\downarrow\lambda} e_\mu = e_\lambda$.

(Sch 4) $e_\mu = 0$ für $\mu < m$, $e_\mu = \mathrm{id}$ für $\mu \geq M$.

Beweis : (Sch 1) haben wir schon eingesehen.
(Sch 2) und (Sch 3) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften der Familie $(\varepsilon_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$.
(Sch 4) Auf $[\,m;M\,]$ ist

$$\varepsilon_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < m \quad , \quad \varepsilon_\nu = 1 \quad \text{für} \quad \nu \geq M \quad .$$

Als Funktionen aus K_2 bzw. K_1 sind ε_λ und ε_ν also Polynomfunktionen,

$$\varepsilon_\lambda(f) = 0(f) = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < m \quad , \quad \varepsilon_\nu = \mathrm{id} \quad \text{für} \quad \nu \geq M \quad .$$

Wir wollen nun f als "Riemann-Stieltjes-Integral" über seine Spektralschar $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ darstellen. Die Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals get in Vielem ähnlich wie die Annäherung des Integrals im $\mathbb{R}^1$ durch Riemann-Summen (Satz 11.8.2 (K 216)) , nur, dass diese Integrale jetzt nicht reelle Zahlen, sondern Operatoren sind :

(70.27) Riemann-Stieltjes-Integral über die Spektralschar eines Operators

Sei $f \in L(H)$ symmetrisch, $m := m(f)$, $M := M(f)$ und $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von f . Eine Familie

$$\mu \quad := \quad (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$\mu_0 < m < \mu_1 < \ldots \mu_{n-1} < \mu_n = M$$

heißt eine **verallgemeinerte Zerlegung** von $[\,m;M\,]$ ("verallgemeinert" , weil stets $\mu_0 < m$ sein soll); die Zahl

$$\eta(\mu) \quad := \quad \max\{\ |\mu_k - \mu_{k-1}|\ \big|\ k \in \underline{n}\ \}$$

die **Feinheit** von μ , und ein $n-$tupel

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \text{mit} \quad \mu_{k-1} \leq \lambda_k \leq \mu_k \quad \text{und} \quad \lambda_1 \geq m$$

eine Familie von **Zwischenpunkten** . Zu der Funktion

$$\varphi : \ [\,m;M\,] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gebe es nun einen symmetrischen Operator $g \in L(H)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existiert ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, so dass für **jede** verallgemeinerte Zerlegung μ mit $\eta(\mu) \leq \delta$ und **jede** Wahl der Zwischenpunkte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ stets

$$\left\| g - \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \right\| \leq \varepsilon$$

ist. Dann sagen wir, das **Riemann-Stieltjes-Integral**

$$\int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad \text{existiert und ist gleich} \quad g \quad .$$

Folgerung 70.28 : In (70.27) nehmen wir speziell

$$\varphi(\lambda) \quad := \quad \lambda \quad .$$

Dann gilt für $k \in \underline{n}$ und $\lambda \in [\,m; M\,]$:

$$\mu_{k-1}(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda)-\varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda)) \;\leq\; \lambda_k(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda)-\varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda)) \;\leq\; \mu_k(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda)-\varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda))\,,$$

$$\mu_{k-1}(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda)) \;\leq\; \lambda(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda)) \;\leq\; \mu_k(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda))$$

und wenn wir f für λ einsetzen:

$$\mu_{k-1}(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \;\leq\; \lambda_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \;\leq\; \mu_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \quad ,$$

$$\mu_{k-1}(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \;\leq\; f \circ (e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \;\leq\; \mu_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \quad .$$

Mit den Abkürzungen

$$r \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \quad , \quad s \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}})\,,$$

$$t \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \mu_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}})$$

folgt durch Summation der Ungleichungen

$$(*) \qquad\qquad r \;\leq\; s \;\leq\; t \quad , \quad r \;\leq\; f \;\leq\; t$$

(wegen $e_{\mu_0} = 0\,,\, e_{\mu_n} = \mathrm{id}$). Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ nehmen wir nun $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2}$. Für jede Zerlegung μ mit $\eta(\mu) \leq \delta$ ist dann

$$0 \;\leq\; t-r \;=\; \sum_{k=1}^{n} (\mu_k-\mu_{k-1})(e_{\mu_k}-e_{\mu_{k-1}}) \;\leq\; \delta \sum_{k=1}^{n} (e_{\mu_k}-e_{\mu_{k-1}}) \;=\; \delta\,\mathrm{id} \quad .$$

Nach $(*)$ ist dann auch

$$0 \;\leq\; t-s \;\leq\; \delta\,\mathrm{id} \quad , \quad 0 \;\leq\; t-f \;\leq\; \delta\,\mathrm{id}$$

und nach Satz 70.8 und wegen $\|\,\mathrm{id}\| = 1$:

$$\|t-s\| \;\leq\; \delta \quad , \quad \|t-f\| \;\leq\; \delta \quad , \qquad \text{also}$$

$$\|f-s\| \;\leq\; \|f-t\| + \|t-s\| \;\leq\; 2\delta \;=\; \varepsilon \quad .$$

Also ist

$$f \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \lambda \, \mathrm{d}\, e_\lambda$$

und bewiesen haben wir damit den

(70.29) Spektralsatz für symmetrische Operatoren auf H : Zu jedem symmetrischen Operator $f \in L(H)$ gibt es eine Familie $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, die den Axiomen (Sch 1-4) genügt, nämlich die in 70.26 definierte Spektralschar von f , so dass

$$f \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \lambda \, \mathrm{d}\, e_\lambda \quad \text{ist.}$$

Nun hätte man den ganzen formalen Apparat des RIEMANN-STIELTJES-Integrals sicher nicht eingeführt, wenn man nicht damit ganz gut rechnen könnte. Ein erstes Beispiel dafür ist

Satz 70.30 : Mit den Bezeichnungen von (70.27) sei

$$f \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \lambda \, \mathrm{d}\, e_\lambda \quad .$$

Sei $\varphi \,:\, [\,m; M\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\varphi(f) \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) \, \mathrm{d}\, e_\lambda \quad \text{und}$$

$$\|\varphi(f)\| \;\leq\; \|\varphi\|_\infty \quad ,$$

wobei $\|f\|_\infty := \sup\{\; |\varphi(x)| \;\big|\; x \in [\,m; M\,] \;\}$ die Supremumsnorm von φ ist.

Beweis : Für jede verallgemeinerte Zerlegung

$$\mu_0 \,<\, m \,<\, \mu_1 \,<\, \ldots \,<\, \mu_n \,=\, M$$

von $[\,m; M\,]$ gilt

$$(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda))(\varepsilon_{\mu_l}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{l-1}}(\lambda)) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für}\, k \neq l \\ \varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda) & \text{für}\, k \,=\, l \end{cases}$$

für $\lambda \in [\,m; M\,]$, also auch

$$(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \circ (e_{\mu_l} - e_{\mu_{l-1}}) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für}\, k \neq l \\ e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}} & \text{für}\, k \,=\, l\,. \end{cases}$$

Für $r \in \mathbb{N}_0$ folgt daraus durch Induktion

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}})\right)^r = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^r(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}})$$

und durch Grenzübergang $\eta(\mu) \to 0$ folgt

$$f^r = \int_{m-0}^{M} \lambda^r \,\mathrm{d}\, e_\lambda \quad .$$

Damit folgt für jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(1) \qquad p(f) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \,\mathrm{d}\, e_\lambda \quad ,$$

und insbesondere für $r = 0$:

$$(1a) \qquad \mathrm{id} = \int_{m-0}^{M} 1 \,\mathrm{d}\, e_\lambda \quad .$$

Um in (1) statt p eine beliebige stetige Funktion

$$\varphi : [\, m; M\,] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu bekommen, benutzen wir den WEIERSTRASSschen Approximationssatz : Zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es zu φ eine Polynomfunktion p mit

$$(2) \qquad -\frac{\varepsilon}{3} \le \varphi(\lambda) - p(\lambda) \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad \lambda \in [\, m; M\,] \quad .$$

Einsetzen von f ergibt

$$-\frac{\varepsilon}{3}\,\mathrm{id} \le \varphi(f) - p(f) \le \frac{\varepsilon}{3}\,\mathrm{id}$$

und, etwa nach Satz 70.8 :

$$\|\varphi(f) - p(f)\| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad ,$$

und außerdem, wenn man die Ungleichung (2) mit $(\varepsilon_{\mu_k} - \varepsilon_{\mu_{k-1}})(\lambda)$ multipliziert und summiert :

$$-\frac{\varepsilon}{3}(\varepsilon_{\mu_n}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_0}(\lambda)) \le \sum_{k=1}^{n} (\varphi(\lambda_k) - p(\lambda_k))(\varepsilon_{\mu_k}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_{k-1}}(\lambda))$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3}(\varepsilon_{\mu_n}(\lambda) - \varepsilon_{\mu_0}(\lambda)) \quad .$$

Wir tragen hier f für λ ein und setzen zur Abkürzung

$$\Sigma_\varphi \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \quad ,$$

$$\Sigma_p \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} p(\lambda_k)(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \quad ,$$

dann folgt

$$-\frac{\varepsilon}{3}\,\mathrm{id} \;\leq\; \Sigma_\varphi - \Sigma_p \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}\,\mathrm{id} \quad , \quad \text{also} \quad \|\Sigma_\varphi - \Sigma_p\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3} \quad .$$

Nach (1) kann man die Zerlegung μ so fein wählen, dass

$$\|p(f) - \Sigma_p\| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Dann ergibt sich

$$\|\varphi(f) - \Sigma_\varphi\| \;\leq\; \|\varphi(f) - p(f)\| + \|p(f) - \Sigma_p\| + \|\Sigma_p - \Sigma_\varphi\| \;\leq\; 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

und damit

$$\varphi(f) \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad .$$

Setzt man nun f in die Ungleichung

$$-\|\varphi\|_\infty \;\leq\; \varphi(\lambda) \;\leq\; \|\varphi\|_\infty$$

ein, so erhält man wegen (1a) noch

$$\|\varphi(f)\| \;\leq\; \|\varphi\|_\infty \quad . \qquad \square$$

Wenn man den Operator f nicht wie in Satz 70.30 in eine **reell**wertige Funktion φ, sondern in

$$\rho \quad := \quad \varphi + i\psi \quad \text{mit} \quad \varphi, \psi \in K_2$$

einsetzen will, muss man vorsichtig sein:

$$\rho(f) \quad := \quad \varphi(f) + i\psi(f)$$

ist i.A. nicht mehr **symmetrisch** (man nehme $\rho(\lambda) := i\lambda$ als Beispiel). Davon abgesehen, kann man aber wie mit reellwertigen Funktionen rechnen, z.B. erhält man aus Satz 70.30 : Ist

$$\rho = \varphi + i\psi \quad \text{mit stetigen Funktionen} \quad \varphi, \psi : [\,m; M\,] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

so ist

$$\rho(f) \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda + i \int\limits_{m-0}^{M} \psi(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad =: \quad \int\limits_{m-0}^{M} \rho(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad .$$

- Für den folgenden Satz braucht man, dass man das RIEMANN-STIELTJES-Integral nicht nur mit der Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eines Operators, sondern allgemeiner mit "Funktionen von beschränkter Variation" mit Werten in einem Banachraum bilden kann:

Definition 70.31 : Sei B ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine Funktion

$$\alpha : [a;b] \longrightarrow B$$

heißt **von beschränkter Variation** , wenn es ein $C \in \mathbb{R}_+^*$ gibt, so dass für jede Zerlegung

$$a = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n = b$$

des Intervalls $[a;b]$ gilt :

$$\sum_{k=1}^{n} \|\alpha(\mu_k) - \alpha(\mu_{k-1})\| \leq C \quad .$$

Definition und Satz 70.32 : Sei B ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $[a;b]$ ein reelles Intervall, $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\alpha : [a;b] \longrightarrow B$ von beschränkter Variation. Sei $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (\mu_0^{(k)}, \ldots, \mu_{n_k}^{(k)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a;b]$, also

$$a = \mu_0^{(k)} < \mu_1^{(k)} < \ldots < \mu_{n_k}^{(k)} = b$$

mit $\lim\limits_{k\to\infty} \max\{ |\mu_j^{(k)} - \mu_{j-1}^{(k)}| \mid j \in \underline{n_k} \} = 0$, und

$$(\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_{n_k}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad \mu_{j-1}^{(k)} \leq \lambda_j^{(k)} \leq \mu_j^{(k)} \quad \text{für} \quad j \in \underline{n_k}$$

eine Folge von Zwischenpunktfamilien zu $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann existiert

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \varphi(\lambda_j^{(k)})(\alpha(\mu_j^{(k)}) - \alpha(\mu_{j-1}^{(k)}))$$

und ist für alle solchen Folgen von Zerlegungen gleich; wir können also

$$\int_{[a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda)$$

dafür schreiben und nennen es das **Riemann-Stieltjes-Integral** von φ über den **Integrator** α.

Man definiert noch

$$\int_{(a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{[a+\varepsilon;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad ,$$

$$\int_{a-0}^{b} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{[a-\varepsilon;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad ;$$

da α in a nicht notwendig stetig ist, können diese Integrale verschieden sein! **Beweise** und Einzelheiten dazu siehe H.HEUSER , Lehrbuch der Analysis, Teil 1, §§91,92 . □

Beispiele 70.33 : 1) Ist $\alpha(\lambda) := \lambda$, so ist

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda \quad = \quad \int\limits_a^b \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda$$

das gewöhnliche RIEMANN-Integral im $\mathbb{R}^1$, nach dem Satz 11.8.2 über RIEMANN-Summen (K 216) .
2) Für uns wichtig ist der Fall, dass

$$\alpha : \; [a;b] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

(a) rechtsseitig stetig ist, dass also

$$\lim_{\lambda\downarrow\zeta} \alpha(\lambda) = \alpha(\zeta) \quad \text{für alle} \quad \zeta \in [a;b) \quad \text{existiert,}$$

(b) nur endlich viele “Sprünge” in $[a;b]$ hat, also dass es $\zeta_0, \ldots, \zeta_r$ gibt mit

$$a \;=\; \zeta_0 \;<\; \ldots \;<\; \zeta_r \;=\; b \quad ,$$

so dass aber

$$\alpha(\zeta_j-) \quad := \quad \lim_{\lambda\uparrow\zeta_j} \alpha(\lambda) \quad \text{für} \quad j \in \underline{r}$$

existiert und α in den Intervallen $(\zeta_{j-1};\zeta_j)$ stetig ist. Dann wird

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) = \sum_{j=1}^{r} \varphi(\zeta_j)(\alpha(\zeta_j) - \alpha(\zeta_j-)) + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{(\zeta_{j-1};\zeta_j)} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad ,$$

an den Sprungstellen ζ_j wird also der Funktionswert $\varphi(\zeta_j)$ mit dem “Gewicht” $\alpha(\zeta_j)-\alpha(\zeta_j-)$ im Integral berücksichtigt. So etwas kann man mit dem gewöhnlichen RIEMANN- Integral oder dem LEBESGUE-Integral, bei dem es auf die Funktionswerte auf Nullmengen gar nicht ankommt, nicht erreichen.
3) Ist α in $[a;b]$ stetig differenzierbar, so wird

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad = \quad \int\limits_a^b \varphi(\lambda)\alpha'(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda$$

wieder ein gewöhnliches RIEMANN-Integral, denn man hat in diesem Fall in Definition 70.32 :

$$\alpha(\mu_j^{(k)}) - \alpha(\mu_{j-1}^{(k)}) \quad = \quad \alpha'(\theta_j^{(k)})(\mu_j^{(k)} - \mu_{j-1}^{(k)})$$

$$\text{mit} \quad \mu_{j-1}^{(k)} \;<\; \theta_j^{(k)} \;<\; \mu_j^{(k)} \quad .$$

4) Aus 3) folgt, was wir öfter mal brauchen werden: Ist α in $[a;b]$ konstant, so ist

$$\int\limits_{[a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \;=\; 0 \quad .$$

Definition 70.34 : Ist $\alpha\;:\;\mathbb{R}\;\longrightarrow\;B$ eine Funktion mit nur abzählbar vielen Sprüngen, noch so, dass in jedem beschränkten Intervall $[-a;b]$ nur endlich viele Sprünge liegen, so setzen wir

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad := \quad \lim_{a,b\to\infty} \int\limits_{[-a;b]} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\alpha(\lambda) \quad ,$$

wenn der Limes existiert.

Mit diesen Begriffen wird der folgende Satz verständlich, dessen Beweis ähnlich geht wie der von Satz 70.30 :

Satz 70.35 : Mit den Bezeichnungen von (70.27) sei

$$f \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \lambda\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad .$$

Sei $\varphi\;:\;[\,m;M\,]\;\longrightarrow\;\mathbb{R}$ stetig und seien $x, y \in H$, dann ist

$$\lambda \quad \longmapsto \quad <\, e_\lambda(x), y\,>$$

von beschränkter Variation und es gilt

$$<\,\varphi(f)(x)\,,\,y\,> \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\;<e_\lambda(x), y> \quad .$$

Beweis siehe (H), Aufgabe 116.1, S.556, Lösung S.679 . □ Eine Folgerung daraus ist

Satz 70.36 : Mit den Bezeichnungen aus (70.27) sei

$$f \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \lambda\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad .$$

$\varphi\;:\;[\,m;M\,]\;\longrightarrow\;\mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt für $x \in H$:

$$\|\varphi(f)(x)\|^2 \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\,\|e_\lambda(x)\|^2 \quad .$$

Beweis : Nach Satz 70.30 (für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$) gilt

$$\varphi(f) \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,e_\lambda$$

und damit nach Definition 70.32 (wobei zu berücksichtigen ist, dass die Funktion

$$\alpha : [m; M] \longrightarrow H \quad , \quad \alpha(\lambda) := e_\lambda(x)$$

für festes $x \in H$ von beschränkter Variation ist) :

$$\varphi(f)(x) \quad = \quad \int_{m-0}^{M} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\, e_\lambda(x) \quad ,$$

$$(1) \qquad \|\varphi(f)(x)\|^2 \quad = \quad \lim_{\eta(\mu)\to 0} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varphi(\lambda_k)(e_{\mu_k}(x) - e_{\mu_{k-1}}(x)) \right\|^2 \quad ,$$

wobei μ eine verallgemeinerte Zerlegung $\mu_0 < m < \mu_1 < \ldots < \mu_n = M$ und $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Familie von Zwischenpunkten ist. Nun gilt (siehe auch Beweis von Satz 70.30) :

$$(e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}}) \circ (e_{\mu_l} - e_{\mu_{l-1}}) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}} & \text{für } k = l \end{cases}$$

und damit

$$< (e_{\mu_k} - e_{\mu_{k-1}})(x), (e_{\mu_l} - e_{\mu_{l-1}})(x) >= 0 \quad \text{für} \quad k \neq l \quad ,$$

die Summanden in (1) sind also paarweise orthogonal, und wir erhalten nach PYTHAGORAS

$$\|\varphi(f)(x)\|^2 \quad = \quad \lim_{\eta(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k)|^2 \, \|e_{\mu_k}(x) - e_{\mu_{k-1}}(x)\|^2 \quad .$$

Wegen Satz 70.21 und (Sch 2) aus Definition 70.26 ist

$$e_{\mu_{k-1}} \circ e_{\mu_k} \; = \; e_{\mu_{k-1}} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi(f)(x)\|^2 \quad &= \quad \lim_{\eta(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k)|^2 \, (\|e_{\mu_k}(x)\|^2 - \|e_{\mu_{k-1}}(x)\|^2) \\ &= \quad \int_{m-0}^{M} |\varphi(\lambda)|^2 \, \mathrm{d}\, \|e_\lambda(x)\|^2 \quad . \end{aligned}$$ □

Die Spektralzerlegung ermöglicht uns nun tiefere Einblicke in das Spektrum von f. Nach Folgerung 70.4 b) wissen wir schon, dass für symmetrisches f gilt: $S_f \subset \mathbb{R}$. Wir müssen also nur für $\lambda \in \mathbb{R}$ fragen, ob $\lambda \in S_f$ oder $\lambda \in M_f$ ist.

Satz 70.37 : Sei H ein Hilbertraum, $f \in L(H)$ symmetrisch und $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von f . Ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zu M_f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ auf dem Intervall $[\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon]$ konstant ist.

