MATHEMATIK IV FÜR STUDIERENDE DER PHYSIK

§43 Funktionentheorie einer Veränderlichen

Das folgende Kapitel bauen wir so auf, dass wir nichts über Integration im $\mathbb{R}^n$, also auch nichts über Differentialformen, voraussetzen. Dadurch wird manches länger, aber vielleicht besser verständlich, als im Buch von KÖNIGSBERGER, Analysis 2. Sie erhalten daher einiges als Skript.
Literatur zu diesem Kapitel: Ein sehr ausführliches Standardwerk ist
H.BEHNKE, F.SOMMER : Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. J.Springer, Berlin 1955.
Gute Taschenbücher zu diesem Thema sind:
K.DIEDERICH, R.REMMERT : Funktionentheorie I. Heidelberger Taschenbuch 103, J.Springer 1972,
W.FISCHER, I.LIEB: Funktionentheorie. vieweg studium, Braunschweig 1980,
H.CARTAN : Elementare Theorie der Analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen. B.I.Taschenbuch, Mannheim 1961.
Zum Selbststudium empfiehlt sich besonders das Buch von FISCHER, LIEB.

Man braucht die Funktionentheorie in der Physik im Wesentlichen, um **reelle** uneigentliche Integrale auszurechnen, aber auch für Anderes (konforme Abbildungen).

66.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Bemerkung 66.1.1 : Bisher haben wir nur Ableitungen von Funktionen reeller Variablen, also von

$$f : I \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad I \quad \text{ein Intervall,}$$

definiert, auch von Funktionen

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offen.}$$

Mit der Ableitung von Funktionen

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad A \quad \text{offen in} \quad \mathbb{C} \quad ,$$

beschäftigt man sich in der Funktionentheorie. Es ist dabei nötig,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \quad &= \quad \{ \ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \} \quad \text{und} \\ \mathbb{C} \quad &= \quad \{ \ x_1 + ix_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \} \end{aligned}$$

auseinanderzuhalten.

(66.1.2) Zur Wiederholung : Wir wissen, dass $\mathbb{C}$ mit der durch

$$d(z_1, z_2) \quad := \quad |z_1 - z_2| \ \text{für} \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad ,$$

$|\ \ |$ der komplexe Betrag, definierten Metrik ein **metrischer Raum** ist. Damit ist definiert, was eine **offene Menge** $A \subset \mathbb{C}$ ist: A heißt offen, wenn es zu jedem $a \in A$ ein $r > 0$ gibt, so dass

$$K_r(a) \quad := \quad \{ \ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r \ \} \ \subset A \quad \text{ist.}$$

Eine Funktion $f \ : \ A \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$ ist **stetig** in $a \in A$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim\limits_{k\to\infty} n\infty\, z_n = a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} n\infty\, f(z_n) \quad = \quad f(a) \quad ,$$

wobei die Grenzwerte im metrischen Raum $\mathbb{C}$ zu bilden sind. Sei $B \subset \mathbb{C}$, dann heißt a ein **Häufungswert** von B, wenn es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B mit $\lim\limits_{k\to\infty} n\infty\, z_n = a$ gibt. Damit ist dann klar, was mit

$$\lim_{\substack{z\to a \\ z\in B\setminus\{a\}}} g(z) \quad \text{für eine Funktion} \quad g \ : \ B\setminus\{a\} \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$$

gemeint ist, wenn a Häufungswert von $B\setminus\{a\}$ ist, nämlich :

$$\lim_{\substack{z\to a \\ z\in B\setminus\{a\}}} g(z) \quad = \quad c \qquad \text{bedeutet:}$$

Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$z_n \in B\setminus\{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} n\infty\, z_n = a$
gilt $\lim\limits_{k\to\infty} n\infty\, g(z_n) = c$.

Definition 66.1.3 : Sei A eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und

$$f \ : \ A \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad .$$

f heißt im Punkt $\zeta \in A$ **(komplex-)differenzierbar** , wenn

$$\lim_{\substack{u\to 0 \\ \zeta+u\in A\setminus\{\zeta\}}} \frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} \quad =: \quad f'(\zeta) \quad \text{existiert.}$$

Beispiele : (66.1.4) Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n \in \mathbb{C} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist

$$f \ : \ K_r(0) \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad , \quad f(z) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

in jedem $\zeta \in K_r(0)$ differenzierbar, mit

$$f'(\zeta) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1} \quad .$$

Beweis : Für $\zeta \in K_r(0)$ und $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| < \frac{1}{2}(r - |\zeta|)$ gilt

$$f(\zeta+u)-f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((\zeta+u)^n-\zeta^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k \zeta^{n-k}\right) ,$$

$$\frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^{k-1} \zeta^{n-k}\right) \quad \text{für} \quad u \neq 0 \quad ,$$

$$\frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \zeta^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} u^{k-1} \zeta^{n-k}\right)$$

$$= u \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} u^{k-2} \zeta^{n-k}\right)$$

Nun gilt für $n \geq 2$ und $k \geq 2$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \cdot \frac{(n-2)\ldots((n-2)-(k-2)+1)}{(k-2)!}$$

$$= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \binom{n-2}{k-2} \leq n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \quad , \quad \text{also}$$

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} u^{k-2} \zeta^{n-k}\right| \leq n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} |u|^{k-2} |\zeta|^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |u|^k |\zeta|^{n-2-k} = n(n-1)(|u|+|\zeta|)^{n-2} \quad .$$

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat den Konvergenzradius r , also haben nach CAUCHY - HADAMARD auch die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

den Konvergenzradius r , und in $K_r(0)$ konvergieren sie absolut. Wegen $|u| + |\zeta| < \frac{1}{2}(r - |\zeta|) + |\zeta| = \frac{1}{2}(|\zeta| + r) < r$ haben wir

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} u^{k-2} \zeta^{n-k}\right)\right| \leq \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot |a_n| \left(\frac{1}{2}(|\zeta|+r)\right)^{n-2}}_{c(\zeta)} < \infty \quad ,$$

wobei $c(\zeta)$ nicht von u abhängt, also

$$\left| \frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \zeta^{n-1} \right| \quad \leq \quad |u| \cdot c(\zeta)$$

und damit

$$\lim_{\substack{u\to 0 \\ \zeta+u\in K_r(\zeta)\setminus\{\zeta\}}} \frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \zeta^{n-1} \quad . \qquad \square$$

(66.1.5) Sei $f \,:\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) \quad := \quad \overline{z} \quad .$
Dann gilt für $\zeta, u \in \mathbb{C}\,,\; u \neq 0$:

$$\frac{f(\zeta+u)-f(\zeta)}{u} \quad = \quad \frac{\overline{\zeta+u}-\overline{\zeta}}{u} \quad = \quad \frac{\overline{u}}{u} \quad .$$

$\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\overline{u}}{u}$ existiert nicht: Nehmen wir etwa

$$u_k \quad := \quad \frac{1}{k} \quad , \quad \text{so gilt} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\overline{u_k}}{u_k} \quad = \quad 1 \quad , \quad \text{aber für}$$

$$v_k \quad := \quad \frac{i}{k} \quad \text{gilt} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\overline{v_k}}{v_k} \quad = \quad -1 \quad ,$$

aber $\lim\limits_{k\to\infty} u_k \;=\; \lim\limits_{k\to\infty} v_k \;=\; 0 \quad .$ f ist also in keinem $\zeta \in \mathbb{C}$ differenzierbar, obwohl f in jedem $\zeta \in \mathbb{C}$ stetig ist. (In der reellen Analysis muss man nach einer Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, lange suchen.)

Bemerkungen: (66.1.6) Nach Beispiel (66.1.4) wissen wir, dass
a) alle Polynomfunktionen

$$P \,:\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

differenzierbar sind, mit $P'(z) \;=\; \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \quad ,$

b) $\exp$, $\sin$ und $\cos$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar sind, da sie durch Potenzreihen definiert sind, und man kann nachrechnen:

$$\exp' \;=\; \exp \quad , \quad \sin' \;=\; \cos \quad , \quad \cos' \;=\; -\sin \quad .$$

(66.1.7) Um weitere Funktionen zu differenzieren, braucht man die
Summen - , Produkt- und Kettenregel.