Beweis : 1) Es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ auf dem Intervall

$$I := [\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon]$$

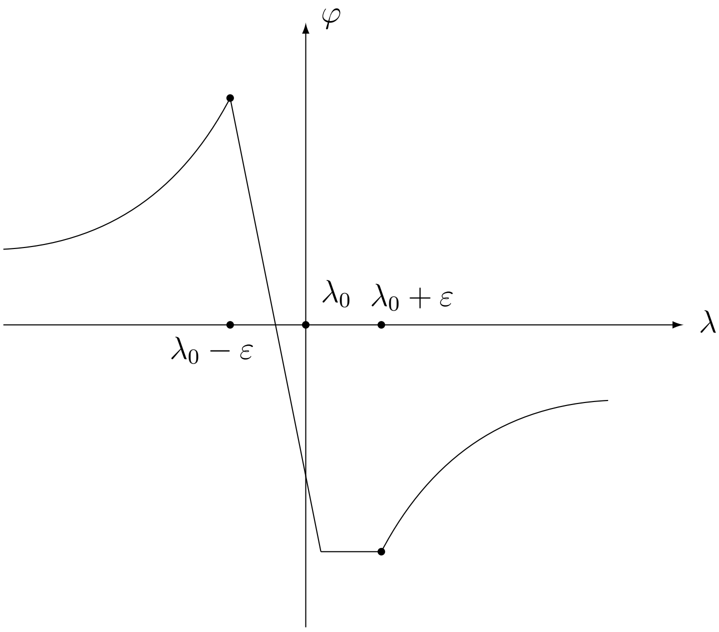
konstant ist. Sei $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\varphi(\lambda) := \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \quad \text{für} \quad \lambda \notin I$$

und $\psi(\lambda) := \lambda_0 - \lambda$, dann ist

$$\varphi(\lambda) \cdot \psi(\lambda) = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \notin I\,.$$

Sei $m := m(f)$, $M := M(f)$, dann gilt



$$\varphi(f) \circ \psi(f) = (\varphi \cdot \psi)(f) \overset{(70.30)}{=} \int\limits_{m-0}^{M} \varphi(\lambda) \cdot \psi(\lambda)\, \mathrm{d}\, e_\lambda \quad .$$

Für $\lambda \notin I$ ist $\varphi(\lambda) \cdot \psi(\lambda) = 1$, und in I ist $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ konstant, also gilt nach Beispiel 70.33 (4)

$$\int\limits_{\lambda_0-\varepsilon-0}^{\lambda_0+\varepsilon} \varphi(\lambda)\psi(\lambda)\, \mathrm{d}\, e_\lambda = 0 = \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon-0}^{\lambda_0+\varepsilon} 1 \;\mathrm{d}\, e_\lambda \quad , \quad \text{also}$$

$$\varphi(f) \circ \psi(f) = \int\limits_{m-0}^{M} 1 \;\mathrm{d}\, e_\lambda = \mathrm{id}_H \quad \text{nach Satz 70.30.}$$

Also ist $\psi(f) = \lambda_0 \,\mathrm{id}_H - f$ bijektiv, nach Folgerung 68.49 auch stetig, also $f - \lambda_0 \,\mathrm{id}_H \in L(H)$ und damit $\lambda_0 \in M_f$.

2) Sei $\lambda_0 \in M_f$, und wir nehmen an, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ in $[\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_o + \varepsilon]$ konstant ist. Dann gibt es Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\alpha_n < \lambda_0 < \beta_n \quad \text{und} \quad \delta_n := \beta_n - \alpha_n \to 0 \quad , \quad \text{so dass}$$

$$e(\delta_n) := e_{\beta_n} - e_{\alpha_n} \neq 0$$

ist, also $e(\delta_n)$ ein Projektor, $e(\delta_n)\,(H) \neq \{0\}$, und es gibt

$$x_n \in R(\,e(\delta_n)\,) \quad \text{mit} \quad \|x_n\| = 1 \quad ,$$

und da $e(\delta_n)$ ein Projektor ist,

$$e(\delta_n)\,(x_n) \quad = \quad x_n \quad ,$$

$$\|(f - \lambda_0\,\mathrm{id})(x_n)\|^2 \quad = \quad \|((f - \lambda_0\,\mathrm{id}) \circ e(\delta_n)\,)(x_n)\|^2$$
$$= \quad <((f - \lambda_0\,\mathrm{id}) \circ e(\delta_n)\,)(x_n), ((f - \lambda_0\,\mathrm{id}) \circ e(\delta_n)\,)(x_n)>$$
$$= \quad <((f - \lambda_0\,\mathrm{id})^2 \circ e(\delta_n)\,)(x_n), x_n>$$

und da f, id, $e(\delta_n)$ symmetrisch und miteinander vertauschbar sind, und nach Satz 70.35, ist das gleich

$$\ldots \quad = \quad \int\limits_{m-0}^{M} (\lambda - \lambda_0)^2 (\varepsilon_{\beta_n}(\lambda) - \varepsilon_{\alpha_n}(\lambda))\,\mathrm{d} < e_\lambda(x_n), x_n > \quad .$$

Wir wollen nun dieses RIEMANN-STIELTJES-Integral abschätzen :

$$\lambda \quad \longmapsto < e_\lambda(x_n), x_n > \quad \text{ist monoton wachsend,}$$

$$\varepsilon_{\beta_n}(\lambda) - \varepsilon_{\alpha_n}(\lambda) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für}\, \lambda < \alpha_n \text{ oder}\, \lambda \geq \beta_n \\ 1 & \text{für}\, \lambda \in [\,\alpha_n\,;\,\beta_n\,) \end{cases}$$

und wegen $\alpha_n < \lambda_0 < \beta_n$ ist in $[\,\alpha_n\,;\,\beta_n\,)$: $(\lambda - \lambda_0)^2 \leq \delta_n^2$,
also

$$\|(f - \lambda_0\,\mathrm{id})(x_n)\|^2 \;\leq\; \delta_n^2 \int\limits_{m-0}^{M} 1\;\mathrm{d} < e_\lambda(x_n), x_n >$$

$$\overset{70.35}{=} \quad \delta_n^2 < \mathrm{id}(x_n), x_n > = \delta_n^2 \quad \longrightarrow \quad 0 \quad .$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (f - \lambda_0\,\mathrm{id})(x_n) = 0$. Wegen $\lambda_0 \in M_f$ folgt daraus, dass auch

$$0 = \lim_{n\to\infty} (f - \lambda_0\,\mathrm{id})^{-1} \circ (f - \lambda_0\,\mathrm{id})(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

ist, im Widerspruch zu $\|x_n\| = 1$. Also war unsere Annahme falsch. □

Man kann Satz 70.37 auch so ausdrücken : Die Spektralpunkte von f sind genau die Wachstumspunkte der Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, genauer:

$$\lambda \in S_f \quad \Longleftrightarrow \quad e_{\lambda+\varepsilon} \neq e_{\lambda-\varepsilon} \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \quad .$$

Nach (Sch 2) gilt ohnehin $e_{\lambda+\varepsilon} \geq e_{\lambda-\varepsilon}$. In $\lambda \in S_f$ kann $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ nun stetig oder sprunghaft wachsen; wir werden zeigen, dass es **davon** abhängt, ob $\lambda \in SC_f$ oder $\lambda \in SP_f$ ist. Dazu brauchen wir noch zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 70.38 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch und $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von f.
a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $x \in H$ existiert

$$e_{\alpha,-}(x) \quad := \quad \lim_{\lambda\uparrow\alpha} e_\lambda(x) \quad .$$

b) Die Funktion $\delta_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\delta_\alpha(\lambda) := \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \alpha\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

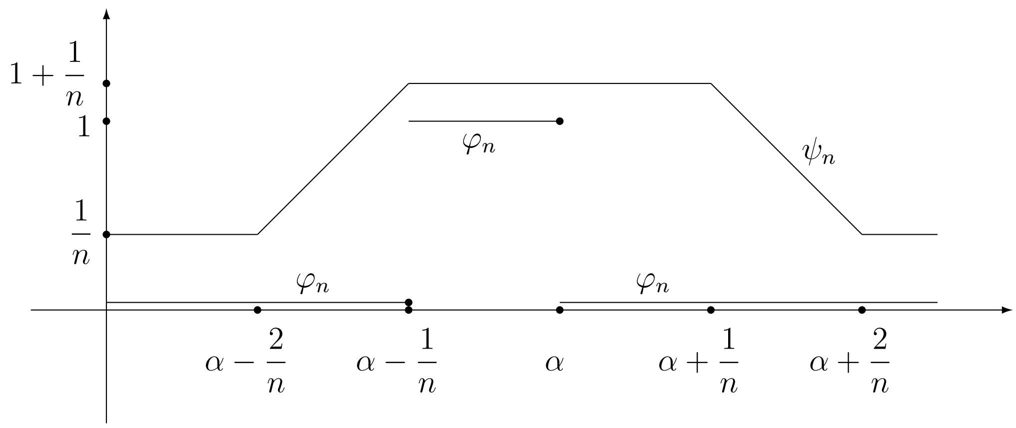
gehört zu K_1 , und es ist

$$s_\alpha := e_\alpha - e_{\alpha,-} = \delta_\alpha(f) \quad .$$

c) s_α ist ein Projektor.

Beweis : a) folgt daraus, dass $(e_\lambda)_{\lambda\in(-\infty;\alpha)}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge symmetrischer Operatoren ist, mit Satz 70.12.

b) Wir setzen $\varphi_n(\lambda) := \varepsilon_\alpha(\lambda) - \varepsilon_{\alpha-\frac{1}{n}}(\lambda)$ und definieren $\psi_n(\lambda)$ wie in der folgenden Zeichnung :



Da die ψ_n stetig sind und $\psi_n \downarrow \delta_\alpha$ geht, gehört δ_α zu K_1 , und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(f) = \delta_\alpha(f) \quad .$$

Aus $\psi_n \geq \varphi_n \geq \delta_\alpha$ folgt

$$\psi_n(f) \geq e_\alpha - e_{\alpha-\frac{1}{n}} \geq \delta_\alpha(f) \quad ,$$

und für $n \to \infty$ folgt b).

c) Wegen $\delta_\alpha^2 = \delta_\alpha$ ist $s_\alpha^2 = s_\alpha$. Wegen $s_\alpha = \delta_\alpha(f)$ ist s_α symmetrisch. Also ist s_α ein Projektor. □

Hilfssatz 70.39 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch und $\varphi \in K_2$. Ist α ein Eigenwert von f , gibt es also ein $u \in H$ mit

$$f(u) = \alpha u \quad \text{und} \quad u \neq 0 \quad , \quad \text{so ist}$$

$$(*) \qquad (\varphi(f))(u) = \varphi(\alpha)\, u \quad .$$

Beweis : Es ist $\alpha \in S_f \subset [\,m(f); M(f)\,]$, also ist $\varphi(\alpha)$ definiert. Ist φ eine Polynomfunktion, so ist $(*)$ leicht nachzurechnen. Ein $\varphi \in K_1$ bzw. K_2 kann man durch Polynomfunktionen annähern und erhält damit $(*)$. □

"Sprunghaftes" Wachstum der Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in α bedeutet:

$$s_\alpha = e_\alpha - e_{\alpha,-} \neq 0 \ :$$

Satz 70.40 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch. Genau dann ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f , wenn $s_\alpha \neq 0$ ist. In diesem Fall ist s_α der Projektor von H auf den Eigenraum zu α .
Beweis : a) Sei α ein Eigenwert von f , also

$$\exists\, u \in H \setminus \{0\} \,:\ f(u) = \alpha u \quad .$$

Dann folgt nach Hilfssatz 70.38 b) und 70.39 :

$$s_\alpha(u) \overset{70.38}{=} (\delta_\alpha(f))(u) \overset{70.39}{=} \delta_\alpha(\alpha)\, u = u \neq 0 \quad ,$$

also $s_\alpha \neq 0$.
b) Sei umgekehrt $s_\alpha \neq 0$. Nach Hilfssatz 70.38 c) ist s_α ein Projektor, also

$$s_\alpha(H) = \{\ x \in H \mid s_\alpha(x) = x\ \} \neq \{0\} \quad .$$

Sei nun $\varphi(\lambda) := \lambda \cdot \delta_\alpha(\lambda) = \alpha \cdot \delta_\alpha(\lambda)$, dann ist $\varphi \in K_2$,

$$\varphi(f) = (f \circ \delta_\alpha)(f) = \alpha\, \delta_\alpha(f)\,; \quad \text{wegen} \quad \delta_\alpha(f) = s_\alpha \quad \text{also}$$

$$f \circ s_\alpha = \alpha\, s_\alpha \quad ,$$

also gilt für ein $u \in s_\alpha(H) \setminus \{0\}$:

$$f(u) = (f \circ s_\alpha)(u) = (\alpha\, s_\alpha)(u) = \alpha\, u \quad .$$

α ist also ein Eigenwert von f .
c) Den Rechnungen in a) und b) entnimmt man: Ein $u \in H$, $u \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor von f zum Eigenwert α , wenn $s_\alpha(u) = u$ ist. Also ist

$$s_\alpha(H) \quad = \quad \operatorname{Ker}(f - \alpha\, \mathrm{id})$$

der Eigenraum von f zum Eigenwert α . □

Bemerkung : Da S_f die disjunkte Vereinigung

$$S_f \quad = \quad SP_f \cup SC_f$$

ist, und da wir die Elemente von S_f nun mit Satz 70.40 charakterisiert haben, wissen wir nach Satz 70.37 auch, was in den $\lambda \in SC_f$ mit der Spektralschar passiert: Sie wächst (echt) , hat aber keinen Sprung; es ist

$$\lim_{\alpha \uparrow \lambda} e_\alpha = e_\lambda \quad , \quad \text{und sowieso nach (Sch 3) :} \quad \lim_{\alpha \downarrow \lambda} = e_\lambda \quad ,$$

$(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ wächst in λ also **kontinuierlich** , nicht sprunghaft. Der Name "kontinuierliches Spektrum" für SC_f erklärt sich daher !
Es gilt

Folgerung 70.41 : Sei $f \in L(H)$ symmetrisch. Genau dann gilt $\alpha \in SC_f$, wenn

$$e_{\alpha-\varepsilon} \neq e_{\alpha+\varepsilon} \quad \text{für alle} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\lambda\uparrow\alpha} e_\lambda = e_\alpha \quad \text{ist.} \qquad \Box$$

- Das war Alles zur Spektraltheorie symmetrischer Operatoren !

Bemerkung 70.42 : Sei H ein Hilbertraum, dann heißt ein Operator $u \in L(H)$ nach Definition 68.37 unitär, wenn

$$\forall\, x \in H \,:\, \|u(x)\| = \|x\| \quad \text{und} \quad u(H) = H \quad \text{ist,}$$

und nach Satz 68.38 gilt dann

$$\forall\, x, y \in H \,:\, < u(x), u(y) > = < x, y > \quad ,$$

und $u^{-1} \in L(H)$ existiert und ist ebenfalls unitär. Für $z \in H$ und $y := u^{-1}(z)$ folgt

$$< u(x), z > \;=\; < x, u^{-1}(z) > \quad ,$$

also ist $u^* = u^{-1}$, u^* unitär, und

$$u \circ u^* = u^* \circ u = \mathrm{id} \quad .$$

Aus $\|u(x)\| = \|x\|$ folgt noch $\|u\| = 1$. Was kann man über das Spektrum von u sagen ?

Satz 70.43 : Sei $u \in L(H)$ unitär. Dann ist

$$S_u \subset \{\ z \in \mathbb{C} \ \big|\ |z| = 1\ \} \quad .$$

Beweis : Sei $\lambda \in S_u$, so gilt nach Satz 68.50 :

$$|\lambda| \le \|u\| = 1 \quad \text{(siehe 70.42).}$$

$\lambda = 0$ gilt sicher nicht, denn

$$(u - 0 \cdot \mathrm{id})^{-1} = u^{-1} = u^* \in L(H) \quad ,$$

also $0 \in M_u$. Sei $0 < |\lambda| < 1$, dann ist $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| > 1$, also $\dfrac{1}{\lambda} \notin S_{u^*}$, da auch u^* unitär ist. Also ist $u^* - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}$ bijektiv. $-\lambda u$ ist auch bijektiv, also ist auch

$$(u^* - \frac{1}{\lambda}\mathrm{id}) \circ (-\lambda u) = u - \lambda u^* \circ u = u - \lambda\, \mathrm{id}$$

bijektiv, also $\lambda \in M_u$. Ist $\lambda \in S_u$, so kann also nur

$$|\lambda| = 1 \quad \text{sein.} \qquad \Box$$

Zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ kann man ein $\alpha \in [-\pi; \pi]$ mit $\lambda = e^{i\alpha}$ finden. Eine analoge Aussage wollen wir für unitäre Operatoren zeigen : Es gibt ein symmetrisches $f \in L(H)$ mit

$$u = e^{i\,f} \quad \text{und} \quad S_f \subset [-\pi; \pi] \quad .$$

Zum Beweis brauchen wir zwei Hilfssätze:

(70.44) Lemma von Wecken : Seien $w, t \in L(H)$ vertauschbare symmetrische Operatoren mit $w^2 = t^2$, und p sei der Projektor auf $\operatorname{Ker}(w-t)$. Dann gilt

a) Jedes $g \in L(H)$, das mit $w-t$ vertauschbar ist, ist auch mit p vertauschbar.

b) Aus $w(x) = 0$ folgt $p(x) = x$.

c) $w = (2p - \mathrm{id}) \circ t$.

Beweis : a) Für $x \in H$ ist $p(x) \in \operatorname{Ker}(w-t)$, also

$$((w-t) \circ g \circ p)(x) = (g \circ (w-t) \circ p)(x) = 0\,, \quad \text{also}$$

$$(g \circ p)(x) \in \operatorname{Ker}(w-t) \quad \text{und damit}$$

$$(p \circ (g \circ p))(x) = (g \circ p)(x) \quad , \quad \text{d.h.}$$

(1) $$p \circ g \circ p = g \circ p \quad .$$

Mit g ist auch g^* mit $w-t$ vertauschbar, da $(w-t)^* = w-t$; also folgt

$$p \circ g^* \circ p = g^* \circ p$$

und wegen $p = p^*$:

$$p \circ g \circ p = (p \circ g^* \circ p)^* = (g^* \circ p)^* = p \circ g \quad .$$

Mit (1) ergibt sich $g \circ p = p \circ g$.

b) Für alle $x \in H$ ist

$$\|w(x)\|^2 = < w(x), w(x) > = < w^2(x), x >$$

$$= < t^2(x), x > = < t(x), t(x) > = \|t(x)\|^2 \quad .$$

Aus $w(x) = 0$ folgt also $t(x) = 0$ und

$$(w-t)(x) = 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad x \in \operatorname{Ker}(w-t) \quad \text{und damit} \quad p(x) = x \quad .$$

c) Es ist $(w-t) \circ (w+t) = w^2 - t^2 = 0$; für jedes $x \in H$ ist also $(w+t)(x) \in \operatorname{Ker}(w-t)$, also

(2) $$p \circ (w+t) = w+t \quad .$$

Wegen $p(x) \in \operatorname{Ker}(w-t)$ ist $(w-t) \circ p = 0$, und da $w-t$ mit sich selbst vertauschbar ist, folgt nach a) auch

$$p \circ (w-t) = 0 \quad .$$

Mit (2) folgt daraus

$$w + t = p \circ (w+t) - p \circ (w-t) = 2\, p \circ t \quad , \quad \text{also}$$

$$w = (2\,p - \mathrm{id}) \circ t \quad . \qquad \square$$

Hilfssatz 70.45 : Sei $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten α_n, die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq \gamma \in \mathbb{R}_+$ absolut konvergiert. Sei $f \in L(H)$ symmetrisch und $\|f\| \leq \gamma$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f^n$ gegen einen symmetrischen Operator, und es gilt für den Grenzwert:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \gamma^n \quad ,$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f^n$ ist vertauschbar mit jedem $g \in L(H)$, das mit f vertauschbar ist.