Die Regeln gelten auch für komplexe Differenzierbarkeit, da komplexe Differenzierbarkeit formal genau so definiert ist wie Differentiation im $\mathbb{R}^1$. Man muss nur statt Intervallen offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ als Definitionsbereiche nehmen. Auch die “3.Formulierung der Differenzierbarkeit”, das war Satz

9.1.7, kann man übertragen, man kann den Beweis fast wörtlich aus (K139) abschreiben:

Satz 66.1.8 : Sei A offen in $\mathbb{C}$. Eine Funktion

$$f \,:\, A \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist genau dann in einem Punkt $\zeta \in \mathbb{C}$ differenzierbar, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ und eine Funktion

$$\varphi \,:\, K_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(\zeta) \subset A \quad , \quad \text{und}$$

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{\varphi(u)}{u} \quad = \quad 0 \quad \text{gibt, so dass}$$

$$f(\zeta + u) \,=\, f(\zeta) + c \cdot u + \varphi(u) \quad \text{für} \quad u \in K_\varepsilon(0) \quad \text{ist.}$$

In diesem Fall ist $\quad c \,=\, f'(\zeta) \quad .$ □

Es gibt einen Zusammenhang zwischen Differentiation in $\mathbb{C}$ und Differentiation in $\mathbb{R}^2$. Dazu:

(66.1.9) Zerlegung einer komplexen Funktion in Real- und Imaginärteil:

Sei $f \,:\, A \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $A \subset \mathbb{C}$, dann setzen wir

$$A' \quad := \quad \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x + iy \in A\ \} \quad .$$

Ist also $f(x+iy)$ für $x + iy \in A$ definiert, so ist

$$F(x,y) \quad := \quad f(x+iy) \quad \text{für} \quad (x,y) \in A'$$

eine Funktion von zwei reellen Variablen. Wir zerlegen den Funktionswert in Real- und Imaginärteil: Sei

$$u(x,y) \quad := \quad \operatorname{Re} F(x,y) \quad , \quad v(x,y) \quad := \quad \operatorname{Im} F(x,y) \quad , \quad \text{so haben wir}$$

$$F(x,y) \quad = \quad u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{mit} \quad u, v \,:\, A' \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}} \quad .$$

Satz und Definition 66.1.10 : Sei $f \,:\, A \longrightarrow \mathbb{C}$, A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$,

$$\zeta \,=\, \xi + i\eta \in A \quad \text{mit} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R} \quad . \quad \text{Dann gilt:}$$

$$f \quad \text{differenzierbar in} \quad \zeta \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u \text{ und } v \text{ total differenzierbar in } (\xi,\eta)\text{, und} \\[2ex] \left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial}{\partial x} u(\xi,\eta) \,=\, \dfrac{\partial}{\partial y} v(\xi,\eta)\,, \\[3ex] \dfrac{\partial}{\partial y} u(\xi,\eta) \,=\, -\dfrac{\partial}{\partial x} v(\xi,\eta)\,, \end{array}\right\} (*) \end{array} \right.$$

wobei u, v wie in (66.1.9) definiert sind, und wenn eine der Aussagen zutrifft, gilt

$$f'(\zeta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\xi, \eta) \quad .$$

Die beiden Differentialgleichungen $(*)$ heißen
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen .

Beweis : " $\Longrightarrow$ " : Ist f in ζ differenzierbar, so gibt es nach Satz 66.1.8 ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ und eine Funktion

$$\varphi : K_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \lim_{h+ik\to 0} \frac{\varphi(h+ik)}{h+ik} = 0 \quad \text{und}$$

$$f(\zeta + h + ik) - f(\zeta) = f'(\zeta)(h+ik) + \varphi(h+ik) \quad .$$

$h + ik \in K_\varepsilon(0)$ bedeutet: $\sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon$. Das ist erfüllt für

$$\max\{|h|, |k|\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \text{also haben wir die Funktion}$$

$$\psi : \underbrace{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}_{\subset \mathbb{R}} \times \underbrace{K_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}_{\subset \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \psi(h,k) := \varphi(h+ik) \quad , \quad \text{mit}$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{\psi(h,k)}{h+ik} = 0 \quad .$$

Sei nun $F(x,y) := f(x+iy)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x + iy \in A$, so folgt

(1) $$F(\xi+h, \eta+k) - F(\xi,\eta) = f'(\zeta)h + if'(\zeta)k + \psi(h,k) \quad .$$

Bilden wir auf beiden Seiten den Realteil, so folgt

$$u(\xi+h, \eta+k) - u(\xi,\eta) = \operatorname{Re} f'(\zeta)\cdot h - \operatorname{Im} f'(\zeta)\cdot k + \operatorname{Re}\psi(h,k)$$

$$\text{mit} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Re}\psi(h,k)}{h+ik} = 0 \quad , \quad \text{denn} \quad |\operatorname{Re}\psi(h,k)| \le |\psi(h,k)| \quad .$$

Wegen $|h+ik| = \sqrt{h^2+k^2} = \|(h,k)\|$ (euklidische Norm) gilt auch

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Re}\psi(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \quad ,$$

und die Gleichung

$$u(\xi+h,\eta+k) - u(\xi,\eta) = (\operatorname{Re} f'(\zeta), -\operatorname{Im} f'(\zeta)) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \operatorname{Re}\psi(h,k)$$

besagt daher nach Definition 36.2 (Forster 2 , S.62): u ist total differenzierbar in (ξ,η) , mit

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,\eta) = \operatorname{Re} f'(\zeta) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{Im} f'(\zeta) \quad .$$

Nun bilden wir in (1) auf beiden Seiten den Imaginärteil:

$$v(\xi+h,\eta+k)-v(\xi,\eta) \quad = \quad \operatorname{Im} f'(\zeta)\cdot h + \operatorname{Re} f'(\zeta)\cdot k + \operatorname{Im}\psi(h,k)$$

$$\text{mit} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\operatorname{Im}\psi(h,k)}{\|(h,k)\|} \quad = \quad 0 \quad .$$

Also ist v total differenzierbar in (ξ,η), mit

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(\xi,\eta) \;=\; \operatorname{Im} f'(\zeta) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\eta) \;=\; \operatorname{Re} f'(\zeta) \quad .$$

Also sind u und v total differenzierbar in (ξ,η), und Vergleich von (2) und (3) ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi,\eta) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(\xi,\eta) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(\xi,\eta) \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}(\xi,\eta) \quad .$$

„ $\Longleftarrow$ ": Seien u und v in (ξ,η) total differenzierbar, dann ist

$$F \,:\, A' \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad F \;=\; u+iv$$

in $(\xi,\eta)\in A'\subset\mathbb{R}^2$ differenzierbar, nach der Summenregel. Die totale Ableitung von F in (ξ,η) ist

$$\begin{aligned}(DF)(\xi,\eta) \quad &= \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}F(\xi,\eta), \frac{\partial}{\partial y}F(\xi,\eta))\right) \\ &= \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)(\xi,\eta) \quad ,\end{aligned}$$

und nach Definition 36.2 (F 45) folgt: Es gibt ein $\varepsilon>0$ und eine Funktion

$$\psi \,:\, \underbrace{K_\varepsilon((0,0))} \longrightarrow \mathbb{C}$$

als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit euklidischer Norm

$$\text{mit} \quad \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{\psi(h,k)}{\|(h,k)\|} \quad = \quad 0 \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}F(\xi+h,\eta+k)-F(\xi,\eta) \quad &= \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}F(\xi,\eta), \frac{\partial}{\partial y}F(\xi,\eta)\right)\cdot\begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix} + \psi(h,k) \\ &= \quad \frac{\partial}{\partial x}F(\xi,\eta)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}F(\xi,\eta)\cdot k + \psi(h,k) \quad .\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\varphi : \underbrace{K_\varepsilon(0)}_{\subset \mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(h+ik) \quad := \quad \psi(h,k) \quad , \quad \text{dann folgt}$$