Beweis siehe (H), Aufgaben 116.2 und 3, S.556, Hinweis dazu S.680. □

Satz 70.46 : Sei $u \in L(H)$ unitär. Dann gibt es ein symmetrisches $f \in L(H)$ mit

$$u = e^{if} \quad \text{und} \quad S_f \subset [-\pi; \pi] \quad .$$

Beweis : Die Operatoren

$$v := \frac{1}{2}(u + u^*) \quad \text{und} \quad w := \frac{1}{2i}(u - u^*)$$

sind vertauschbar und symmetrisch, und es gilt

(1) $$\|v\|, \|w\| \leq 1 \quad , \quad -\mathrm{id} \leq v \leq \mathrm{id} \quad , \quad -\mathrm{id} \leq w \leq \mathrm{id}$$

(letzteres folgt daraus, dass für symmetrisches f gilt: $f \leq \|f\| \,\mathrm{id}$),

(2) $$v^2 + w^2 = \frac{1}{4}(u^2 + (u^*)^2 + 2u \circ u^* - u^2 - (u^*)^2 + 2u \circ u^*) = \mathrm{id} \quad .$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \leq 1$ hat man die arcsin-Reihe

$$\arccos \lambda = \frac{\pi}{2} - \arcsin \lambda = \frac{\pi}{2} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\frac{\lambda^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{\lambda^5}{5} + \dots \right) \quad ,$$

wegen $\|v\| \leq 1$ ist also $\arccos v$ definiert und symmetrisch nach Hilfssatz 70.45. Auch

$$t := \sin(\arccos v)$$

ist definiert und symmetrisch. t ist mit v und w vertauschbar. Wegen

$$\cos(\arccos v) = v \quad \text{und} \quad \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda = 1 \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

haben wir

$$v^2 + t^2 = \mathrm{id} \quad ; \quad \text{wegen (2) also}$$

$$t^2 = w^2 \quad .$$

Mit dem Projektor p von H auf $\mathrm{Ker}\,(w - t)$ gilt daher nach dem Lemma 70.44 von Wecken :

$$w = (2\,p - \mathrm{id}) \circ t \quad , \quad p(x) = x \quad \text{für} \quad x \in \operatorname{Ker} w \quad ,$$

$$p \quad \text{ist vertauschbar mit} \quad v \quad \text{und} \quad \arccos v \quad .$$

Wir setzen nun

$$f \quad := \quad (2\,p - \mathrm{id}) \circ \arccos v \quad ,$$

dann ist f symmetrisch, da v und p es sind. Seien φ_1, φ_2 die durch

$$\varphi_1(\lambda^2) \quad := \quad 1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} \mp \ldots \quad = \quad \cos\lambda \quad ,$$

$$\lambda\varphi_2(\lambda^2) \quad := \quad \lambda - \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} \mp \ldots \quad = \quad \sin\lambda$$

definierten Potenzreihen. Es ist $p^2 = p$, also gilt

$$(2\,p - \mathrm{id})^2 \quad = \quad 4\,p - 4\,p + \mathrm{id} \quad = \quad \mathrm{id} \quad ,$$

und da p mit $\arccos v$ vertauschbar ist, folgt daraus

$$f^2 \quad = \quad (\arccos v)^2 \quad .$$

Also ist, wenn man in die obigen Reihen einsetzt,

$$\cos f = \varphi_1(f^2) = \varphi_1((\arccos v)^2) = \cos(\arccos v) = v \quad ,$$

$$\begin{aligned}\sin f &= f \circ \varphi_2(f^2) = (2\,p - \mathrm{id}) \circ \arccos v \circ \varphi_2((\arccos v)^2) \\ &= (2\,p - \mathrm{id}) \circ \sin(\arccos v) = (2\,p - \mathrm{id}) \circ t = w \quad .\end{aligned}$$

Nach Definition von v und w gilt

$$u = v + iw \quad , \qquad \text{also}$$

$$u = \cos f + i \sin f = e^{if} \quad .$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass $S_f \subset [-\pi;\pi]$ ist. Nun wissen wir aus Satz 70.30, dass

$$\|\arccos(v)\| \quad \leq \quad \|\arccos\|_\infty = \sup\{\ |\arccos(\lambda)| \ \big|\ \lambda \in [-1;1]\ \} = \pi$$

ist. Es ist $\|2\,p - \mathrm{id}\| = 1$, denn wenn

$$H_1 := \{\ x_1 \in H \ \big|\ p(x_1) = x_1\ \} \quad \text{ist, haben wir für} \quad x \in H \quad :$$

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{mit} \quad x_1 \in H_1\,,\ x_2 \in H_1^\perp\,, \quad \text{und}$$

$$\|(2\,p - \mathrm{id})(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2 \quad .$$

Damit folgt $\|f\| \leq \pi$, und nach Satz 68.50 :

$$|\lambda| \quad \leq \quad \pi \quad \text{für} \quad \lambda \in S_f \quad .$$

Wegen $S_f \subset \mathbb{R}$ folgt $S_f \subset [-\pi;\pi]$. □

Damit erhält man nun

Satz 70.47 (Spektralsatz für unitäre Operatoren): Zu jedem unitären Operator u auf dem Hilbertraum H gibt es eine Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von H, so dass (Sch 1 - 3) aus Definition 70.26 gilt; außerdem

(Sch 4) $\quad e_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \lambda < -\pi \quad , \quad e_\lambda = \mathrm{id} \quad \text{für} \quad \lambda \geq \pi$

und

$$u \quad = \quad \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} e^{i\lambda}\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad = \quad \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} \cos\lambda\,\mathrm{d}\,e_\lambda + i \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} \sin\lambda\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad .$$

Beweis : Nach Satz 70.46 haben wir

$$u \quad = \quad e^{if} \quad = \quad \cos f + i\sin f \quad ,$$

wobei $f \in L(H)$ symmetrisch mit $S_f \subset [-\pi;\pi]$ ist, also nach Satz 70.29 :

$$f \quad = \quad \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} \lambda\,\mathrm{d}\,e_\lambda$$

mit der Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von f . Nach Satz 70.30 folgt

$$u \quad = \quad \int\limits_{-\pi-0}^{\pi} e^{i\lambda}\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad . \qquad \Box$$

Folgerung 70.48 : Mit Satz 70.30 und 70.35 erhält man aus Satz 70.47 für einen unitären Operator $u \in L(H)$ und eine stetige Funktion

$$\varphi : \ \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1 \} \longrightarrow \mathbb{C} :$$

(1) $\qquad \varphi(u) = \displaystyle\int\limits_{-\pi-0}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda})\,\mathrm{d}\,e_\lambda \quad$ und $\qquad$ für $\ x, y \in H$:

(2) $\qquad < x, \varphi(u)(y) > = \displaystyle\int\limits_{-\pi-0}^{\pi} \varphi(e^{i\lambda})\,\mathrm{d} < x, e_\lambda(y) > \quad .$

Bemerkung 70.49 : Alles, was wir bisher an Operatoren kennengelernt haben, ist für die Physik unzureichend. In der (eindimensionalen) Quantentheorie kommt z.B. der "Impulsoperator"

$$\underline{p} \quad := \quad i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$$

vor, der auf "Wellenfunktionen" $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ für ein offenes, nichtleeres, beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}$ angewendet werden soll. Nun ist aber keineswegs jede **integrierbare** Funktion auch **differenzierbar**; wir wissen

$$\mathcal{C}^1(\Omega) \ \underset{\neq}{\subset} \ \mathcal{C}(\Omega) \ \underset{\neq}{\subset} \ \mathrm{L}^2(\Omega) \quad .$$

Immerhin: Man kann ein $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ durch eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{C}^1(\Omega)$ annähern,

$$\mathcal{C}^1(\Omega) \text{ liegt dicht in } \mathrm{L}^2(\Omega) \quad .$$

Noch etwas: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$ ist auf $\mathcal{C}^1(\Omega)$ (wenn man die L^2-Norm nimmt) keineswegs stetig. Dazu das

Beispiel 70.50 : Sei $\Omega := (-\pi;\pi) \subset \mathbb{R}$, dann sind die durch

$$\varphi_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Funktionen Elemente von $\mathcal{C}^1(\Omega)$ und damit von $\mathrm{L}^2(\Omega)$, wobei wir genauer $\varphi_n + \mathcal{N}$ wie in Definition 68.22 schreiben müssten, aber für stetige Funktionen f, g gilt

$$f + \mathcal{N} = g + \mathcal{N} \iff f = g \quad ,$$

es entstehen also keine Missverständnisse, wenn wir das $\mathcal{N}$ weglassen (und nur deshalb können wir $\mathcal{C}^1(\Omega)$ als Teilmenge von $\mathrm{L}^2(\Omega)$ auffassen). Sei

$$f(\varphi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\varphi \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega) \quad ,$$

dann gilt für die L^2-Normen von φ_n und $f(\varphi_n)$:

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2nt))\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}\,t = 1 \quad , \quad \text{aber}$$

$$\|f(\varphi_n)\|^2 = \frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nt)+1)\,\mathrm{d}\,t = n^2 \quad .$$

Nach Satz 32.19 ist f nicht stetig. □

Wir müssen also lineare Abbildungen untersuchen, die weder auf dem ganzen Hilbertraum definiert noch stetig sind :

Definition 70.51 : Sei H ein Hilbertraum, $D(f)$ ein Untervektorraum von H mit

(Di) $\quad \overline{D(f)} = H \quad .$

Sei $f : D(f) \longrightarrow H$ linear. Dann nennen wir f einen
dicht definierten (linearen) Operator in H.

Definition 70.52 : Sei $f : D(f) \longrightarrow H$ ein dicht definierter linearer Operator in H, also $D(f) \subset H$ ein dichter Untervektorraum von H. Dann setzen wir

$$D^* := \{\, y \in H \;\big|\; \exists\, y^* \in H \,\forall\, x \in D(f) : \langle f(x), y \rangle = \langle x, y^* \rangle \,\} \quad .$$

Zu gegebenem $y \in D^*$ ist das $y^* \in H$ mit

$$\forall\, x \in D(f) \;:\; < f(x), y > = < x, y^* >$$

eindeutig bestimmt, denn sei auch y_1 so ein Element, dann gilt

$$\forall\, x \in D(f) \;:\; < x, y_1 > = < x, y^* > \quad ,$$

$$\forall\, x \in D(f) \;:\; < x, y_1 - y^* > = 0$$

und da die Abbildung $x \longmapsto < x, y_1 - y* >$ auf H stetig und $D(f)$ dicht in H ist, auch

$$\forall\, x \in H \;:\; < x, y_1 - y^* > = 0 \quad , \qquad \text{also} \quad y_1 = y^* \quad .$$

Wir können also

$$f^* \;:\; D^* \longrightarrow H \quad , \quad f^*(y) := y^* \quad \text{und} \quad D(f^*) := D^*$$

setzen. f^* ist offensichtlich linear und heißt der **zu f adjungierte Operator** . □

f^* ist ebenso wie f im Allgemeinen nicht stetig; es gilt aber eine Abschwächung :

Satz 70.53 : Sei f ein dicht definierter linearer Operator in H und

$f^* \;:\; D^* \longrightarrow H$ der zu f adjungierte Operator. Dann gilt

(Ab) Für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D^*, die gegen ein $y \in H$ konvergiert, und für die $(f^*(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $z \in H$ konvergiert, ist $y \in D^*$ und $f^*(y) = z$.

Beweis : Für alle $x \in D(f)$ ist

$$< f(x), y > = \lim_{n\to\infty} < f(x), y_n > = \lim_{n\to\infty} < x, f^*(y_n) > = < x, z > \quad ,$$

also $y \in D^*$ und $f^*(y) = z$. □

Bemerkung 70.54 : Unser Impulsoperator $-i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$ ist immerhin noch "selbstadjungiert" : Für $\varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ gilt, wenn man berücksichtigt, dass diese Funktionen für $|t| \to \infty$ gegen 0 gehen :

$$< -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\varphi, \psi > = i\hbar \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi'(t)}\cdot\psi(t)\,\mathrm{d}\,t = -i\hbar \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t)}\psi'(t)\,\mathrm{d}\,t = < \varphi, -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\psi > \;.$$

Satz 70.55 : Ein in H dicht definierter linearer Operator

$f \;:\; D(f) \longrightarrow H$ erfülle die Bedingung

(Sy) $\forall\, x, y \in D(f) \;:\; < x, f(y) > = < f(x), y >$,

dann ist der adjungierte Operator f^* eine Fortsetzung von f , d.h. es gilt

$$D(f) \subset D(f^*) \quad \text{und} \quad \forall\, x \in D(f) \;:\; f^*(x) = f(x) \quad .$$

Beweis : Für alle $y, x \in D(f)$ folgt aus (Sy) und Definition 70.52 :

$< f(x), y > = < x, y^* >$ mit $y^* = f(y)$. □

Definition 70.56 : Sei H ein Hilbertraum, $D(f)$ ein Untervektorraum von H mit

(Di) $\quad \overline{D(f)} \; = \; H$

und $f \; : \; D(f) \; \longrightarrow \; H$ linear. Dann heißt f **selbstadjungiert** , wenn auch noch

(Sy) $\quad \forall\, x, y \in D(f) \; : \; < x, f(y) > = < f(x), y > \quad$ und

(Se) $\quad D(f) \; = \; D(f^*) \quad$ gilt. □

Zum Nachweis der Selbstadjungiertheit kann man den folgenden Hilfssatz benutzen:

Hilfssatz 70.57 : Sei H ein Hilbertraum, $D(f)$ ein Untervektorraum von H , $f \; : \; D(f) \; \longrightarrow \; H$ linear, und f erfülle die Bedingungen (Di) und (Sy) aus Definition 70.56. Wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$R(f - \lambda\, \mathrm{id}) \; = \; R(f - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}) \; = \; H$$

ist, dann gilt auch (Se) für f , d.h. f ist selbstadjungiert.
Beweis : Nach Satz 70.55 ist f^* eine Fortsetzung von f , es gilt

$$D(f) \quad \subset \quad D(f^*) \quad .$$

Wir müssen also nur $D(f^*) \subset D(f)$ zeigen. Sei also $y \in D(f^*)$. Dann gilt für alle $x \in D(f)$:

$$< y, f(x) - \lambda x > = < y, f(x) > - \lambda < y, x >$$

$$= < f^*(y), x > \; - \; < \overline{\lambda} y, x > = < f^*(y) - \overline{\lambda} y, x > \quad .$$

Wegen $R(f - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}) \; = \; H$ gibt es ein $z \in D(f - \overline{\lambda}\, \mathrm{id}) \; = \; D(f)$ mit

$$f(z) - \overline{\lambda} z \; = \; f^*(y) - \overline{\lambda} y \quad , \qquad \text{also}$$

$$< y, f(x) - \lambda x > = < f(z) - \overline{\lambda} z, x > \overset{(Sy)}{=} \; < z, f(x) - \lambda x > \quad .$$

Wegen $R(f - \lambda\, \mathrm{id}) \; = \; H$ gilt für alle $u \in H$:

$$< y - z, u > = 0 \quad , \qquad \text{also} \quad y \; = \; z \in D(f) \, .$$ □

Für einen selbstadjungierten Operator in H gilt also $f^* \; = \; f$. f ist aber nicht auf ganz H , sondern nur auf einem dichten Untervektorraum $D(f) \subset H$ definiert, und nicht stetig, sondern erfüllt nur die Bedingung (Ab) aus Satz 70.53 (man sagt, f ist ein **abgeschlossener Operator**). Immerhin haben wir unsere Definition 68.45 des Spektrums von f so allgemein gefasst, dass S_f auch für selbstadjungiertes f definiert ist. Wir interessieren uns für S_f und stellen dazu einen Zusammenhang mit den schon behandelten unitären Operatoren her :

Satz 70.58 : Sei $f \;:\; D(f) \longrightarrow H$ ein selbstadjungierter Operator in H. Dann gilt für alle $x \in D(f)$:

(1) $\quad \|\,(f + i\,\mathrm{id})(x)\|^2 \quad = \quad \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 \quad ,$ $\qquad$ also

(2) $\quad \|\,(f + i\,\mathrm{id})(x)\| \quad \geq \quad \|x\| \quad .$

Es existieren die Umkehrfunktionen $(f + i\,\mathrm{id})^{-1}$. Sie sind auf ganz H definiert und stetig.

Beweis : (1) $\quad$ Für $x \in D(f)$ ist

$$\|\,(f + i\,\mathrm{id})(x)\|^2 \quad = \quad \|f(x)\|^2 + \|i\,x\|^2 \pm < f(x), i\,x > \pm < i\,x, f(x) >$$

$$= \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 \quad , \quad \text{denn}$$

$$< f(x), i\,x >= i < f(x), x > \stackrel{(Sy)}{=} i < x, f(x) >= - < i\,x, f(x) > .$$

(2) $\quad$ folgt trivialerweise aus (1) .

(3) $\quad f \pm i\,\mathrm{id}$ ist linear und injektiv, denn Ker $(f + i\,\mathrm{id}) \;=\; \{0\}$ wegen (2) :

$$(f + i\,\mathrm{id})(x) \;=\; 0 \;\stackrel{(2)}{\Longleftrightarrow}\; \|x\| \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad x \;=\; 0 \quad .$$

Aus (2) folgt, wenn man dort das “$-$”-Zeichen nimmt (für das “+”-Zeichen geht es genau so), dass

$$r \quad := \quad (f - i\,\mathrm{id})^{-1} \quad \text{stetig ist,}$$

auf dem Untervektorraum $D(r) \;:=\; (f - i\,\mathrm{id})(D(f))$ von H.

(4) $\quad$ Wir zeigen, dass $D(r)$ abgeschlossen ist: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $D(r)$, die gegen ein $z \in H$ konvergiert. Sei

$$y_n \quad := \quad (f - i\,\mathrm{id})^{-1}(z_n) \in D(f) \quad ,$$

dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen (2) eine Cauchyfolge in H:

$$\|y_n - y_m\| \;=\; \|\,(f - i\,\mathrm{id})^{-1}(z_n - z_m)\| \;\leq\; \|z_n - z_m\| \quad .$$

Es existiert also $y \;:=\; \lim\limits_{n \to \infty} y_n \in H \quad . \quad f$ erfüllt (Ab) , und die auf ganz H definierte stetige Abbildung id auch, also gilt (Ab) für $f - i$ id . Wegen

$$(f - i\,\mathrm{id})(y_n) \;=\; z_n \quad \to \quad z \in H \quad \text{und}$$

$$y_n \qquad\qquad \to \quad y \in H \quad \text{folgt}$$

$$y \in D\,(f - i\,\mathrm{id}) \;=\; D(f) \quad \text{und} \quad z \;=\; (f - i\,\mathrm{id})(y) \in D(r) \quad ,$$

also ist $D(r)$ abgeschlossen.

(5) $\quad$ Angenommen, es ist $D(r) \neq H$. Dann haben wir nach Satz 68.33 :

$$H \quad = \quad D(r) \oplus D(r)^{\perp}$$

und ein $y \in D(r)^{\perp}$, $y \neq 0$. Dafür ist dann

$< (f-i\,\mathrm{id})(x), y >= 0 =< x, 0 >$ für alle $x \in D\,(f-i\,\mathrm{id}) = D(f)$.

Also existiert

$$0 = (f - i\,\mathrm{id})^*(y) = (f + i\ \mathrm{id})(y) \quad ,$$

aber $f + i$ id ist injektiv, also $y = 0$, Widerspruch.

(6) Wir haben also die lineare, stetige Abbildung

$$(f - i\,\mathrm{id})^{-1} : H \longrightarrow H \quad . \qquad \square$$

Satz 70.59 : Für einen selbstadjungierten Operator $f : D(f) \longrightarrow H$ ist $S_f \subset \mathbb{R}$.

Beweis : Sei $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ nichtreell, also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Dann existiert nach Satz 70.58

$$(f - \mu\ \mathrm{id})^{-1} = (f - \alpha\ \mathrm{id} - i\,\beta\ \mathrm{id})^{-1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}(f - \alpha\ \mathrm{id}) - i\ \mathrm{id}\right)^{-1}$$

auf ganz H und ist dort stetig, also $\mu \in M_f$. $\square$

Achtung : Im Gegensatz zu Satz 68.50 ist S_f im Allgemeinen keine **beschränkte** Teilmenge von $\mathbb{R}$!

Satz 70.60 : Sei $f : D(f) \longrightarrow H$ ein selbstadjungierter Operator in H. Dann ist die **Cayley-Transformierte von f**

$$v := (f - i\,\mathrm{id}) \circ (f + i\ \mathrm{id})^{-1}$$

ein **auf ganz H definierter, unitärer** Operator.