$$\lim_{\substack{h+ik\to 0\\ h+ik\neq 0}} \frac{\varphi(h+ik)}{|h+ik|} = 0 \quad , \quad \text{also auch} \lim_{\substack{h+ik\to 0\\ h+ik\neq 0}} \frac{\varphi(h+ik)}{h+ik} = 0\,, \text{ und}$$

$$f(\xi+i\eta+h+ik) - f(\xi+i\eta) \quad =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}u(\xi,\eta) + i\frac{\partial}{\partial x}v(\xi,\eta)\right)\cdot h + \left(\frac{\partial}{\partial y}u(\xi,\eta) + i\frac{\partial}{\partial y}v(\xi,\eta))\right)\cdot k + \varphi(h+ik)\,,$$

und wenn wir noch die Voraussetzung verwenden, dass an der Stelle (ξ,η)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{gilt :}$$

$$f(\zeta+h+ik) - f(\zeta) \quad = \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}u + i\frac{\partial}{\partial x}v\right)(\xi,\eta)\cdot(h+ik) + \varphi(h+ik) \quad .$$

Nach Satz 66.1.8 ist f in ζ differenzierbar, und wir erhalten für die Ableitung :

$$(*) \qquad f'(\zeta) \quad = \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\xi,\eta) \quad . \qquad \square$$

Folgerung 66.1.11 : Seien die in (66.1.9) definierten Funktionen u und v sogar zweimal stetig partiell differenzierbar, und Lösungen der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen (abgekürzt C.R.). Dann folgt mit Satz 35.14 (F 40) (Satz von Schwarz) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) \overset{\text{C.R.}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}v\right) \overset{35.14}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right) \overset{\text{C.R.}}{=} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ,$$

also $\Delta\, u = 0$ für $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Ebenso zeigt man:

$$\Delta\, v \quad = \quad 0 \quad .$$

u und v sind also harmonische Funktionen. $\square$

Mit Satz 66.1.10 können wir weitere Funktionen auf Differenzierbarkeit untersuchen:

(66.1.12) Beispiel : In Satz und Definition 9.4.4 (K 123) hatten wir die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen: Zu $z \in \mathbb{C}$ gibt es $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$z = r\,e^{i\varphi} \quad ,$$

und zwar ist r eindeutig bestimmt,

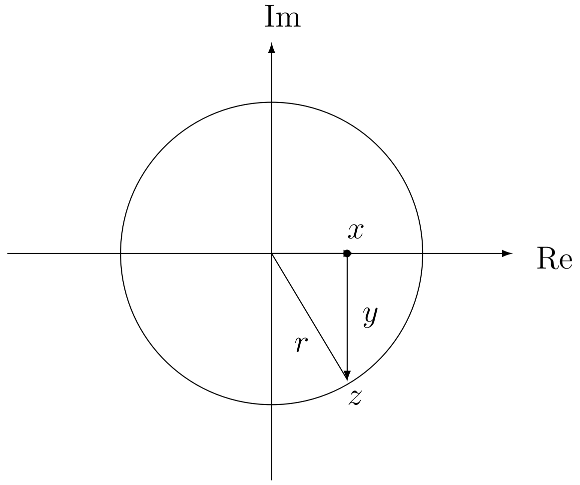
$$r = |z| \quad ,$$

und φ ist für $z \neq 0$ nur bis auf ein additives Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. φ hieß **ein** Argument von z. Fordert man

$$\varphi \in (-\pi;\pi] \quad ,$$

so ist φ eindeutig bestimmt. Wir hatten gesehen, dass man φ etwa als

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$



berechnen kann. Nennen wir dieses φ das **Hauptargument** von z,

$$\operatorname{Arg} z := \varphi \quad , \quad \text{so folgt}$$

$$z = |z|\,e^{i\varphi} = \exp(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z) \quad .$$