Beweis : Nach Satz 70.58 haben wir

$$H \overset{(f+i\ \mathrm{id})^{-1}}{\longrightarrow} D(f) = D\,(f - i\,\mathrm{id}) \overset{f - i\,\mathrm{id}}{\longrightarrow} H \quad ,$$

also ist v auf ganz H definiert und linear. Aus (1) in Satz 70.58 folgt für $x \in D(f)$:

$$\|\,(f - i\,\mathrm{id})(x)\| = \|\,(f + i\,\mathrm{id})(x)\| \quad ,$$

und wenn wir $x := (f + i\,\mathrm{id})^{-1}(y)$ für $y \in H$ einsetzen :

$$\|\,(f - i\,\mathrm{id}) \circ (f + i\,\mathrm{id})^{-1}(y)\| = \|y\| \quad .$$

Also ist v stetig und nach Definition 68.37 a) isometrisch. Aber $v : H \longrightarrow H$ ist auch surjektiv, denn nach Satz 70.58 haben wir

$$v^{-1} = (f + i\,\mathrm{id}) \circ (f - i\,\mathrm{id})^{-1} : H \longrightarrow H \quad ,$$

also ist v unitär. $\square$

Bemerkung 70.61 : Wie man leicht nachrechnet, kann man f auch wieder aus seiner CAYLEY-Transformierten $v = (f - i\,\mathrm{id}) \circ (f + i\,\mathrm{id})^{-1}$ berechnen:

$$f = i\,(\mathrm{id} + v) \circ (\mathrm{id} - v)^{-1} \quad . \qquad \square$$

Das Ziel unserer langen Bemühungen ist nun der

Satz 70.62 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren in H): Sei $f : D(f) \longrightarrow H$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H . v sei die CAYLEY-Transformierte von f und

$$-v = \int_{-\pi-0}^{\pi} e^{i\lambda}\,\mathrm{d}\,e_\lambda$$

die Spektraldarstellung von $-v$ gemäß Satz 70.47. Dann ist
für alle $x \in D(f)$

$$< x, f(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,\mathrm{d} < x, f_\lambda(x) > \quad \text{mit} \quad f_\lambda := e_{2\arctan\lambda} \quad .$$

Beweis : 1) Wir zeigen zunächst, dass $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in $-\pi$ und π stetig ist. Gemäß der Herleitung im Beweis von Satz 70.47 ist $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar eines (auf ganz H definierten) symmetrischen Operators $g \in L(H)$ mit

$$-v = \cos g + i \sin g \quad \text{und} \quad S_g \subset [-\pi;\pi] \quad .$$

Wäre $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in $-\pi$ unstetig, so wäre $-\pi$ nach Satz 70.40 ein Eigenwert von g . Es gäbe also ein $y \neq 0$ mit

$$g(y) = -\pi\, y \quad .$$

Nach Hilfssatz 70.39 wäre dann

$$(\cos g)(y) = \cos(-\pi)(y) = -y \quad , \quad (\sin g)(y) = \sin(-\pi)(y) = 0 \quad ,$$

also $v(-y) = -v(y) = (\cos g)(y) + i(\sin g)(y) = -y$, also

$$(v - \mathrm{id})(-y) = 0 \quad , \quad -y \neq 0 \quad , \quad \text{aber}$$

$$\begin{aligned} v - \mathrm{id} &= (f - i\,\mathrm{id}) \circ (f + i\,\mathrm{id})^{-1} - (f + i\,\mathrm{id}) \circ (f + i\,\mathrm{id})^{-1} \\ &= -2i\,(f + i\,\mathrm{id})^{-1} \end{aligned}$$

ist nach Satz 70.58 injektiv, hat also den Kern $\{0\}$. Also ist $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in $-\pi$ stetig, d.h. $e_{-\pi} = e_{-\pi,-}$. Entsprechend beweist man die Stetigkeit in π . Insbesondere kann man nun

$$(1) \qquad -v = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,\lambda}\,\mathrm{d}\,e_\lambda$$

schreiben; man kann in der Definition 70.27 des RIEMANN-STIELTJES-Integrals in diesem Fall Zerlegungen des Intervalls $[-\pi;\pi]$ nehmen und braucht keine verallgemeinerten Zerlegungen.
2) Wie wir in 1) gesehen haben, ist

$$\mathrm{id} - v = 2i\,(f + i\,\mathrm{id})^{-1}$$

injektiv, und $(\mathrm{id} - v)(H) = D(f)$. Zu jedem $x \in D(f)$ gibt es also genau ein $y \in H$ mit

$$x = (\mathrm{id} - v)(y) \quad ,$$

und mit der Formel aus Bemerkung 70.61 :

$$f(x) = i((\mathrm{id} + v) \circ (\mathrm{id} - v)^{-1} \circ (\mathrm{id} - v))(y) = i\,(\mathrm{id} + v)(y) \quad .$$

Mit diesen beiden Gleichungen, und da v unitär ist, erhält man

$$< x, f(x) >= i < y - v(y), y + v(y) >$$

$$= i < y, y > -i < v(y), v(y) > -i < v(y), y > +i < y, v(y) >$$
$$= i\,(< y, v(y) > -\overline{< y, v(y) >}) = -2 \ \mathrm{Im} < y, v(y) > \quad ,$$

und wenn man hier für $-v$ die Formel (1) einsetzt :

$$(2) \qquad < x, f(x) >= \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin\lambda \ \mathrm{d} < y, e_\lambda(y) >$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4 \sin\frac{\lambda}{2} \cos\frac{\lambda}{2} \ \mathrm{d} < y, e_\lambda(y) > \quad .$$

Da $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von g ist, kann man e_λ mit $\cos g$ und $\sin g$ vertauschen, wegen $-v = \cos g + i \sin g$ also auch mit v . Also ist

$$< x, e_\lambda(x) >=< (\mathrm{id} - v)(y), e_\lambda((\mathrm{id} - v)(y)) >$$

$$=< y, ((\mathrm{id} - v)^* \circ (\mathrm{id} - v) \circ e_\lambda)(y) > \quad .$$

Mit $z := e_\lambda(y)$ und Folgerung 70.48 (2) folgt

$$< x, e_\lambda(x) >= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{-i\mu})(1 + e^{i\mu})\,\mathrm{d} < y, e_\mu(z) >$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 4 \cos^2\frac{\mu}{2} \ \mathrm{d} < y, e_\mu(z) > \quad .$$

Für $\mu \leq \lambda$ ist $e_\mu \leq e_\lambda$, also nach Satz 70.21 : $e_\mu \circ e_\lambda = e_\mu$, also

$$e_\mu(z) = (e_\mu \circ e_\lambda)(z) = e_\mu(y) \quad \text{für} \quad \mu \leq \lambda, \text{ analog :}$$

$$e_\mu(z) = e_\lambda(z) \qquad\qquad \text{für alle} \quad \mu \geq \lambda \quad .$$

Für $\mu \geq \lambda$ ist also der Integrator

$$\mu \longmapsto \; < y, e_\mu(z) > = < y, e_\lambda(z) > \quad \text{konstant,}$$

und mit Beispiel 70.33 , 4) erhält man

$$(3) \qquad < x, e_\lambda(x) > = \int\limits_{-\pi}^{\lambda} 4\cos^2\frac{\mu}{2} \,\mathrm{d} < y, e_\mu(y) > \quad .$$

Wegen der Stetigkeit von $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in $-\pi$ und π folgt daraus und aus (2) :

$$< x, f(x) > = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 4\sin\frac{\lambda}{2}\cos\frac{\lambda}{2} \,\mathrm{d} < y, e_\lambda(y) >$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tan\frac{\lambda}{2} \cdot 4\cos^2\frac{\lambda}{2} \,\mathrm{d} < y, e_\lambda(y) >$$

und wegen (3) kann man $\mathrm{d} < x, e_\lambda(x) > = 4\cos^2\dfrac{\lambda}{2} \,\mathrm{d} < y, e_\lambda(y) >$ substituieren (man sehe sich dazu die Definition 70.32 und Beispiel 70.33, 3) an) :

$$< x, f(x) > = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \tan\frac{\lambda}{2} \,\mathrm{d} < x, e_\lambda(x) > \quad .$$

Mit der Substitution $\lambda = 2\arctan t$ erhält man

$$< x, f(x) > = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t \,\mathrm{d} < x, f_t(x) > \quad \text{mit}$$

$$f_t := e_{2\arctan t} \quad . \qquad \square$$

Folgerung 70.63 : Die Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ in Satz 70.62 hat die Eigenschaften:

(Sch 1) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist f_λ ein Projektor.

(Sch 2) $f_\lambda \leq f_\mu$ für $\lambda \leq \mu$.

(Sch 3) $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist rechtsseitig stetig:

$$\lim_{\mu\downarrow\lambda} f_\mu = f_\lambda \quad .$$

(Sch 4) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f_\lambda = 0 \quad , \quad \lim\limits_{\lambda\to\infty} f_\lambda = \mathrm{id} \quad .$ $\square$

Bis auf (Sch 4) ist das wörtlich genau so wie in 70.26 für symmetrische Operatoren $f \in L(H)$. Hier ist aber S_f i.A. nicht beschränkt !

Folgerung 70.64 : Sei f ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H , $D(f)$ dicht in H. Dann gibt es eine Familie $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit den Eigenschaften (Sch 1 - 4) aus Folgerung 70.63 und

(1) $\quad f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\, f_\lambda(x) \quad$ für $\quad x \in D(f)$,

(2) $\quad D(f) = \{\ x \in H \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \,\mathrm{d}\, \|f_\lambda(x)\|^2 < \infty\ \}$.

Beweis : (2) erfordert etwas längere Überlegungen, siehe (T 238), Lemma 19.8.
(1) folgt aus Satz 70.62 : Danach ist

$$< x, f(x) > \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d} < x, f_\lambda(x) >$$

für $x \in D(f)$. Für $x \in D(f)$ ist

$$g(x) \quad := \quad \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\, f_\lambda(x)$$

definiert, und nach Satz 70.35 gilt

$$< x, g(x) > \quad = \quad < x, f(x) > \quad \text{für} \quad x \in D(f) \quad .$$

Nun ist für $x, y \in D(f)$:

$$< y, f(x) > = \left\langle \frac{x+y}{2}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\rangle - \left\langle \frac{x-y}{2}, f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right\rangle$$
$$+ i\left\langle \frac{x+iy}{2}, f\left(\frac{x+iy}{2}\right) \right\rangle - i\left\langle \frac{x-iy}{2}, f\left(\frac{x-iy}{2}\right) \right\rangle \quad ,$$

also $< y, f(x) > = < y, g(x) >$. Da $D(f)$ dicht in H ist, gilt das auch für beliebiges $y \in H$ und $x \in D(f)$; damit also

$$0 = < y, (f-g)(x) > \qquad \text{für alle} \quad y \in H\,,\ x \in D(f) \quad ,$$

und da $< \ ,\ >$ nichtausgeartet ist: $(f-g)(x) = 0$. □

Leider sind die Operatoren, die einem in der Quantentheorie begegnen, oft nicht einmal selbstadjungiert, und erfüllen auch nicht die Bedingung (Ab) aus Satz 70.53. Sie lassen sich aber wenigstens fortsetzen zu einem selbstadjungierten Operator:

Definition 70.65 : Sei H ein Hilbertraum, $D(f)$ ein Untervektorraum von H und

$$f\ :\ D(f) \longrightarrow H \quad \text{linear.}$$

a) f heißt ein **abgeschlossener Operator** , wenn gilt (siehe auch Satz 70.53 und Seite 297):

(Ab) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(f)$, die gegen ein $x \in H$ konvergiert, und für die $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $z \in H$ konvergiert, ist $x \in D(f)$ und $f(x) = z$.

b) Sei auch $g : D(g) \longrightarrow H$ linear, wobei $D(g)$ ein Untervektorraum von H ist. Gilt dann

$$D(f) \subset D(g) \quad \text{und} \quad \forall\, x \in D(f) : \; f(x) = g(x) \quad ,$$

so heißt g eine **Fortsetzung** von f, geschrieben: $g \supset f$.

c) f heißt **abschließbar**, wenn es einen abgeschlossenen Operator g mit $g \supset f$ gibt.

Satz 70.66 : Sei H ein Hilbertraum, $D(f)$ ein Untervektorraum von H und

$$f : D(f) \longrightarrow H \quad \text{sei linear und abschließbar.}$$

a) Dann gibt es eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Fortsetzung

$$\overline{f} : D(\overline{f}) \longrightarrow H \quad \text{von} \quad f \quad ,$$

so dass für jede andere abgeschlossene Fortsetzung g von f gilt

$$g \supset \overline{f} \supset f \quad . \quad \overline{f} \text{ heißt der } \textbf{Abschluss} \text{ von } f \quad .$$

(b) Wenn wir für $x, y \in D(\overline{f})$ definieren :

$$[\,x, y\,]_{\overline{f}} \quad := \quad < x, y > + < \overline{f}(x), \overline{f}(y) > \quad \text{und}$$

$$\|x\|_{\overline{f}} \quad := \quad \sqrt{[x, x]_{\overline{f}}} \quad ,$$

so ist $\| \quad \|_{\overline{f}}$ eine Norm auf $D(\overline{f})$, und

(c) bezüglich dieser Norm liegt $D(f)$ dicht in $D(\overline{f})$.

Beweis : (a) f ist abschließbar, also gibt es eine Fortsetzung g von f, die abgeschlossen ist. Dafür gilt

$$D(f) \quad \subset \quad D(g) \quad .$$

Dass auf $D(g)$ durch

$$\|x\|_g := \sqrt{[\,x, x\,]_g} \quad , \quad [\,x, y\,]_g := < x, y > + < g(x), g(y) >$$

eine Norm definiert ist, kann man nachrechnen (womit dann auch (b) bewiesen ist). $D(g)$ ist mit $[\ ,\ ]_g$ ein Hilbertraum, denn sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $D(g)$, also

$$\|x_n - x_m\|_g < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n, m > n_0 \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|g(x_n) - g(x_m)\| < \varepsilon$$

für alle $n, m > n_0$, also existiert in H:

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad y := \lim_{n\to\infty} g(x_n) \quad ,$$

und da g abgeschlossen ist:

$$x \in D(g) \quad \text{und} \quad g(x) = y \quad .$$

Damit folgt aber: Es existiert

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_m\|_g^2 = \lim_{n\to\infty} (\|x_n - x\|^2 + \|g(x_n) - g(x)\|^2) = 0 \quad ,$$

also $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ bezüglich $\| \quad \|_g$, und $x \in D(g)$. Also ist $D(g)$ mit $\| \quad \|_g$ komplett, also ein Hilbertraum. Wegen $g \supset f$ ist

$$D(f) \quad \subset \quad D(g) \quad ,$$

$D(f)$ ist ein Untervektorraum des Hilbertraums $D(g)$ mit $\| \quad \|_g$. Wir setzen nun

$$D(\overline{f}) \quad := \quad \overline{D(f)} \quad ,$$

wobei wir hier den Abschluss von $D(f)$ in $D(g)$ mit $\| \quad \|_g$ meinen. Dann gilt jedenfalls (c). Wir definieren

$$\overline{f} : D(\overline{f}) \longrightarrow H \quad \text{durch} \quad \overline{f}(x) := g(x) \quad ,$$

dann ist $\overline{f}$ linear und stetig, und

$$g \quad \supset \quad \overline{f} \quad \supset f \quad .$$

$D(\overline{f})$ ist mit $\| \quad \|_g = \| \quad \|_{\overline{f}}$ ein Hilbertraum, da $D(\overline{f})$ in $D(g)$ abgeschlossen ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(\overline{f})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{f}(x_n) = y$$

(der Grenzwert ist der Grenzwert in H mit $\| \quad \|$!) Dann gilt

$$\|x_n - x_m\|_{\overline{f}}^{\,2} = \|x_n - x_m\|^2 + \|\overline{f}(x_n) - \overline{f}(x_m)\|^2 \quad ,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(D(\overline{f}), \| \quad \|_{\overline{f}})$ und damit in $(D(g), \| \quad \|_g)$, und da dies ein Hilbertraum ist, konvergiert sie in $D(g)$ bezüglich $\| \quad \|_g$ gegen ein $x \in D(g)$. Da $D(\overline{f})$ abgeschlossen ist, ist $x \in D(\overline{f})$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|\overline{f}(x_n) - \overline{f}(x)\| = 0\,.$$

Also ist $\overline{f}$ abgeschlossen. Sei h eine beliebige abgeschlossene Fortsetzung von f und $x \in D(\overline{f})$. Dann gibt es wegen (c) eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D(f)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_{\overline{f}} = 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|f(x_n) - \overline{f}(x)\| = 0 \quad .$$

Wegen $h \supset f$ folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \overline{f}(x) \quad ,$$

und da h abgeschlossen ist: $h(x) = \overline{f}(x)$, also

$$h \quad \supset \quad \overline{f} \quad . \quad \text{Also gilt auch (a)} \quad .$$ □

§ 71 Differentialgleichungen im Hilbertraum

Wir richten uns in diesem Paragraphen ganz nach dem Kapitel VII "Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik" (T 457-569), von dem wir hier natürlich nur eine Kurzfassung geben können.

Bei der SCHRÖDINGERgleichung sind die linearen Operatoren Differentialoperatoren. Wir müssen daher noch definieren, was die Ableitung einer Funktion

$$t \quad \longmapsto \quad x(t) \in H \quad , \quad t \in I \subset \mathbb{R} \quad , \quad I \quad \text{ein Intervall} \quad ,$$

sein soll:

Definition 71.1 : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, H ein Hilbertraum und

$$x : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. x heißt **stetig differenzierbar** im Intervall I, mit Ableitung x', falls für jedes $t_0 \in I$ der Grenzwert

$$\prod_{\substack{h\to 0\\ t_0+h\in I}} \left\| \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} - x'(t_0) \right\| \quad = \quad 0$$

existiert und wenn $x' : \ I \longrightarrow H$ stetig ist. □

Damit wird der folgende Satz verständlich :

Satz 71.2 : Sei H ein Hilbertraum, f ein selbstadjungierter Operator mit $D(f) \subset H$ und $R(f) \subset H$. Sei $x_0 \in D(f)$. Dann ist die Funktion

$$x : \ [\,0\,;\,\infty\,) \longrightarrow H \quad , \quad x(t) \quad := \quad e^{itf}(x_0)$$

die einzige stetig differenzierbare Funktion von $[0\,;\,\infty)$ in H, die die Differentialgleichung

$$x'(t) \quad = \quad if(x(t))$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ löst, mit

$$x(t) \in D(f) \quad \text{für alle} \quad t \in [0\,;\,\infty) \quad .$$

Die Operatoren e^{itf} sind unitär.

Beweis : Siehe (T) , Satz 22.1 . □

(71.3) Mathematische Formulierung der Quantenmechanik :

Man geht in der Quantenmechanik gewöhnlich so vor: Zunächst bestimmt man auf Grund der klassischen Mechanik die "Hamilton-Funktion" des gegebenen Systems. Dann hat man eine "Übersetzungsvorschrift", um aus dieser Funktion den "Hamiltonoperator der Quantenmechanik" zu erhalten. Das ist ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum. Wir betrachten hier die Übersetzungsvorschrift von SCHRÖDINGER. Dabei nimmt man den Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ .Die Hamiltonoperatoren sind gewisse Differentialoperatoren auf diesem Raum. Man untersucht, ob diese Operatoren selbstadjungiert sind und welches Spektrum sie haben. Anschließend versucht man, die gewonnenen mathematischen Resultate physikalisch zu interpretieren und mit den Experimenten zu vergleichen.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \boxed{\text{Axiomatik der Quantenmechanik}} \\
 & & \updownarrow \\
\boxed{\text{Klassische Mechanik}} & \xrightarrow{\text{Quantisierung}} & \boxed{\text{SCHRÖDINGERdarstellung (Differentialoperatoren in Hilberträumen}} \\
 & & \updownarrow \text{ Interpretation} \\
 & & \boxed{\text{Experimentelle Resultate der Quantenmechanik}}
\end{array}$$

Wir werden uns hier mit dem mathematischen Teil, d.h. mit der Axiomatik der Quantenmechanik und der Untersuchung gewisser Differentialoperatoren, die in der Quantenmechanik auftreten, beschäftigen :

(71.4) Zur Axiomatik der Quantenmechanik : Wir werden uns bemühen, die Axiome der Quantenmechanik so zu formulieren, dass man sich physikalisch etwas darunter vorstellen kann, aber nicht muss, also dass alles auch ohne physikalische Anschauung verständlich bleibt.

Definition 71.5 : H sei ein Hilbertraum. Dann versteht man unter einem **Zustand eines quantenmechanischen Systems** einen eindimensionalen Untervektorraum von H .

Bemerkungen 71.6 : 1) In der Physik nennt man so etwas einen "reinen Zustand".