Wir definieren nun den **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**

$$\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow S := \{\ x+iy \mid y \in (-\pi,\pi]\ \} \quad \text{durch}$$

$$\log z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \quad ,$$

dann ist $\log$ die Umkehrfunktion von

$$\exp : S \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad .$$

Die Funktion $\log : \mathbb{C}^* \longrightarrow S$ ist allerdings in den $z \in \mathbb{R}_-^*$, also auf der negativen reellen Achse, nicht stetig: Sei $x \in \mathbb{R}_+^*$, dann ist $-x \in \mathbb{R}_-^*$, und sowohl

$$x_n := x\,e^{i(\pi - \frac{1}{n})} \quad \text{als auch} \quad x_n' := x\,e^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$$

sind Folgen, die gegen $-x$ konvergieren, denn $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. Da $\pi - \frac{1}{n}$ und $-\pi + \frac{1}{n}$ in $(-\pi, \pi]$ liegen, folgt

$$\log x_n = \ln x + i(\pi - \frac{1}{n}) \quad , \quad \log x'_n = \ln x + i(-\pi + \frac{1}{n}) \quad ,$$

$$\lim_{k\to\infty} n\infty \ \log x_n = \ln x + i\pi = \log(-x) \quad ,$$

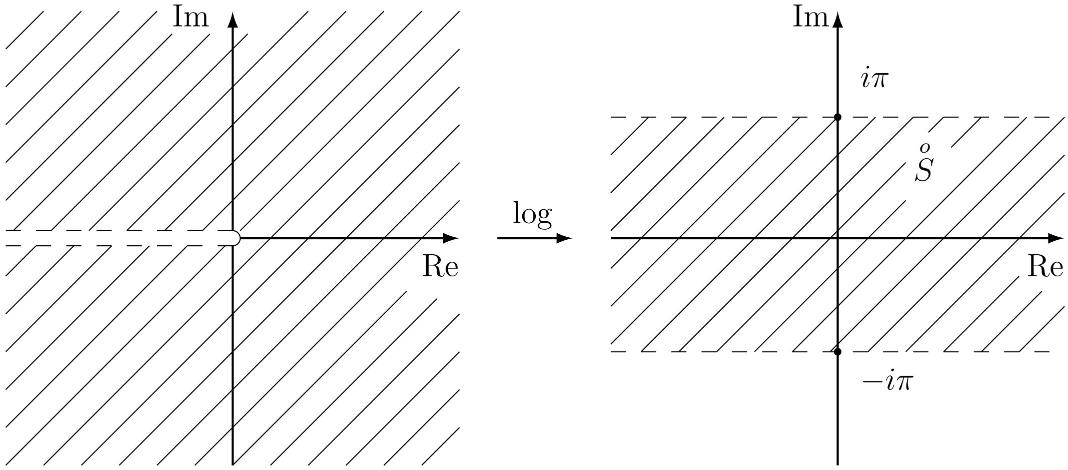
$$\lim_{k\to\infty} n\infty \ \log x'_n = \ln x - i\pi \neq \log(-x) \quad .$$

Es ist also nicht zu erwarten, dass log auf $\mathbb{C}^*$ differenzierbar ist. Aber die Restriktion

$$(*) \qquad \log : \ \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longrightarrow \overset{o}{S} \quad , \quad \log z \quad := \quad \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

ist immer noch bijektiv, mit der Umkehrfunktion

$$\exp : \overset{o}{S} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad , \quad \overset{o}{S} = \{ \ x + iy \in \mathbb{C} \ | \ y \in (-\pi; \pi) \ \} \quad .$$



Die in $(*)$ definierte Funktion log ist nach Satz 66.1.10 in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ komplex differenzierbar, denn es ist

$$\log(x + iy) = \underbrace{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{sgn} y \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{v(x,y)} \quad \text{mit}$$

$$\operatorname{sgn} y \ : \ = \ \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \\ -1 & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

also, wenn man berücksichtigt, dass für $y \neq 0$ gilt : $\operatorname{sgn} y = \dfrac{y}{\sqrt{y^2}}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad .$$

Das gilt auch für $x > 0$, $y = 0$, und außerdem

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad .$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind also erfüllt; log ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ differenzierbar, und nach Formel $(*)$ aus Satz 66.1.10 folgt

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{1}{z} \quad ,$$

wie man das vom reellen Logarithmus kennt.

Definition 66.1.13 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$. Eine Funktion

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt **(komplex-)analytisch** in A, wenn es zu jedem $\zeta \in A$ ein $\rho > 0$ und eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gibt mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n \quad \text{für alle} \quad z \in K_\rho(\zeta) \quad ,$$

d.h. wenn sich die Funktion um jedes $\zeta \in A$ in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius > 0 entwickeln lässt.

Folgerung 66.1.14 : Nach Beispiel (66.1.4) ist jede in A analytische Funktion in A differenzierbar. Wir werden in Satz 66.5.5 zeigen, dass auch umgekehrt jede in der offenen Menge A differenzierbare Funktion in A analytisch ist, und damit nach Beispiel (66.1.4) und mit Induktion: beliebig oft differenzierbar ! **Folgerung 66.1.15 :** Sei A offen in $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch in A. Zu $\zeta \in A$ hat man dann ein $\rho > 0$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\zeta)^n \quad \text{für} \quad z \in K_\rho(\zeta)$$

ist. Die a_n sind eindeutig bestimmt, denn mit Induktion nach k folgt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\,a_n\,(z-\zeta)^{n-k} \quad \text{für} \quad z \in K_\rho(\zeta)\,,$$

und damit

$$f^{(k)}(\zeta) = k!\,a_k \quad , \quad \text{also} \quad a_k = \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(\zeta) \quad .$$

Satz 66.1.16 : Die Nullstellen einer analytischen Funktion

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad A \quad \text{offen in} \quad \mathbb{C}, A \neq \emptyset$$

sind **isoliert**, d.h. ist

$$\zeta \in A \quad \text{mit} \quad f(\zeta) = 0\,, \text{ so gibt es ein} \quad r > 0\,, \text{ so dass}$$

entweder $f(z) = 0$ für alle $z \in K_r(\zeta)$ gilt,
oder $f(z) \neq 0$ für alle $z \in K_r(\zeta) \setminus \{\zeta\}$.

Beweis : Es gibt ein $\rho > 0$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n \quad \text{für} \quad z \in K_\rho(\zeta) \subset A$$

ist. Es kann sein, dass alle $a_n = 0$ sind, dann ist

$$f(z) = 0 \quad \text{für alle} \quad z \in K_\rho(\zeta) \quad .$$

Anderenfalls gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0 \quad , \quad \text{aber} \quad a_k \neq 0 \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n = (z-\zeta)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z-\zeta)^n$$

für $z \in K_\rho(\zeta)$. Die in $K_\rho(\zeta)$ konvergente Potenzreihe

$$g(z) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z-\zeta)^n$$

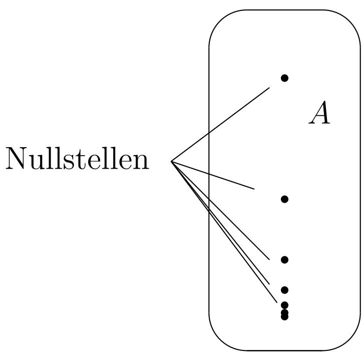
ist nach Folgerung 7.3.13 (K 86) stetig. Zu $\varepsilon := \dfrac{|a_k|}{2}$ gibt es also ein r mit $0 < r \leq \rho$ und

$$|g(z) - g(\zeta)| = |g(z) - a_k| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad z \in K_r(\zeta) \quad ,$$

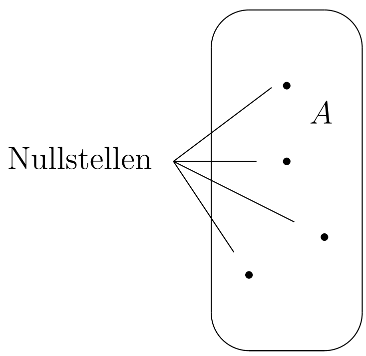
also $|g(z)| \geq |a_k| - |g(z) - a_k| > |a_k| - \dfrac{|a_k|}{2} = \dfrac{|a_k|}{2} > 0$,
also $g(z) \neq 0$ und damit auch

$$f(z) = (z-\zeta)^k \cdot g(z) \neq 0 \quad \text{für} \quad z \in K_r(\zeta) \quad . \qquad \square$$

Bemerkung 66.1.17 : Man kann den Satz 66.1.16 auch so formulieren: Ist f analytisch in A , $f \neq 0$, so gibt es in A keine konvergente Folge von Nullstellen von f :



nicht so,



sondern so.