2) Eindimensionale Untervektorräume von H sind die Mengen

$$\{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C} \} \quad \text{mit} \quad x \in H \quad , \quad \|x\| = 1 \quad , \quad x \quad \text{fest.}$$

Zu einem gegebenem Untervektorraum ist das x aber nicht eindeutig bestimmt, auch nicht durch die Festlegung $\|x\| = 1$. Es gilt

$$\{ \lambda x_1 \mid \lambda \in \mathbb{C} \} = \{ \lambda x_2 \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

$$\text{für} \quad x_1 , x_2 \in H \quad \text{mit} \quad \|x_1\| = \|x_2\| = 1$$

genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = e^{i\alpha} x_2$ gibt. Einen Zustand kann man also angeben durch eine Menge

$$\{ e^{i\alpha} x \mid \alpha \in \mathbb{R} \} \quad \text{mit} \quad \|x\| = 1 \quad ;$$

festgelegt ist der Zustand aber auch durch Angabe eines Elements dieser Menge.

3) In Folgerung 68.40 hatten wir bewiesen, dass es zu zwei Hilberträumen H_1, H_2 eine unitäre lineare Abbildung

$$f \,:\, H_1 \longrightarrow H_2 \quad \text{gibt.}$$

Es kommt also in Definition 71.5 nicht darauf an, welchen Hilbertraum man nimmt. Man nimmt sich immer den, in dem man am besten rechnen kann.

Beispiel 71.7 (Harmonischer Oszillator): Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, das sich auf der reellen Achse bewegt. Der Ort des Teilchens zur Zeit t sei $x(t)$, dann ist seine Energie

$$\frac{m}{2}\,\dot{x}^2(t) \;=\; \frac{1}{2m}\cdot p(t)^2 \quad , \quad p \,=\, m\,\dot{x} \quad \text{der Impuls.}$$

Das Teilchen bewege sich in einem Kraftfeld mit der potentiellen Energie

$$V(x) \;=\; \frac{k}{2}\cdot x^2 \quad , \quad k \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

Die klassische Hamiltonfunktion h des Teilchens ist dann

$$h(x,p) \quad = \quad \frac{1}{2\,m}\cdot p^2 + \frac{k}{2}\,x^2 \quad .$$

Zur quantenmechanischen Beschreibung dieses als "harmonischen Oszillators" bezeichneten Systems müssen wir Zustände dieses Systems durch normierte Vektoren aus H beschreiben, und dem Ort x und dem Impuls p selbstadjungierte Operatoren in H zuordnen. Wie man das macht, ist ein physikalisches Problem, die Quantisierung.

Definition 71.8 : Als **Observable** (**beobachtbare Größe**) **eines quantenmechanischen Systems** bezeichnet man einen selbstadjungierten Operator f mit $D(f)$, $R(f) \subset H$ und $D(f)$ dicht in H.

Folgerung 71.9 : Zu einer Observablen f gibt es nach Folgerung 70.63 eine Spektralschar $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, so dass

$$f(x) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \;\mathrm{d}\, f_\lambda(x) \quad \text{für} \quad x \in D(f) \quad ,$$

$$D(f) \quad = \quad \{\; x \in H \;\Big|\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \;\mathrm{d}\,\|f_\lambda(x)\|^2 \;<\; \infty \;\}$$

ist. Mit dieser Spektralschar definieren wir nun :

Definition 71.10 . Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$\lambda \,:=\, \inf I \quad , \quad \mu \,:=\, \sup I \in \overline{\mathbb{R}} \quad .$$

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit einem Zustand, der durch ein $x \in H$ mit $\|x\| \,=\, 1$ gegeben ist, und einer Observablen f. Sei $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu f gehörige Spektralschar. Dann definieren wir als **Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert der Observablen f im Zustand x in das Intervall I fällt** , abgekürzt $w(x,f,I)$, die Zahl

$$\begin{aligned} &\|(f_\mu - f_{\lambda,-})(x)\|^2 && \text{für} \quad I = [\lambda;\mu] \quad , \\ &\|(f_\mu - f_\lambda)(x)\|^2 && \text{für} \quad I = (\lambda;\mu] \quad , \\ &\|(f_{\mu,-} - f_{\lambda,-})(x)\|^2 && \text{für} \quad I = [\lambda;\mu) \quad , \\ &\|(f_{\mu,-} - f_\lambda(x)\|^2 && \text{für} \quad I = (\lambda;\mu) \quad . \end{aligned}$$

Man hat dabei

$$f_{\infty,-} := \text{id} \quad \text{und} \quad f_{-\infty} = 0$$

zu setzen.

Bemerkung 71.11 : Wir wollen uns ansehen, welche Eigenschaften unsere Wahrscheinlichkeit $w(x, f, I)$ als Funktion von I hat: Sei $I = (\lambda;\mu)$, dann gilt, da $f_{\mu,-} - f_\lambda$ ein Projektor ist :

$$\begin{aligned} w(x, f, (\lambda, \mu)) &= \|(f_{\mu,-} - f_\lambda)(x)\|^2 \\ &= < (f_{\mu,-} - f_\lambda)^2(x), x > = < (f_{\mu,-} - f_\lambda)(x), x > \quad . \end{aligned}$$

Damit folgt dann :

$$\begin{aligned} w(x, f, x, f, [\lambda;\mu)) &= < (f_{\mu,-} - f_{\lambda,-})(x), x > \\ &= < (f_{\mu,-} - f_\lambda)(x), x > + < (f_\lambda - f_{\lambda,-})(x), x > \\ &= w(x, f, (\lambda;\mu)) + w(x, f, [\lambda;\lambda]) \quad , \end{aligned}$$

wobei $[\lambda;\lambda] := \{\lambda\}$ gesetzt ist. Genau so kann man zeigen: Für $\lambda < \nu < \mu$ gilt

$$w(x, f, [\lambda;\mu)) \quad = \quad w(x, f, [\lambda;\nu)) + w(x, f, [\nu;\mu)) \quad ,$$

also ist es sinnvoll, allgemein für zwei Intervalle I_1 , I_2 mit $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ zu definieren:

$$w(x, f, I_1 \cup I_2) := w(x, f, I_1) + w(x, f, I_2) \quad ,$$

denn für den Fall, dass $I_1 \cup I_2$ wieder ein Intervall ist, gilt diese Gleichung. Allgemein kann man für jede Teilmenge B von $\mathbb{R}$, die eine Vereinigung abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle ist, also für

$$B \quad = \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{mit} \quad I_j \cap I_k = \emptyset \quad \text{für} \quad j \neq k \quad ,$$

definieren:

$$w(x, f, B) \quad := \quad \sum_{j=1}^{\infty} w(x, f, I_j) \quad .$$

Für $B = \mathbb{R}$ ist nach Definition 71.10

$$w(x, f, \mathbb{R}) = \|(\text{id} - 0)(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1 \quad .$$

Wegen dieser Eigenschaften ist (wie man in der Wahrscheinlichkeitstheorie lernt) w ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf der Menge der oben definierten Teilmengen B von $\mathbb{R}$. □

Bisher haben wir definiert, was ein Zustand eines quantenmechanischen Systems ist. Wir möchten nun auch zeitliche Änderungen dieses Zustands beschreiben :

Definition 71.12 : Unter einem **quantenmechanischen System** verstehen wir einen selbstadjungierten Operator $\mathcal{H}$ in einem Hilbertraum H , zusammen mit einem eindimensionalen Untervektorraum U_0 von H, der also durch ein Element $x_0 \in H$ mit $\|x_0\| = 1$ aufgespannt wird.

$\mathcal{H}$ heißt der **Hamiltonoperator** des Systems,

U_0 heißt der **Zustand des Systems zur Zeit 0**,

und für $t \in [0;\infty)$ heißt

$$U_t := \{ \lambda x(t) \mid \lambda \in \mathbb{C} \} \quad \text{mit} \quad x(t) := e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}}(x_0)$$

der **Zustand des Systems zur Zeit t**. Dabei hat man unter $e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}}$ den in §70 für den Operator $\mathcal{H}$ definierten Operator zu verstehen. $\hbar$ ist eine positive reelle Konstante, genannt das **Plancksche Wirkungsquantum** ,

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}\,\text{Watt sec}^2 \quad .$$

Bemerkungen 71.13 : 1) Die Definitionen 71.5 , 8 , 10 und 12 bilden die vier “Axiome der Quantenmechanik”.

2) Mit x ist auch $x(t)$ normiert, denn nach Satz 71.2 ist $e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}}$ unitär.

3) Üblicherweise definiert man ein quantenmechanisches System nicht durch Definition 71.12, sondern durch die Schrödinger-Gleichung. Das ist aber dasselbe, denn nach Satz 71.2 ist

$$x(t) = e^{itf}(x_0) \quad \text{für} \quad t \in [0;\infty) \quad , \quad f := -\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$x'(t) = i\,f(x(t)) \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 \quad ,$$

also von $i\,\hbar x'(t) = \mathcal{H}(x(t))\,,\, x(0) = x_0$.

Das ist die Schrödinger-Gleichung. Definition 71.12 ist nur insofern allgemeiner, als dass nicht notwendig

$$x_0 \in D(\mathcal{H})$$

vorausgesetzt wurde.

Definition 71.14 : Ein Zustand eines quantenmechanischen Systems heißt **stationär** , wenn

$$U_t = \text{const.} \quad \text{für alle} \quad t \in [0;\infty)$$

gilt. Für unsere Beschreibung eindimensionaler Untervektorräume durch normierte Elemente aus H bedeutet das: Für jedes $t \geq 0$ gibt es eine reelle Zahl $\rho(t)$ mit

$$e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}}(x_0) = x(t) = e^{i\rho(t)} \cdot x_0 \quad .$$

Bei der Suche nach den (physikalisch wichtigen) stationären Zuständen muss man also diese Gleichung lösen.

Satz 71.15 : Gegeben sei ein quantenmechanisches System, gekennzeichnet durch seinen Hamiltonoperator $\mathcal{H}$. Ein Zustand dieses Systems, gekennzeichnet durch $x \in H$ mit $\|x\| = 1$, ist genau dann stationär, wenn x ein Eigenvektor des Operators $\mathcal{H}$ ist.

Beweis : Zur Abkürzung setzen wir $f := -\frac{1}{\hbar}\mathcal{H}$. f hat dieselben Eigenvektoren wie $\mathcal{H}$ und ist auch selbstadjungiert.

1) x sei ein Eigenvektor von $\mathcal{H}$, also von f, also

$$f(x) = \rho x \quad \text{mit} \quad \rho \in \mathbb{R} \quad .$$

Zu f gibt es nach Folgerung 70.63 eine Spektralschar $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, so dass

$$f(y) \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\, f_\lambda(y) \quad \text{für} \quad y \in D(f)$$

ist. Nach Satz 70.40 (den man auch noch für selbstadjungierte Operatoren beweisen müsste, die nicht auf ganz H definiert sind,) ist

$$(f_\rho - f_{\rho,-})(x) = x$$

und damit folgt aus den Axiomen (Sch 1) und (Sch 4) der Spektralschar aus Folgerung 70.62 :

$$(*) \qquad\qquad f_\lambda(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für}\, \lambda < \rho \quad \text{und} \\ x & \text{für}\, \lambda \geq \rho \quad . \end{cases}$$

Wegen $x \in D(f)$ folgt nach Satz 70.36 :

$$\|e^{itf}(x) - e^{i\rho t}x\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{it\lambda} - e^{i\rho t}|^2 \,\mathrm{d}\, \|f_\lambda(x)\|^2 \quad .$$

Für $\lambda = \rho$ ist der Integrand 0, also

$$\|e^{itf}(x) - e^{i\rho t}x\|^2 = \left(\int\limits_{(-\infty\,;\,\rho)} + \int\limits_{(\rho\,;\,\infty)} \right) |e^{it\lambda} - e^{i\rho t}|^2 \,\mathrm{d}\, \|f_\lambda(x)\|^2$$

und das RIEMANN-STIELTJES-Integral ist 0, wenn hinter d ... eine Konstante (d.h., konstant als Funktion von λ) steht, was nach $(*)$ der Fall ist, also

$$e^{itf}(x) \quad = \quad e^{i\rho t} \cdot x \quad .$$

Nach Definition 71.14 beschreibt x einen stationären Zustand.

2) Den Beweis der umgekehrten Richtung sparen wir uns, weil er ziemlich lang ist, siehe (T), Satz 34.1 . □

Beispiel 71.16 : Für den harmonischen Oszillator hatten wir schon in 71.7 die klassische Hamilton-Funktion in Orts- und Impulskoordinaten aufgestellt:

$$h(x,p) \quad = \quad \frac{1}{2\,m}p^2 + \frac{k}{2}x^2 \quad .$$

Auf Grund physikalischer Quantisierungsvorschriften ersetzt man x und p durch Operatoren in einem der Problemstellung angepassten Hilbertraum H . In unserem Beispiel wählt man sinnvollerweise

$$H \quad := \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad .$$

Die Ortskoordinate x ersetzt man durch den Operator f , der durch

$$(f(\varphi))(x) \;:=\; x \cdot \varphi(x) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \;,\; x \in \mathbb{R}$$

definiert ist, die Impulskoordinate durch den Operator g ,

$$(g(\varphi))(x) \;:=\; -\,i\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\varphi(x) \quad .$$

Den Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ der Quantenmechanik erhält man dann durch Einsetzen in $h(x,p)$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}\varphi)(x) \;&:=\; \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\right)^2\varphi(x) + \frac{k}{2}x^2 \cdot \varphi(x) \\ &= \; -\frac{1}{2m}\hbar^2\frac{\mathrm{d}^{\,2}}{\mathrm{d}\,x^2}\varphi(x) + \frac{k}{2}x^2 \cdot \varphi(x) \quad .\end{aligned}$$

Man muss noch geeignete Definitionsbereiche von f und $\mathcal{H}$ suchen, so dass diese Operatoren selbstadjungiert werden. Für f nimmt man

$$D(f) \;:=\; \{\; \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \;\bigm|\; \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \psi(x) \;:=\; x\varphi(x) \;\} \quad ,$$

dann gilt für $\varphi, \psi \in D(f)$ und das Skalarprodukt $<\ ,\ >$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}<\, f(\varphi), \psi \,> &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{x\varphi(x)}\psi(x)\;\mathrm{d}\,x \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\,x\,\psi(x)\;\mathrm{d}\,x \\ &= <\, \varphi, f(\psi) \,> \quad ,\end{aligned}$$

also erfüllt f die Bedingung (Sy). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, und $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, dann ist die durch

$$\psi(x) \quad := \quad \frac{\varphi(x)}{x-\lambda}$$

definierte Funktion ψ in $D(f)$, denn $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und η , $\eta(x) \;:=\; x\psi(x)$, ist in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Nun gilt

$$\begin{aligned}(f - \lambda\,\mathrm{id})(\psi) \;&=\; \varphi \quad , \qquad \text{also} \\ R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \quad &= \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad .\end{aligned}$$

Da das auch für $\overline{\lambda}$ statt λ gilt, ist f nach Hilfssatz 70.56 selbstadjungiert. Mit Hilfe des Operators f kann man nach Definition 71.10 die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass sich das Teilchen in einem gegebenen Intervall I aufhält. Nun werden wir gleich beweisen: Sei $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von f , dann ist

$$e_\lambda(\varphi) \;=\; \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda]} \cdot \varphi \quad \text{für} \quad \varphi \in H \quad .$$

Also ist nach Definition 71.10 die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich im Zustand x das Teilchen im Intervall $(\lambda; \mu]$ aufhält:

$$w(\varphi, f, (\lambda;\mu]) \; = \; \|(e_\mu - e_\lambda)(\varphi)\|^2$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\mu]}(x) - \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda]}(x)|^2 |\varphi(x)|^2 \;\mathrm{d}\,x \; = \; \int\limits_{\lambda}^{\mu} |\varphi(x)|^2 \;\mathrm{d}\,x \quad .$$

Den Hamilton-Operator des Systems

$$\mathcal{H} \; = \; \frac{\hbar^2}{2\,m} \frac{d^2}{\mathrm{d}\,x^2} + \frac{k}{2} \cdot x^2 \cdot$$

werden wir noch genauer untersuchen. Zunächst wollen wir sehen, wie die Spektralschar des Ortsoperators f aussieht :

Hilfssatz 71.17 : Sei

$$(f(\varphi))(x) \; := \; x \cdot \varphi(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \varphi \in D(f) \quad ,$$

$$D(f) \; := \; \{ \; \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \; \Big| \; \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \psi(x) \; := \; x \cdot \varphi(x) \; \} \quad ,$$

also f der eindimensionale Ortsoperator, so ist f ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Die Spektralschar von f ist $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$,

$$(*) \qquad (e_\lambda(\varphi))(x) \; := \; \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda]}(x) \cdot \varphi(x) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad .$$

Beweis : Dass f selbstadjungiert ist, haben wir gerade gesehen.
1) Wir zeigen, dass $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ überhaupt eine Spektralschar ist:
Man sieht an $(*)$, dass e_λ als Funktion von φ linear und stetig ist,

$$\|e_\lambda\| \; \leq \; 1 \quad .$$

Für $\varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$< \, e_\lambda(\varphi), \psi \, >= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathbf{1}_{(-\infty\;;,\lambda]}(x) \cdot \varphi(x)} \cdot \psi(x) \;\mathrm{d}\,x \; =< \, \varphi, e_\lambda(\psi) \, > \quad ,$$

und da e_λ auf ganz $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ definiert ist, ist e_λ symmetrisch, insbesondere selbstadjungiert,

$$e_\lambda^* \; = \; e_\lambda \quad .$$

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \; \leq \; \mu$ gilt

$$((e_\mu \circ e_\lambda)(\varphi))(x) \; = \; ((e_\lambda \circ e_\mu)(\varphi))(x)$$

$$= \; \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\mu]}(x) \cdot \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda]}(x) \cdot \varphi(x) \; = \; \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda]}(x) \cdot \varphi(x) \; = \; (e_\lambda(\varphi))(x) \, ,$$

also gilt nach Satz 70.21 : $e_\lambda \; \leq \; e_\mu$, und insbesondere

$$e_\lambda^2 \; = \; e_\lambda \quad ,$$

also sind die e_λ nach Satz 68.44 Projektoren. Auch die Eigenschaften (Sch 3) und (Sch 4) aus Folgerung 70.63,

$$\lim_{\mu\downarrow\lambda} e_\mu = e_\lambda \quad , \quad \lim_{\lambda\to-\infty} e_\lambda = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda\to\infty} e_\lambda = \mathrm{id}$$

folgen aus den Eigenschaften der charakteristischen Funktion.
2) Da $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar ist, haben wir den Operator

$$g := \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \,\mathrm{d}\, e_\lambda \quad \text{mit}$$

$$D(g) := \{ \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \;\Big|\; \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \,\mathrm{d}\, \|e_\lambda(\varphi)\|^2 < \infty \}$$

nach Folgerung 70.64, und wir wollen zeigen, dass $f = g$ ist : Seien $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}\,,\,\alpha < \beta$, dann gilt nach Definition 70.32 für beliebiges $\varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{[\alpha;\beta]} \lambda^2 \,\mathrm{d} < e_\lambda(\varphi), \psi > = \lim_{\eta(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}^2 (< e_{\mu_k}(\varphi), \psi > - < e_{\mu_{k-1}}(\varphi), \psi >)$$

$$= \lim_{\eta(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\mu_k]} - \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\mu_{k-1}]}\right)(x)\overline{\varphi(x)}\psi(x) \,\mathrm{d}\,x \quad ,$$

das Integral hier ist das Lebesgue-Integral, also

$$\int_{[\alpha;\beta]} \lambda^2 \,\mathrm{d} < e_\lambda(\varphi), \psi > = \lim_{\eta(\mu)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}^2 \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} \overline{\varphi(x)} \cdot \psi(x) \,\mathrm{d}\,x \quad , \qquad \text{also}$$

$$(**) \qquad \int_{[\alpha;\beta]} \lambda^2 \,\mathrm{d} < e_\lambda(\varphi), \psi > = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \overline{\varphi(x)}\, \psi(x) \,\mathrm{d}\,x \quad .$$

Wir wollen hier $\psi := \varphi$ einsetzen; dafür gilt

$$< e_\lambda(\varphi), \varphi > = < e_\lambda(\varphi), e_\lambda(\varphi) > = \|e_\lambda(\varphi)\|^2 \quad ,$$

und für $\alpha \to -\infty\,,\,\beta \to \infty$ folgt aus $(**)$: Ist $\varphi \in D(g)$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \,\mathrm{d}\, \|e_\lambda(\varphi)\|^2 = \|g(\varphi)\|^2 < \infty \quad ,$$

also gehört nicht nur φ, sondern auch die Funktion ψ,

$$\psi(x) := x \cdot \varphi(x)$$

zu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, also $\varphi \in D(f)$ für $\varphi \in D(g)$, also

$D(g) \subset D(f)$.
Sei umgekehrt $\varphi \in D(f)$, dann ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x \; < \; \infty \quad ,$$

und, wieder nach $(**)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 \; \mathrm{d} \, \|e_\lambda(\varphi)\|^2 \; < \; \infty \quad ,$$

also $\varphi \in D(g)$. Analog zu $(**)$ rechnet man aus :

$$\int_{[\alpha;\beta]} \lambda \; \mathrm{d} \; < \; e_\lambda(\varphi), \psi \; > = \int_{\alpha}^{\beta} x \, \overline{\varphi(x)} \, \psi(x) \; \mathrm{d}\, x$$

für $\varphi \in D(f) \; = \; D(g)$ und $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Also folgt nach Satz 70.35 :

$$< \; g(\varphi), \psi \; > = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \; \mathrm{d} \; < \; e_\lambda(\varphi), \psi \; > = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \overline{\varphi(x)} \, \psi(x) \; \mathrm{d}\, x \; = < \; f(\varphi), \psi \; > ,$$

speziell für $\psi := g(\varphi) - f(\varphi)$, also

$$f(\varphi) \; = \; g(\varphi) \quad . \qquad \square$$

Bemerkung : Nach Hilfssatz 70.38 wissen wir, dass zu jeder Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ die Operatoren

$$e_{\lambda,-} \; := \; \lim_{\mu \uparrow \lambda} e_\mu$$

existieren. In unserem Fall ist

$$(e_{\lambda,-}(\varphi))(x) \; = \; \lim_{\mu \uparrow \lambda} \left(\mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\mu]}(x) \cdot \varphi(x) \right) \; = \; \mathbf{1}_{(-\infty\,;\,\lambda)}(x) \cdot \varphi(x) \, ,$$

und da man in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ Funktionen nicht unterscheidet, die sich nur in einem Punkt unterscheiden:

$$e_{\lambda,-}(\varphi) \; = \; e_\lambda(\varphi) \quad .$$

Nach Satz 70.40 heißt das: f besitzt keine Eigenwerte. Das hätte man auch direkt sehen können: Angenommen, φ ist ein Eigenvektor von f , zum Eigenwert λ , dann ist

$$(f(\varphi))(x) \; = \; \lambda \cdot \varphi(x) \quad , \qquad \text{also}$$

$$x \, \varphi(x) \; = \; \lambda \, \varphi(x) \quad , \qquad \text{also} \quad (x - \lambda)\varphi(x) \; = \; 0 \quad .$$

Das geht aber nur für $\varphi \; = \; 0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Bemerkung 71.18 : Wir wollen nun den Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators $\mathcal{H}$,

$$(\mathcal{H}(\varphi))(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\mathrm{d}^{\,2}}{\mathrm{d}\,x^2}\varphi(x) + \frac{k^2}{2}x\,\varphi(x)$$

näher untersuchen. Bis auf physikalische Konstanten ist das der Operator f ,

$$(f(\varphi))(x) \;:=\; -\varphi''(x) + x^2\,\varphi(x) \quad .$$

Dieser Operator heißt **Hermitescher Differentialoperator** .

Satz 71.19 : Sei Ω offen im $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen φ mit kompaktem Träger

$$\operatorname{Supp}\varphi \;=\; \overline{\{\; x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \varphi(x) \neq 0 \;\}} \;\subset\; \Omega \quad .$$

Dann ist $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ eine dichte Teilmenge von $\mathrm{L}^2(\Omega)$.
Beweis : Für $\Omega \;=\; \mathbb{R}^n$ steht das als Corollar zu Satz 10.3 in (G 93) . Für beliebiges Ω siehe (T), Satz 3.6 . □

Speziell für $q(x) \;:=\; x^2 + 1$ ist der nächste Satz ein Satz über den HERMITEschen Differentialoperator :

Satz 71.20 : Sei $q \;:\; \mathbb{R} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$ stetig,

$$q(x) \;\geq\; 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{|x|\to\infty} q(x) \;=\; \infty \quad .$$

Sei f definiert durch

$$D(f) \;:=\; \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \;\subset\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad , \quad R(f) \;\subset\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad ,$$

$$(f(\varphi))(x) \;:=\; -\varphi''(x) + q(x)\,\varphi(x) \quad ,$$

dann gilt

a) $<\; f(\varphi), \varphi \;> \;\geq\; \|\varphi\|^2$ für alle $\varphi \in D(f)$,

b) f erfüllt die Bediingung (Sy) aus Definition 70.56.

c) $\overline{f}$, der in Satz 70.66 definierte Abschluss von f , ist selbstadjungiert.

d) Es ist $SC_{\overline{f}} \;=\; \emptyset$, also $S_{\overline{f}} \;=\; SP_{\overline{f}}$.

Beweis : c) und d) müssen wir weglassen, da unsere Kenntnisse über selbstadjungierte Operatoren (immer noch) zu gering sind.
a) und b) : Es gilt für $\varphi, \psi \in D(f)$, wenn man partiell integriert :

$$<\; f(\varphi), \psi \;>= \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{(-\varphi''(x) + q(x)\cdot\varphi(x))}\cdot\psi(x)\;\mathrm{d}\,x$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (\overline{\varphi'(x)}\cdot\psi'(x) + q(x)\cdot\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x))\;\mathrm{d}\,x \quad ,$$

denn φ und ψ sind 0 außerhalb eines hinreichend großen Intervalls. Also folgt einerseits

$$< f(\varphi), \psi > = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \cdot (-\psi''(x) + q(x)\, \psi(x))\, \mathrm{d}\, x \; = < \varphi, f(\psi) > \quad ,$$

d.h. f erfüllt (Sy) . Andererseits folgt

$$< f(\varphi), \varphi > = \int\limits_{\mathbb{R}} (|\varphi'(x)|^2 + q(x)\, |\varphi(x)|^2)\, \mathrm{d}\, x$$

und wegen $q(x) \; \geq \; 1$:

$$< f(\varphi), \varphi > \; \geq \; \int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\, \mathrm{d}\, x \; = \; \|x\|^2 \quad . \qquad \Box$$

Man erhält damit für den HERMITEschen Differentialoperator den

Hilfssatz 71.21 : Sei $D(f) \; := \; \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \; \subset \; \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,

$$(f(\varphi))(x) \; := \; -\varphi''(x) + x^2 \varphi(x) \quad \text{für} \quad \varphi \in D(f) \quad ,$$

dann ist $R(f) \; \subset \; \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ und
a) $\overline{f}$ selbstadjungiert ,
b) $SC_{\overline{f}} \; = \; \emptyset$.

Beweis : Den Satz 71.20 können wir zwar nicht auf f , aber auf $f + \mathrm{id}$,

$$((f + \mathrm{id})(\varphi))(x) \; = \; -\varphi''(x) + (x^2 + 1)\varphi(x)$$

anwenden, denn für $q(x) \; := \; x^2 + 1$ gilt $q(x) \; \geq \; 1$. Nach Satz 71.20 ist dann $\overline{f + \mathrm{id}}$ selbstadjungiert,

$\overline{f + \mathrm{id}} \; = \; \overline{f} + \mathrm{id}$. Für $\overline{f}$ gilt dann

(Di) $\overline{D(\overline{f})} \; = \; H$ wegen $D(\overline{f}) \; = \; D(\overline{f} + \mathrm{id})$,

(Sy) $\forall\, x, y \in D(\overline{f}) \; : \; < x, \overline{f}(y) > = < x, \overline{f}(y) + y > - < x, y > =$

$= < (\overline{f} + \mathrm{id})(x), y > - < x, y > = < \overline{f}(x), y >$, und

(Se) $D(\overline{f}) \; = \; D(\overline{f} + \mathrm{id}) \; = \; D((\overline{f} + \mathrm{id})^*) \; = \; D(\overline{f}^* + \mathrm{id}) \; = \; D(\overline{f}^*)$,

also ist $\overline{f}$ nach Definition 70.56 selbstadjungiert. Da $SC_{\overline{f}+\mathrm{id}} \; = \; \emptyset$ ist, und da

$$\lambda \in S_{\overline{f}} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda + 1 \in S_{\overline{f}+\mathrm{id}}$$

gilt, folgt aus Satz 71.20 auch

$$SC_{\overline{f}} \quad = \quad SC_{\overline{f}+\mathrm{id}} \quad = \quad \emptyset \quad . \qquad \Box$$

Man muss also nur Eigenwerte und Eigenvektoren des HERMITEschen Differentialoperators f berechnen. Das sind im Wesentlichen Rechnungen mit Differentialgleichungen, wobei man die Differentiationen im LEBESGUE-Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \cdot \psi(x)\, \mathrm{d}\, x$ auszuführen hat, also Differentialgleichungen für Distributionen. Wir wollen die Rechnungen nicht im Einzelnen ausführen, sondern geben nur das Ergebnis an :

Satz und Definition 71.22 : Sei f der in Hilfssatz 71.21 definierte HERMITEsche Differentialoperator. Dann hat f genau die Eigenwerte

$$\lambda_n = 2n+1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Diese Eigenwerte haben die Vielfachheit 1 . Die Eigenvektoren zu λ_n sind die **Hermiteschen Funktionen**

$$h_n(x) \quad = \quad c_n \, e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} \left(e^{-x^2} \right) \quad \text{mit} \quad c_n \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

(Es gilt $h_n(x) = c_n e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, wobei die H_n die in (F 132) definierten HERMITEschen Polynome sind).
Beweis siehe (T), Satz 24.2 . □

Bemerkung 71.23 : Man kann die c_n so wählen, dass

$$\|h_n\| \quad = \quad 1$$

in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ gilt. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, haben wir mit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalsystem in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Da $SC_{\overline{f}} = \emptyset$ ist, kann man auch noch zeigen, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem ist; man kann also jedes $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ "nach HERMITEschen Funktionen entwickeln" :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} < h_n, \varphi > \cdot h_n(x) \quad .$$

- Wir betrachten wieder unser Beispiel aus der Quantentheorie :

Beispiel 21.16 : Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators war

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, x^2} + \frac{k}{2} x^2 \cdot \quad ,$$

wobei noch nicht klar war, für welche $\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dieser Operator überhaupt definiert ist. Wir nehmen nun $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$; das ist ein dichter Untervektorraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, und setzen

$$D(\mathcal{H}_0) \quad := \quad \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \quad ,$$

$$(\mathcal{H}_0(\varphi))(x) \quad := \quad -\frac{\hbar^2}{2\,m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, x^2} \varphi(x) + \frac{k}{2} x^2 \varphi(x) \quad .$$

Nach Hilfssatz 71.21 ist dann der Operator $\overline{f}$ mit

$$f \quad := \quad \frac{2\,m}{\hbar^2} \mathcal{H}_0$$

selbstadjungiert, also auch $\overline{\mathcal{H}_0}$ selbstadjungiert. Als Hamiltonoperator wählen wir nun

$$\mathcal{H} \quad := \quad \overline{\mathcal{H}_0} \quad ,$$

dann ist $\mathcal{H}$ nach Hilfssatz 71.21 ein selbstadjungierter Operator mit $SC_{\mathcal{H}} = \emptyset$. Wir wollen die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathcal{H}$ bestimmen. Dabei muss man die Konstanten $\frac{\hbar^2}{2\,m}$ und $\frac{k}{2}$ beachten, die in dem HERMITEschen Differentialoperator von Satz 71.22 nicht standen. Sei

$$c \quad := \quad \frac{\sqrt[4]{k\,m}}{\sqrt{\hbar}} \quad .$$

Die Funktionen h_n, $n \in \mathbb{N}_0$ gehören zwar nicht zu $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, aber (was wir hier nicht beweisen wollen) zu $D(\mathcal{H})$, dem Abschluss von $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ bezüglich $\| \quad \|_{\mathcal{H}}$, wobei

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}}{}^2 = < \varphi, \varphi > + < \mathcal{H}(\varphi), \mathcal{H}(\varphi) >$$

ist. Es gilt für $u_n(x) := h_n(c\,x)$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}(u_n))(x) &= -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}\,h_n(c\,x) + \frac{k}{2}\,x^2 h_n(c\,x) \\
&= \frac{\hbar^2}{2\,m}\,c^2(-h_n''(c\,x) + \frac{mk}{\hbar^2\,c^4}\,(c\,x)^2\,h_n(c\,x)) \\
&= \frac{\hbar^2}{2\,m}\,c^2(-h_n''(c\,x) + (c\,x)^2\,h_n(c\,x)) \quad .
\end{aligned}$$

Darin bedeutet $'$ die Differentiation von $h_n(y)$ nach y. Nach Satz 71.22 gilt

$$-h_n''(y) + y^2 h_n(y) \quad = \quad (2\,n+1)\,h_n(y) \quad , \qquad \text{also}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}(u_n))(x) &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,(2\,n+1)\,h_n(c\,x) \\
&= \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,(2\,n+1)\,u_n(x) \quad .
\end{aligned}$$

Also bilden die Funktionen u_n, $u_n(x) = h_n(c\,x)$ mit $c = \frac{\sqrt[4]{k\,m}}{\sqrt{\hbar}}$ bei passender Wahl der Konstanten c_n in Definition 71.22 ein (nach Bemerkung 71.23 sogar vollständiges) Orthonormalsystem von Eigenvektoren des Operators $\mathcal{H}$. Nach Satz 71.22 gibt es außer den Eigenwerten

$$\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

keine weiteren Eigenwerte von $\mathcal{H}$. Ein stationärer Zustand des harmonischen Oszillators wird nach Satz 71.15 gegeben durch eine Funktion

$$\varphi_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \|\varphi_n\| = 1 \quad \text{in} \quad \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{und}$$

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \, h_n(cx)$$

mit einer Normierungskonstanten α_n. Damit kann man dann nach Definition 71.10 die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass der Messwert für den Ort des Teilchens im Zustand φ_n in das Intervall I fällt, denn wir kennen ja die Spektralschar des Ortsoperators.

- Um den Zusammenhang mit der Physik klarzumachen, wollen wir zwei Interpretationsregeln der Quantenmechanik angeben, die nicht direkt zum mathematischen Teil der Quantenmechanik gehören :

(71.24) Interpretationsregel 1 : Ein zeitlich unveränderliches quantenmechanisches System befindet sich in einem stationären Zustand. Der Zustand kann dann gekennzeichnet werden durch einen Eigenvektor des zugehörigen Hamiltonoperators $\mathcal{H}$. Der zu dem Eigenvektor gehörige Eigenwert gibt die **Energie** des Systems an. Der **Normalzustand** ist der Zustand kleinster Energie.

Bemerkung 71.25 : Diese Interpretationsregel ist nur sinnvoll, wenn

a) der Operator $\mathcal{H}$ Eigenwerte besitzt,

b) ein kleinster Eigenwert existiert, oder zumindest das Infimum der Eigenwerte.

(71.26) Interpretationsregel 2 : Geht ein quantenmechanisches System, das sich in einem stationären Zustand mit der Energie E_1 befindet, in einen stationären Zustand mit niedrigerer Energie E_2 über, so entsteht elektromagnetische Strahlung der Frequenz

$$\nu = \frac{1}{2\pi\hbar}(E_1 - E_2) \quad .$$

Beispiel 71.16 : Beim harmonischen Oszillator sind also folgende Energien möglich :

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Die möglichen Frequenzen der abgegebenen elektromagnetischen Strahlung sind demnach

$$\nu_{n,m} = \frac{1}{2\pi\hbar}(E_n - E_m) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,(n-m) \quad .$$

Mit $\nu := \nu_{1,0} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ folgt

$$E_n = h\,\nu\cdot\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{mit} \quad h := 2\pi\hbar \quad .$$

- Unser Ziel ist es nun, die HEISENBERGsche Unschärferelation mathematisch zu formulieren. Dazu brauchen wir einige Begriffe aus der Statistik :

Definition 71.27 : Gegeben sei ein quantenmechanisches System im Zustand x , $x \in H$, $\|x\| = 1$, und eine Observable, also ein selbstadjungierter Operator f im Hilbertraum H . Ist $x \in D(f)$, so heißt

$$< x, f(x) >$$

der **Erwartungswert der Observablen f im Zustand x**. Die Zahl

$$\delta(x, f) := \| f(x) - < x, f(x) > x \|$$

heißt die **Streuung** und $\delta(x, f)^2$ die **Varianz von f im Zustand x**.

Beispiel 71.28 : Sei f ein Operator mit "reinem Punktspektrum", also $SC_f = \emptyset$, und **einfachen** Eigenwerten

$$\lambda_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren von f , so gilt für $x \in H$ mit $\|x\| = 1$:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 = 1 \quad .$$

Nach Satz 70.40 gilt für die Spektralschar $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ von f:

$$(e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x_n) = x_n \quad .$$

Wegen $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$ folgt daraus

$$(e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x_m) = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m \, , \quad \text{also}$$

$$(e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x) = c_n x_n \quad .$$

Nach Definition 71.10 ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert von f im Zustand x gleich λ_n ist :

$$w(x, f, [\lambda_n ; \lambda_n]) = \| (e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x) \|^2 = |c_n|^2 \quad .$$

Wegen $x \in D(f)$ erhalten wir für den Erwartungswert von f im Zustand x:

$$< x, f(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d} < x, e_\lambda(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d} \, \|e_\lambda(x)\|^2 \quad .$$

Da $S_f = SP_f$ ist, folgt nach Satz 70.37 : Ist λ kein Eigenwert von f , so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$e_{\lambda+\varepsilon}(x) = e_{\lambda-\varepsilon} \quad , \quad \text{und damit}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}\, \|e_\lambda(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[\lambda_n;\lambda_n]} \lambda \, \mathrm{d}\, \|e_\lambda(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \|(e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x)\,\|^2 \,,$$

also

$$(1) \qquad \underline{< x, f(x) > = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, w(x, f, [\lambda_n, ; \lambda_n])} \quad .$$

Auch die Varianz von f im Zustand x kann man ausrechnen. Nach Satz 70.36 gilt

$$\delta(x,f)^2 = \|(f- < x, f(x) > \mathrm{id})(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - < x, f(x) > |^2 \, \mathrm{d}\, \|e_\lambda(x)\|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - < x, f(x) > |^2 \, \|(e_{\lambda_n} - e_{\lambda_n,-})(x)\|^2 \quad , \qquad \text{also}$$

$$(2) \qquad \underline{\delta(x,f)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n - < x, f(x) > |^2 \; w(x, f, [\lambda_n, ; \lambda_n])} \quad .$$

Aus der Definition der Varianz, und da $f- < x, f(x) > \cdot \mathrm{id}$ selbstadjungiert ist, folgt noch

$$(3) \qquad \underline{\delta(x,f)^2 = < (f- < x, f(x) > \mathrm{id})^2 x, x >} \quad .$$

<u>**(71.29) Physikalische Interpretation :**</u> Wir sehen $\delta(x,f)$ als ein Maß dafür an, mit welcher Schärfe (Genauigkeit) der Erwartungswert von f bei einer Messung im Zustand x angenommen wird. Die Messung im Zustand x heißt <u>**scharf**</u> , wenn

$$\delta(x,f) = 0$$

ist, also nach Definition 71.27 genau dann, wenn

$$f(x) = < x, f(x) > x$$

ist. Dann ist also x ein Eigenvektor von f . Sei umgekehrt x ein normierter Eigenvektor von f , dann gilt

$$f(x) = \mu x \quad , \quad \|x\| = 1 \,, \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R} \,, \quad \text{also}$$

$$< x, f(x) > = \mu \|x\|^2 = \mu \,, \quad \text{also}$$

$$f(x) = \mu x = < x, f(x) > x \quad .$$

Eine Messung von f im Zustand x ist also genau dann scharf, wenn x ein

Eigenvektor der Observablen f ist. Der zu x gehörige Eigenwert von f ist dabei

$$\mu = < x, f(x) > \quad ,$$

also der Erwartungswert von f im Zustand x.

- Nach Satz 70.40 gilt:
x ist Eigenvektor von f zum Eigenwert $\mu \iff x = (e_\mu - e_{\mu,-})(x)$,
wobei $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu f gehörige Spektralschar ist, und nach Definition 71.10 ist das gleichbedeutend mit

$$w(x, f, \{\mu\}) = \|(e_\mu - e_{\mu,-})(x)\|^2 = \|x\|^2 = 1 \quad .$$

Eine Messung von f im Zustand x ist also genau dann scharf, wenn man mit Wahrscheinlichkeit 1 als Messwert für f die Zahl $\mu = < x, f(x) >$, den Erwartungswert von f, erhält.

Folgerung 71.30 : Speziell für den Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ sagt die letzte Bemerkung: Wir können die Energie eines quantenmechanischen Systems genau dann scharf messen, wenn sich das System in einem stationären Zustand befindet.

- Zur Vorbereitung der HEISENBERGschen Unschärferelation brauchen wir noch den

Satz 71.31 : f und g seien zwei Observable und x der Zustand eines quantenmechanischen Systems, $\|x\| = 1$. Sei außerdem

$$x \in D(f) \cap D(g) \quad , \quad f(x) \in D(g) \quad \text{und} \quad g(x) \in D(f) \quad .$$

Dann gilt

$$\delta(x, f) \cdot \delta(x, g) \geq \frac{1}{2} | < x, (g \circ f - f \circ g)(x) > | \quad .$$

Beweis : Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&< x, (g \circ f - f \circ g)(x) > \\
&\quad = < x, (g-\beta\,\mathrm{id})\circ(f-\alpha\,\mathrm{id})(x) - (f-\alpha\,\mathrm{id})\circ(g-\beta\,\mathrm{id})(x) > \\
&\quad = < x, (g-\beta\,\mathrm{id})\circ(f-\alpha\,\mathrm{id})(x) > - < (g-\beta\,\mathrm{id})\circ(f-\alpha\,\mathrm{id})(x), x > \\
&\quad = 2\,i\ \mathrm{Im} < x, (g-\beta\,\mathrm{id})\circ(f-\alpha\,\mathrm{id})(x) > \quad , \qquad \text{also}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
| < x, (g \circ f - f \circ g)(x) > | &\leq 2\,| < (g - \beta\,\mathrm{id})(x), (f - \alpha\,\mathrm{id})(x) > | \\
&\leq 2\,\|(g - \beta\,\mathrm{id})(x)\| \cdot \|(f - \alpha\,\mathrm{id})(x)\| \quad ,
\end{aligned}$$

und mit $\alpha :=< x, f(x) >$, $\beta :=< x, g(x) >$ folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 71.32 : Seien f und g zwei selbstadjungierte Operatoren, so dass für alle $x \in H$ mit

$$(*) \qquad x \in D(f) \cap D(g) \quad , \quad f(x) \in D(g) \quad , \quad g(x) \in D(f)$$

gilt:

$$(g \circ f - f \circ g)(x) = \rho x$$

mit einer festen komplexen Zahl ρ . Dann folgt aus Satz 71.31 :

$$\delta(x, f) \cdot \delta(x, g) \geq \frac{|\rho|}{2} \quad .$$

Das ist die abstrakte Formulierung der HEISENBERGschen Unschärferelation: Sei $\rho \neq 0$, dann gibt es kein $x \in H$, das $(*)$ erfüllt und Eigenvektor von f oder g ist. Denn sonst wäre nach (71.29)

$$\delta(x, f) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \delta(x, g) = 0 \quad ,$$

im Widerspruch zu $\delta(x, f) \cdot \delta(x, g) \geq \dfrac{|\rho|}{2}$. Diese Formel sagt noch etwas mehr aus : In dem Maße, wie $\delta(x, f)$ klein wird, wird $\delta(x, g)$ groß. D.h., wenn man bei den Messergebnissen von f nur geringe Streuung hat, hat man bei den Messergebnissen von g eine große Streuung.

Bemerkung 71.33 : In der Physik formuliert man die HEISENBERGsche Unschärferelation zunächst nur für den Orts- und den Impulsoperator. Dazu müssen wir den Impulsoperator auf einem geeigneten Hilbertraum definieren. Wie schon in §68 sei

$$\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_A f(x)\, \mathrm{d}^n x < \infty$$

$$\text{für jede kompakte Teilmenge } A \subset \mathbb{R}^n \quad \} \text{, und}$$

$$\mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) / \mathcal{N} \quad ,$$

$$\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid f = 0 \quad \text{fast überall} \} \quad .$$

Jedes $f \in \mathrm{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definiert eine Distribution : Für

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n) \qquad \text{sei} \qquad T_f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}^n x \quad ,$$

dann ist

$$T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Linearform auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, also eine Distribution. Für

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n \quad \text{und} \quad |\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

war die α-te Ableitung von T_f definiert durch

$$(\mathrm{D}^\alpha T_f)[\varphi] := (-1)^{|\alpha|}\, T_f[\mathrm{D}^\alpha \varphi] \quad .$$

Es kann nun sein, dass es ein $g^\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\mathrm{D}^\alpha T_f = T_{g^\alpha} \quad ,$$

dass also insbesondere $\mathrm{D}^\alpha T_f$ wieder eine **reguläre** Distribution ist, dann sagen wir: Es existiert die <u>α**-te Distributionsableitung**</u> $g^\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ für $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Dabei wissen wir aus der Theorie der Distributionen : wenn alle partiellen Ableitungen

$$\mathrm{D}^\beta f \quad \text{für} \quad 0 \leq |\beta| \leq |\alpha|$$

existieren, dann ist $\mathrm{D}^\alpha f$ gleich dieser $\alpha-$ten Distributionsableitung g^α (genauer: die Äquivalenzklassen in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ sind gleich), denn es ist dann

$$\mathrm{D}^\alpha T_f = T_{\mathrm{D}^\alpha f} \quad .$$

Man kann aber aus der Existenz der Distributionsableitung von f nicht die Differenzierbarkeit von f schließen.

<u>**Definition 71.34 :**</u> Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann verstehen wir unter $W^k(\mathbb{R}^n)$ die Menge der $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, für die die $\alpha-$ te Distributionsableitung von f für

$$0 \leq |\alpha| \leq k$$

in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ existiert. $W^k(\mathbb{R}^n)$ heißt der <u>**Sobolev - Raum**</u> der Ordnung k . (Bei (T) werden diese Räume mit $W_2^k(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.) □

<u>**Satz 71.35 :**</u> Sei $k \in \mathbb{N}$, und für $\varphi \in W^k(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha| \leq k$ sei

$$\tilde{\mathrm{D}}^\alpha \varphi \quad \text{die } \alpha - \text{te Distributionsableitung von} \quad \varphi \quad .$$

Setzt man

$$< \varphi, \psi >_{W^k} \; := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \,\wedge\, |\alpha| \leq k} \; \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\tilde{\mathrm{D}}^\alpha \varphi(x)} \cdot \tilde{\mathrm{D}}^\alpha \psi(x)\, \mathrm{d}^n x \quad ,$$

so wird $W^k(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum, und $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein dichter Untervektorraum von $W^k(\mathbb{R}^n)$.
<u>**Beweis :**</u> Siehe (T), Sätze 5.1, 5.2 . □

<u>**Bemerkung 71.36 :**</u> Wegen Satz 71.19 und nach Definition von $W^k(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

und bezüglich der L^2−Norm liegt $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, also liegt auch $W^k(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^2−Norm dicht in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Wir haben aber in $W^k(\mathbb{R}^n)$ eine andere Norm als in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, nämlich

$$\|\varphi\|_{W^k} \quad = \quad (< \varphi, \varphi >_{W^k})^{\frac{1}{2}} \qquad !$$

- Auf $W^1(\mathbb{R}^n)$ können wir nun den Impulsoperator definieren:

(71.37) Impulsoperator (eindimensional) : Für ein Teilchen, das sich auf der reellen Achse bewegt (z.B. den harmonischen Oszillator), definieren wir den **Impulsoperator** g auf der nach Bemerkung 71.36 in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dichten Teilmenge

$$D(g) := W^1(\mathbb{R}) = \{ \ \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \ \big| \ \exists \tilde{\mathrm{D}}\varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \ : \ T_\varphi{}' = T_{\tilde{\mathrm{D}}\varphi} \ \}$$

durch $g(\varphi) := -i\,\hbar\,\tilde{\mathrm{D}}\varphi$.

Für $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (!) berechnet man mit partieller Integration

$$< g(\varphi), \psi > = i\,\hbar \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi'(x)}\psi(x)\,\mathrm{d}\,x \ = \ -i\,\hbar \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\psi'(x)\,\mathrm{d}\,x \ = < \varphi, g(\psi) > ,$$

$<\ ,\ >$ ist hier das Skalarprodukt in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, nicht in $W^1(\mathbb{R})$. Nach 71.36 liegt $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^1(\mathbb{R})$ bezüglich der L^2−Norm , also gilt auch

$$< g(\varphi), \psi > \ = \ < \varphi, g(\psi) > \qquad \text{für alle} \quad \varphi, \psi \in W^1(\mathbb{R}) \quad .$$

g erfüllt also (Sy) . Um zu zeigen, dass g sogar selbstadjungiert ist, fehlen uns entsprechende Sätze über $W^1(\mathbb{R})$.

(71.38) Heisenbergsche Unschärferelation für Orts- und Impulsoperator : Wir wollen sehen, ob die Voraussetzungen von Folgerung 71.32 erfüllt sind für den eben definierten Impulsoperator g und den Ortsoperator f mit

$$D(f) = \{ \ \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \ \big| \ \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \quad \text{für} \quad \psi(x) := x \cdot \varphi(x) \ \} \quad ,$$

$$(f(\varphi))(x) := x \cdot \varphi(x) \ :$$

Sei zunächst $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(*) \quad \varphi \in D(f) \cap D(g) \quad , \quad f(\varphi) \in D(g) \quad , \quad g(\varphi) \in D(f) \quad \text{und}$$

$$((g \circ f - f \circ g)(\varphi))(x) \ = \ -i\,\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x\varphi(x)) + i\,\hbar x\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi(x)}{\mathrm{d}\,x} \ = \ -i\,\hbar\,\varphi(x) ,$$

also

$$(g \circ f - f \circ g)(\varphi) \quad = \quad -i\,\hbar\,\varphi \quad .$$

Man muss sich noch überlegen, dass diese Formel auch für alle φ gilt, die $(*)$ erfüllen. Dann folgt nach 71.32 :

$$\delta(\varphi, f) \cdot \delta(\varphi, g) \;\geq\; \frac{\hbar}{2} \quad .$$

Das ist die HEISENBERGsche Formulierung der Unschärferelation. □

Wir wollen damit den Abschnitt über die Axiomatik der Quantenmechanik beenden und uns noch einige in der Quantenmechanik vorkommende Operatoren ansehen und ihre Spektren bestimmen. Zur Konstruktion der Hamilton-Operatoren benutzt man die folgende

(71.39) Quantisierungsregel : Gegeben sei ein System von n Teilchen, das im Rahmen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik durch cartesische Ortskoordinaten $x_1, \ldots, x_{3n}$ und Impulskoordinaten $p_1, \ldots, p_{3n}$ beschrieben werden kann, und

$$h(x_1, \ldots, x_{3n}, p_1, \ldots, p_{3n})$$

sei die klassische Hamiltonfunktion. Dann ersetzen wir die Ortskoordinaten x_k durch die Operatoren f_k ,

$$(f_k(\varphi))(x) \quad := \quad x_k \cdot \varphi(x)$$

und die Impulskoordinaten p_k durch die Operatoren g_k ,

$$(g_k(\varphi))(x) \quad := \quad -i\,\hbar \frac{\partial}{\partial\, x_k}\,\varphi(x) \quad .$$

Den so gewonnenen Differentialoperator $h(f_k, g_k)$ verwendet man zur Konstruktion des Hamiltonoperators.
- Diese Regel bedarf noch der Präzisierung :

Bemerkung 71.40 : Die Regel 71.39 besagt, dass man $h(f_k, g_k)$ formal ausrechnet und damit einen Operator

$$\mathcal{H} \,=\, h(f_k, g_k)$$

erhält. Das ist dann nicht eindeutig, wenn in $h(x,p)$ Produkte $x_k \cdot p_k$ auftreten, denn es ist $x_k \cdot p_k \,=\, p_k \cdot x_k$, aber

$$((f_k \circ p_k)(\varphi))(x) \quad = \quad -i\,\hbar\, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\varphi(x) \quad ,$$

$$((g_k \circ f_k)(\varphi))(x) \quad = \quad -i\,\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k \varphi(x)) \,=\, -i\,\hbar\, x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\,\varphi(x) - i\,\hbar \varphi(x) \quad .$$

Man muss also davon ausgehen, dass in den gegebenen Hamiltonfunktionen $h(x,p)$ solche Produkte $x_k \cdot p_k$ nicht auftreten.

Bemerkung 71.41 : Die Formulierung “$h(f_k, g_k)$ verwendet man zur Konstruktion des Hamiltonoperators” ist so zu verstehen, dass man zunächst einen Definitionsbereich für den Hamiltonoperator suchen muss. Dazu sucht man sich je nach Problem einen Hilbertraum (etwa $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$) und darin einen dichten Untervektorraum $D(\mathcal{H})$, so dass

$$\mathcal{H}(\varphi) \quad = \quad h(f_k, g_k)(\varphi)$$

für $\varphi \in D(\mathcal{H})$ definiert ist. Für den harmonischen Oszillator haben wir das schon gemacht. Für das Beispiel, das gleich kommt, untersuchen wir den Differentialoperator $-\Delta$:

<u>**Satz 71.42 :**</u> (a) Der Differentialoperator f,

$$D(f) \quad := \quad W^2(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

$$f(\varphi) \quad := \quad -\Delta\,\varphi \quad = \quad -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\varphi \quad ,$$

wobei hier unter $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ die zweite Distributionsableitung von φ zu verstehen ist, ist ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

(b) Für den Operator f_0,

$$D(f_0) \quad := \quad \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad f_0(\varphi) := -\Delta\,\varphi$$

gilt $\overline{f_0} = f$.

(c) Es gilt $f \;\geq\; 0$.

(d) $SP_f = \emptyset \quad , \quad SC_f = [0\,;\infty)$.

<u>**Beweis :**</u> (a) Wir zeigen zunächst, dass f die Bedingung (Sy) erfüllt: Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann folgt mit partieller Integration:

$$< f_0(\varphi), \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{(-\Delta\varphi(x))}\,\psi(x)\;\mathrm{d}^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}}\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\;\mathrm{d}^n x$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)}\cdot(-\Delta\psi(x))\;\mathrm{d}^n x = < \varphi, f_0(\psi) > \quad .$$

Da $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^2(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt durch Grenzübergang für $\varphi, \psi \in W^2(\mathbb{R}^n)$:

$$< f(\varphi), \psi > \quad = \quad < \varphi, f(\psi) > \quad ,$$

also ist (Sy) erfüllt, und außerdem gilt

$$(1) \qquad < f(\varphi), \varphi > \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\right|^2 \mathrm{d}^n x \;\geq\; 0 \quad ,$$

nach Definition 70.5 also : $f \;\geq\; 0$ Also gilt (c) . Die Selbstadjungiertheit von f zeigt man mit Hilfssatz 70.57 :

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{C}\ :\ R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;=\; R(f - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) \;=\; H \quad\Longrightarrow\quad f \text{ selbstadjungiert.}$$

Dazu nehmen wir uns ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < 0$, und ein beliebiges $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Mit ψ gehören auch die Fouriertransformierte $\widehat{\psi}$ und die Funktion

$$\sigma \quad , \quad \text{definiert durch} \quad \sigma(x) \;:=\; \frac{1}{\|x\|^2 - \lambda}\,\widehat{\psi}(x)$$

($\|x\|$ die Norm von $x \in \mathbb{R}^n$,) zu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (was wir im Einzelnen nicht beweisen wollen). Dann ist auch

$$\check{\widehat{\sigma}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für} \quad \check{\widehat{\sigma}}(x) \;:=\; \widehat{\sigma}(-x) \quad .$$

Nach unseren Rechenregeln für die Vertauschung von Differentiation und Fouriertransformation (Satz 52.2.9, Skript S.129) gilt für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$:

$$\mathrm{D}^\beta \check{\widehat{\sigma}} \;=\; (-1)^{|\beta|}\,\check{(\mathrm{D}^\beta \widehat{\sigma})} \;=\; (-1)^{|\beta|}\,\check{(\widehat{(\check{\mu}^\beta \sigma)})} \;=\; (-1)^{|\beta|}\,\widehat{\mu^\beta \check{\sigma}}$$

mit $\mu(x) := ix$. Für $|\beta| \;\le\; 2$ ist auch $\mu^\beta\sigma \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (ohne Beweis) und damit auch $\mathrm{D}^\beta \check{\widehat{\sigma}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, also $\check{\widehat{\sigma}} \in W^2(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$-\Delta \check{\widehat{\sigma}} \;=\; -\sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j^2 \check{\widehat{\sigma}} \;=\; -\sum_{j=1}^n (-1)^2 \widehat{\mu_j^2 \check{\sigma}}$$

mit $\mu_j(x) \;:=\; i\,x_j$, also $\mu_j(x)^2 \;=\; -x_j^2$,

$$\left(-\sum_{j=1}^n \mu_j^2 \check{\sigma}\right)(x) \;=\; \sum_{j=1}^n x_j^2\,\sigma(-x) \;=\; \|(-x)\|^2\,\sigma(-x) \;=$$

$$= \frac{\|(-x)\|^2}{\|(-x)\|^2 - \lambda}\,\widehat{\psi}(-x) \quad ,$$

$$-\lambda\,\sigma(-x) \;=\; \frac{-\lambda}{\|(-x)\|^2 - \lambda}\widehat{\psi}(-x) \quad , \qquad \text{also}$$

$$-\sum_{j=1}^n \mu^2 \check{\sigma} - \lambda\check{\sigma} \;=\; 1 \cdot \check{\widehat{\psi}} \quad ,$$

$$-\Delta\check{\widehat{\sigma}} - \lambda\check{\widehat{\sigma}} \;=\; \psi \quad ,$$

also $R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

b) Um $\overline{f_0} \;=\; f$ zu zeigen, müssen wir nach Satz 70.66 (c) zeigen, dass $W^2(\mathbb{R}^n)$ der Abschluss von $D(f_0) \;=\; \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich $\|\ \ \|_f$ ist, wobei

$$\|\varphi\|_f^2 \;=\; \|f(\varphi)\|^2 + \|\varphi\|^2 \qquad (\|\ \ \| \text{ die Norm in } \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\ )$$

ist. Nun wissen wir, dass $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm von $W^2(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^2(\mathbb{R}^n)$ liegt; wir sind also fertig, wenn wir gezeigt haben, dass $\|\ \ \|_{W^2}$ und $\|\ \ \|_f$ äquivalent sind, denn dann konvergieren Folgen, die in der einen Norm konvergieren, auch in der anderen Norm, und zwar gegen den gleichen Grenzwert. Rechnen wir die beiden Normen einmal aus:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_f{}^2 &= \|\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} \right\|^2 \\
&= \|\varphi\|^2 + \left\langle \sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j^2\varphi, \sum_{j=1}^n \mathrm{D}_j^2\varphi \right\rangle \\
&= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathrm{D}_j^2\varphi(x)}\, \mathrm{D}_k^2\varphi(x)\ \mathrm{d}^n x \quad .
\end{aligned}$$

Für $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man mit partieller Integration :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_f{}^2 &= \|\varphi\|^2 - \sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathrm{D}_j^2\mathrm{D}_k\varphi(x)}\, \mathrm{D}_k\varphi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\varphi(x)}\, \mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\varphi(x)\ \mathrm{d}^n x \\
&= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \|\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\varphi\|^2 \quad ,
\end{aligned}$$

$$(2) \qquad \|\varphi\|_f{}^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\mathrm{D}_j^2\varphi\|^2 + 2\sum_{j<k} \|\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\varphi\|^2 \quad ,$$

wobei hier $\|\ \ \|$ stets die Norm in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{W^2}^2 &= \sum_{|\beta|\le 2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}^\beta\varphi(x)|^2\ \mathrm{d}^n x \\
&= \|\varphi\|^2 + \sum_{1\le|\beta|\le 2} \|\mathrm{D}^\beta\varphi\|^2 \\
&= \|\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\mathrm{D}_j^2\varphi\|^2 + 2\sum_{j<k} \|\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\mathrm{D}_j\varphi\|^2 \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$(3) \qquad \|\varphi\|_f{}^2 \le \|\varphi\|_{W^2}^2 \quad .$$

Das ist die eine Abschätzung, die wir für die Äquivalenz der Normen brauchen. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
{\|\varphi\|_{W^2}}^2 &= {\|\varphi\|_f}^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\mathrm{D}_j\varphi\|^2 \\
&= {\|\varphi\|_f}^2 + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{D}_j\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}^n x \\
&\overset{(1)}{=} {\|\varphi\|_f}^2 + < f(\varphi), \varphi > \\
&\leq \|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2 + \|f(\varphi)\| \cdot \|\varphi\| \quad .
\end{aligned}$$

Da für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ stets $\alpha \cdot \beta \;\leq\; \alpha^2 + \beta^2$ gilt, folgt

$$(4) \qquad {\|\varphi\|_{W^2}}^2 \;\leq\; 2(\|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2) \;=\; 2\; {\|\varphi\|_f}^2 \quad .$$

Aus (3) und (4) folgt: $\| \quad \|_{W^2}$ und $\| \quad \|_f$ sind äquivalent.

(d) Wir wollen nun das Spektrum von f untersuchen. Nach Satz 70.59 ist $S_f \subset \mathbb{R}$.

1.) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$. Schon beim Beweis von (a) hatten wir gezeigt:

$$(5) \qquad R(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad .$$

Angenommen, es ist $\lambda \in S_f$, dann gilt entweder
$\lambda \in \mathbf{SP_f}$, es gibt also ein $\varphi \in D(f)$ mit $\|\varphi\| = 1$ und

$$f(\varphi) \;=\; \lambda\,\varphi \quad ,$$

$$< f(\varphi), \varphi >= \lambda\,\|\varphi\|^2 \;=\; \lambda \;<\; 0 \quad , \quad \text{Widerspruch zu (c) , oder}$$

$\lambda \in \mathbf{SC_f}$, dann ist $f - \lambda\,\mathrm{id}$ injektiv, es existiert also
$(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1} \;:\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \;\longrightarrow\; D(f)$. Wir zeigen mit Definition 70.64, dass $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ auch noch abgeschlossen ist : Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus

$$D((f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}) \;=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k \;=\; \varphi \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi_k) \;=\; \psi \quad ,$$

dann müssen wir zeigen:

$$\varphi \in D((f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}) \quad ,$$

was aber klar ist wegen $D((f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}) \;=\; \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, und außerdem:

$$(6) \qquad (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi) \;=\; \psi \quad .$$

Beweis von (6) : Sei

$$\psi_k \;:=\; (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi_k) \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$(7) \qquad \psi_k \in D(f - \lambda\,\mathrm{id}) \;=\; D(f) \quad ,$$

$$(8) \qquad \lim_{k\to\infty} \psi_k \,=\, \psi \quad , \quad \lim_{k\to\infty} (f - \lambda\,\mathrm{id})(\psi_k) \,=\, \lim_{k\to\infty} \varphi_k \,=\, \varphi \quad , \quad \text{also}$$

$$(9) \qquad \lim_{k\to\infty} f(\psi_k) \,=\, \varphi + \lambda\,\psi \quad .$$

Nun ist f selbstadjungiert, nach Satz 70.53 (c) also abgeschlossen. Aus (7),(8),(9) folgt daher

$$f(\psi) \,=\, \varphi + \lambda\,\psi \quad , \quad \text{also} \quad (f - \lambda\,\mathrm{id})(\psi) \,=\, \varphi \quad \text{und damit (6)}.$$

Also ist $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ abgeschlossen. Nun ist $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ mit der Maximum-Norm

$$\|(\varphi, \psi)\| \,:=\, \max\{\|\varphi\| \,,\, \|\psi\|\} \quad \text{für} \quad \varphi, \psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

ein Banachraum, und darin ist

$$G \quad := \quad \{\ (\varphi, (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi)) \ \big|\ \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\ \} \quad ,$$

der Graph von $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$, ein **abgeschlossener** Untervektorraum, denn sei $(\varphi_k, (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit einem Grenzwert $(\varphi, \psi) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, dann besagt die Abgeschlossenheit von $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ gerade :

$$\psi \,=\, (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi) \quad , \qquad \text{also} \quad (\varphi, \psi) \in G \quad .$$

G ist also selbst ein Banachraum. Die Abbildung

$$p : \ G \ \longrightarrow \ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \quad , \quad p(\varphi, (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi)) \,:=\, \varphi$$

ist linear, stetig und bijektiv. Nach Folgerung 68.49 ist

$$p^{-1} \ : \ \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \ \longrightarrow \ G \quad , \quad \varphi \longmapsto (\varphi, (f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}(\varphi))$$

stetig, also ist auch $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ stetig. Also ist

$$\lambda \in M_f \quad , \quad \text{Widerspruch} \quad , \quad \text{und wir haben gezeigt :}$$

$$S_f \quad \subset \quad [0\,;\,\infty) \quad .$$

2.) Sei nun $\lambda \in [0\,;\,\infty)$. Angenommen, $\lambda \in SP_f$, dann gibt es einen Eigenvektor $\varphi \in W^2(\mathbb{R}^n)$ zu λ mit $\|\varphi\| = 1$. Für die Fouriertransformierte $\widehat{\varphi}$ gilt

$$\|\widehat{\varphi}\|^2 \,=<\, \widehat{\varphi}, \widehat{\varphi} \,>=\, T_{\widehat{\varphi}}[\overline{\widehat{\varphi}}] \,=\, \widehat{T_\varphi}[\overline{\widehat{\varphi}}] \,=\, T_\varphi[\widehat{\overline{\widehat{\varphi}}}]$$

und wegen $\overline{\widehat{\varphi}} = \check{\overline{\varphi}}$:

$$\|\widehat{\varphi}\|^2 \,=\, T_\varphi[\overline{\varphi}] \,=\, \|\varphi\|^2 \,=\, 1 \quad .$$

Mit der Rechnung wie beim Beweis von (a) folgt aus $f(\varphi) = \lambda\varphi$:

$$\|x\|^2\widehat{\varphi}(x) \,=\, \lambda\widehat{\varphi}(x) \quad , \qquad \text{also}$$

$$(\|x\|^2 - \lambda)\,\widehat{\varphi}(x) \quad = \quad 0 \quad .$$

Wegen $\widehat{\varphi} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ gilt das nur für $\widehat{\varphi} = 0$. Dem widerspricht aber $\|\widehat{\varphi}\| = 1$. Also gibt es kein $\lambda \geq 0$ mit $\lambda \in SP_f$.

Wir behaupten:

$$SC_f = [0\,;\,\infty) \quad .$$

Dazu geben wir zu jedem $\lambda \geq 0$ eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $W^2(\mathbb{R}^n)$ an, für die gilt

$$(*) \qquad \begin{cases} (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \text{ besitzt keine konvergente Teilfoge, und} \\ \lim\limits_{j\to\infty} (f - \lambda\,\mathrm{id})(\varphi_j) = 0 \quad . \end{cases}$$

Dann kann $(f - \lambda\,\mathrm{id})^{-1}$ nicht stetig sein, denn aus der 2.Aussage von $(*)$ würde sonst folgen: $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = 0$, im Widerspruch zur 1.Aussage.

Beweis von $(*)$: Wir wählen uns zunächst eine Folge $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}_+^*$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ und zu gegebenem $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|z_j\| = \infty \quad ,$$

so dass die Träger der Funktionen

$$\psi_j \,:\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \psi_j(x) := \psi(\varepsilon_j(x - z_j))$$

paarweise disjunkt sind. (Das geht, denn es gibt ein $\gamma > 0$ mit

$$\mathrm{Supp}\,\psi \quad \subset \quad K_\gamma(0) \quad .$$

Wählt man $z_0 := 0$, so ist für $\psi_0(x) := \psi(\varepsilon_0(x - z_0))$:

$$\mathrm{Supp}\,\psi_0 \subset K_{\gamma_0}(0) \quad \text{mit} \quad \gamma_0 := \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \quad .$$

Sind dann $z_0, \ldots, z_n$ und $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ so bestimmt, dass $\gamma_n > \gamma_{n-1}$ und

$$\mathrm{Supp}\,\psi_n \subset K_{\gamma_n}(0) \setminus K_{\gamma_{n-1}}(0)$$

ist für $\psi_n(x) := \psi(\varepsilon_n(x - z_n))$, dann wählt man $z_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|z_{n+1}\| > \gamma_n + \frac{\gamma}{\varepsilon_{n+1}} \quad \text{und} \quad \psi_{n+1}(x) := \psi(\varepsilon_{n+1}(x - z_{n+1})) \quad ,$$

dann gilt für $x \in \mathrm{Supp}\,\psi_{n+1}$:

$\|\varepsilon_{n+1}\,x - \varepsilon_{n+1}\,z_{n+1}\| \leq \gamma$, also $\|\varepsilon_{n+1}\,x\| \geq \|\varepsilon_{n+1}\,z_{n+1}\| - \gamma > \varepsilon_{n+1}\,\gamma_n$,

also $\|x\| > \gamma_n$, und man findet $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ mit

$$\mathrm{Supp}\,\psi_{n+1} \quad \subset \quad K_{\gamma_{n+1}}(0) \setminus K_{\gamma_n}(0) \quad .$$

Also liegen die Träger der Funktionen ψ_j paarweise disjunkt.) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \mathbb{N}_0$ definieren wir nun

$$\varphi_j(x) := \varepsilon_j{}^{\frac{n}{2}} \cdot \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \cdot \exp\left(i \sum_{m=1}^{n} k_m x_m\right) \quad ,$$

wobei wir ein festes $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \neq 0$, und ε_j und z_j wie oben wählen, und $k_1, \dots k_n \in \mathbb{R}$ mit

$$k_1^2 + \dots k_n^2 = \lambda \quad .$$

Dann ist $\varphi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^2(\mathbb{R}^n)$, und es gilt

$$\|\varphi_j\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon_j^n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\varepsilon_j(x - z_j))|^2 \, \mathrm{d}^n x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)|^2 \, \mathrm{d}^n y \quad = \quad \|\psi\|^2 \quad > \quad 0$$

(mit der Transformation $y := \varepsilon_j(x - z_j)$.) Da φ_j und φ_k für $j \neq k$ disjunkte Träger haben, ist ihr Skalarprodukt in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ gleich 0, also gilt

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|^2 = \|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_k\|^2 = 2\|\psi\|^2 > 0 \quad .$$

Da $\|\psi\|$ eine positive Konstante ist, sieht man, dass $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ keine konvergente Teilfolge hat. Nun ist

$$\varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \cdot \Delta \left(\exp\left(i \sum_{m=1}^n k_m x_m \right) \right) =$$

$$= \quad -\lambda \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \exp\left(i \sum_{m=1}^n k_m x_m \right) = -\lambda \varphi_j(x) \, ,$$

wegen $\sum\limits_{m=1}^n (i\, k_m)^2 = -\lambda$. Wegen $f = -\Delta$ folgt nach der LEIBNIZ-Regel für die 2.Ableitung :

$$((f - \lambda \,\mathrm{id})(\varphi_j))(x) \quad =$$

$$= \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \left[-\Delta\psi(\varepsilon_j(x - z_j)) - 2 \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_m}(\varepsilon_j(x - z_j)) i\, k_m \right] \cdot \exp\left(i \sum_{m=1}^n k_m x_m \right) .$$

Wir verwenden nun die Dreiecksungleichung für die Norm in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und führen anschließend wieder die Transformation $y := \varepsilon_j(x - z_j)$ aus. Da Δ dann die Differentiation nach y bedeutet, folgt

$$\|(f - \lambda \,\mathrm{id})(\varphi_j)\| \le \varepsilon_j^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta\psi(y)|^2 \, \mathrm{d}^n y \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\lambda}\varepsilon_j \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left| \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_m} \right|^2 \mathrm{d}^n y \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

auf der rechten Seite hängt nur noch ε_j von j ab. Das geht gegen 0 für $j \to \infty$, also

$$\lim_{j \to \infty} (f - \lambda \,\mathrm{id})(\varphi_j) \quad = \quad 0 \quad ,$$

$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ hat also die Eigenschaft $(*)$. $\square$

Damit können wir nun ein quantenmechanisches Problem bearbeiten :

Beispiel 71.43 : Wir betrachten das quantenmechanische System eines Teilchens derMasse m, das sich auf der reellen Achse frei bewegt. Die klassische Hamiltonfunktion ist in diesem Fall

$$h(x,p) \quad = \quad \frac{m}{2}\,v^2 \quad = \quad \frac{1}{2\,m}\,p^2 \quad .$$

Nach unserer Quantisierungsregel (71.39) erhalten wir einen Operator $\mathcal{H}_0$,

$$D(\mathcal{H}_0) \,:=\, \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \mathcal{H}_0(\varphi) \,:=\, -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\varphi'' \quad .$$

Dieser Operator erfüllt zwar (Sy) , ist aber nicht selbstadjungiert. Nach Satz 71.42 ist nun $\mathcal{H} \,:=\, \overline{\mathcal{H}_0}$,

$$D(\mathcal{H}) \,:=\, W^2(\mathbb{R}) \quad , \quad \mathcal{H}(\varphi) \,:=\, -\frac{\hbar^2}{2\,m}\varphi''$$

selbstadjungiert, und für das Spektrum von $\mathcal{H}$ gilt

$$SC_{\mathcal{H}} \,=\, [0\,;\,\infty) \quad , \quad SP_{\mathcal{H}} \,=\, \emptyset \quad .$$

$\mathcal{H}$ hat also keine Eigenwerte. Es gibt also keine stationären Zustände des Teilchens. Befindet sich das Teilchen im Zustand φ , $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \,=\, 1$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen im Intervall (a,b) aufhält, gleich

$$w(\varphi, f, (a;b)) \quad = \quad \|(e_{b,-} - e_a)(\varphi)\|^2 \quad ,$$

wobei f der Ortsoperator und $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu f gehörige Spektralschar ist. Nach Hilfssatz 71.17 ist

$$w(\varphi, f, (a;b)) \quad = \quad <\, (e_{b,-} - e_a)(\varphi), \varphi \,> \quad = \quad \int\limits_a^b |\varphi(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x \quad .$$

Beispiel 71.44 : Wir betrachten das quantenmechanische System eines Teilchens der Masse m, das sich auf der reellen Achse bewegt, und auf das eine äußere Kraft wirkt, die durch ein Potential $V(x)$ beschrieben wird. Dann ist die klassische Hamiltonfunktion :

$$h(x,p) \quad = \quad \frac{1}{2\,m}\cdot p^2 + V(x)$$

und damit nach unserer Quantisierungsregel :

$$\mathcal{H}_0(\varphi) \quad = \quad -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\varphi'' + V(x) \quad , \quad D(\mathcal{H}_0) \,=\, \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \quad .$$

Wir setzen nun voraus:

$$V \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ist stetig,} \quad V(x) \,\geq\, c$$

für eine passende reelle Konstante c, und

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) \quad = \quad \infty \quad .$$

Dann ist, bis auf Konstanten, $\mathcal{H}_0$ der Operator f ,

$$(f(\varphi))(x) := -\varphi''(x) + p(x)\,\varphi(x) \quad , \qquad \text{mit}$$

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig,} \quad p(x) \geq 1\,, \lim_{|x|\to\infty} p(x) = \infty$$

aus Satz 71.20 (die Bedingung $\frac{2m}{\hbar^2} \cdot V(x) \geq 1$ ist für $\mathcal{H}_0$ nicht immer erfüllt, man muss eventuell den Operator

$$\mathcal{H}_0 + n \text{ id} \quad \text{mit passendem} \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachten, so wie wir das beim Beweis von Hilfssatz 70.21 gemacht haben, und dann auf $\mathcal{H}_o$ zurückschließen). Aus Satz 71.20 folgt dann : Der Operator

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}_0}$$

ist selbstadjungiert und besitzt ein "reines Punktspektrum", d.h.

$$SC_{\mathcal{H}} = \emptyset \quad .$$

Das Punktspektrum $SP_{\mathcal{H}}$ ist abzählbar, also besitzt $\mathcal{H}$ nach Satz 71.15 abzählbar viele Zustände. □

Der schon behandelte harmonische Oszillator ist natürlich ein Spezialfall dieses Beispiels. - Wir wollen uns zum Schluss noch mit einem dreidimensionalen Problem befassen, dem Wasserstoff-Atom. Zunächst einmal ganz allgemein die

(71.45) Klassische Hamilton-Funktion eines Atoms : Gegeben sei ein Atom mit Atomkern der Kernladungszahl Z und n Elektronen (nicht notwendig $Z = n$, es sind also auch ionisierte Atome zugelassen) . Den Atomkern denken wir uns fest im Nullpunkt des Koordinatensystems. Die Koordinaten des $j-$ten Elektrons seien

$$(x_{3j-2}, x_{3j-1}, x_{3j}) \quad , \quad j \in \underline{n} \quad ,$$

der Impuls des $j-$ten Elektrons sei

$$(p_{3j-2}, p_{3j-1}, p_{3j}) \in \mathbb{R}^3 \quad ,$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$r_j := \sqrt{x_{3j-2}^2 + x_{3j-1}^2 + x_{3j}^2} \quad ,$$

$$r_{jk} := \sqrt{(x_{3j-2} - x_{3k-2})^2 + (x_{3j-1} - x_{3k-1})^2 + (x_{3j} - x_{3k})^2}$$

für $j, k \in \underline{n}$, dann ist die klassische Hamiltonfunktion des Atoms :

$$h(x_1, \ldots, x_{3n}, p_1, \ldots, p_{3n}) = \frac{1}{2\,m} \sum_{j=1}^{3n} p_j^2 - Z\,e^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j} + e^2 \sum_{j\neq k} \frac{1}{r_{jk}} \quad ,$$

wobei e die Ladung des Elektrons und m seine Masse ist. Damit kann man nun nach der Quantisierungsregel (71.39) den Hamilton-Operator der Quantenmechanik definieren :

Definition 71.46 : Das quantenmechanische System eines Atoms mit Kernladungszahl Z und n Elektronen beschreiben wir im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{3n})$ durch den Operator

$$\mathcal{H} := \overline{\mathcal{H}_0} \quad , \quad D(\mathcal{H}_0) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{3n}) \quad ,$$

$$\mathcal{H}_0(\varphi) := -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta\varphi - Z\,e^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{r_j}\varphi + \left(e^2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{r_{jk}} \right) \varphi$$

$$\text{mit} \quad (\Delta\,\varphi)(x) := \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\varphi(x) \quad .$$

$\mathcal{H}_0$ erfüllt (Sy), ist aber nicht selbstadjungiert, aber $\mathcal{H}$ ist selbstadjungiert.

Folgerung 71.47 : Für das neutrale Wasserstoffatom ist

$$\mathcal{H}_0(\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta\,\varphi - \frac{e^2}{r}\,\varphi$$

mit $r := r_1$ und $n = 1$. □

Den Satz über das Spektrum dieses Operators können wir hinschreiben, mit unseren Mitteln aber keineswegs beweisen :

Satz 71.48 : Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}_0}$,

$$D(\mathcal{H}_0) := \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad , \quad \mathcal{H}_0(\varphi) := -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta\,\varphi - \frac{e^2}{r}\,\varphi$$

ist ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Es ist $D(\mathcal{H}) = W^2(\mathbb{R}^3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} SC_{\mathcal{H}} &= [0\,;\,\infty) \quad , \\ SP_{\mathcal{H}} &= \left\{ -\frac{m\,e^4}{2\,\hbar^2\,N^2} \;\middle|\; N \in \mathbb{N} \right\} \quad . \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $-\dfrac{m\,e^4}{2\,\hbar^2\,N^2}$ hat die Dimension N^2 .

Beweis : Siehe (T) , Satz 36.2 , Seiten 504 - 510 . □

Für die Vorlesung verwendete Literatur

L : K. Königsberger : Analysis 2. 5., korrigierte Auflage. Springer-Lehrbuch, J.Springer Berlin Heidelberg 2004,

G : O. Forster : Analysis 3, 3.Auflage. vieweg studium 52, Braunschweig 1984 ,

S : E.Bönecke : Skript zur Mathematik III , IV für Studierende der Physik, Hamburg 2006 / 2007 .

Inhalt der "Mathematik IV für Studierende der Physik"

§	Überschrift	nachzulesen in
62	Die Wellengleichung	S 151 - 168
63	Die Potentialgleichung	G 161 - 174
64	Die Wärmeleitungsgleichung	S 168 - 175
65	Partielle Differentialgleichungen und Distributionen	G 180 - 188
66	Funktionentheorie einer Veränderlichen	S 179 - 234
68	Grundlegendes über Hilberträume	S 235 - 256 , L 334 - 343
69	Das Spektrum kompakter Operatoren	S 256 - 272
70	Der Spektralsatz für symmetrische und selbstadjungierte Operatoren	S 272 - 316
71	Differentialgleichungen im Hilbertraum	S 316 - 347