66.2 Wegintegrale in $\mathbb{C}$

Vieles geht hier ähnlich wie bei Wegintegralen im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^2$, mit denen wir uns schon in den letzten Semestern beschäftigt haben.

Definition 66.2.1 : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine stetige Abbildung

$$\varphi : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

heißt ein **(parametrisierter) Weg** . $\varphi(a)$ heißt der **Anfangspunkt** , $\varphi(b)$ der **Endpunkt** des Weges φ.

a) φ heißt **geschlossen**, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$ ist.

b) φ heißt differenzierbar, wenn für alle $t \in [a;b]$ die Ableitung $\varphi'(t)$ existiert (das ist die Ableitung nach der reellen Variablen t). Für $t = a$ bzw. b sind damit die einseitigen Ableitungen gemeint.

c) φ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Partition

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

von $[a;b]$ gibt, so dass

$$\varphi|_{[a_{j-1};a_j]} : \quad [a_{j-1};a_j] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad \text{für} \quad j \in \underline{n}$$

stetig differenzierbar ist. Im folgenden bedeute **Weg** stets "stückweise stetig differenzierbarer Weg".

d) Die Menge $|\varphi| \quad := \quad \varphi(\,[a;b]\,)$ nennen wir die **Spur** von φ.

(66.2.2) Zur Motivation : Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$\varphi : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

war nach Satz 34.10 (F28)

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \quad \text{die Länge von } \varphi\,.$$

Dabei war $\|\quad\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$, also $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Für $x + iy \in \mathbb{C}$ ist $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$. Nahe liegt daher die

Definition 66.2.3 : Für einen (stückweise stetig differenzierbaren) Weg

$$\varphi : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad \text{nennen wir}$$

$$L(\varphi) \quad := \quad \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{die } \textbf{Länge} \text{ von } \varphi \quad .$$

Definition 66.2.4 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$,

$$f : \quad A \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad \text{sei stetig.}$$

Sei $[a;b]$ ein reelles Intervall und

$$\varphi : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

ein Weg mit $|\varphi| \subset A$. Dann definieren wir als
Integral von f über den Weg φ:

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \quad := \quad \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

Da φ' nur an höchstens endlich vielen Stellen unstetig ist, ist das ein Integral über eine Regelfunktion, also definiert.

Folgerung 66.2.5 : Seien

$$\alpha : \quad [a;b] \quad \longrightarrow \quad A \quad \text{und} \quad \beta : \quad [a_1;b_1] \quad \longrightarrow \quad A$$

zwei Wege mit gleicher Spur, also $|\alpha| \,=\, |\beta|$, und gleicher Orientierung, d.h. es existiere eine Parametertransformation

$$\psi : \quad [a_1;b_1] \quad \longrightarrow \quad [a;b] \quad \text{mit}$$

$$\alpha \circ \psi \,=\, \beta \quad \text{und} \quad \psi'(t) > 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [a_1;b_1] \quad .$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int\limits_{\beta} f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Beweis :

$$\int\limits_{\beta} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} f(\beta(t))\beta'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} f(\alpha(\psi(t)))\,(\alpha \circ \psi)'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} f(\alpha(\psi(t)))\,\alpha'(\psi(t))\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \quad \int\limits_{a}^{b} f(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau)\;\mathrm{d}\,\tau \quad = \quad \int\limits_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad ,$$

denn ψ ist monoton wachsend, also $\psi(a_1) \,=\, a$, $\psi(b_1) \,=\, b$. □

Folgerung 66.2.6 : Sind α und β wie in Satz 66.2.5, aber “entgegengesetzt orientiert”, d.h. gilt

$$\psi'(t) < 0 \quad \text{für alle} \quad t \in [a_1;b_1] \quad , \quad \text{so folgt}$$

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad -\int\limits_{\beta} f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

□

(66.2.7) Beispiele : 1.) Sei $f\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\quad ,\quad f(z) := z^2$ und

$$\varphi\ :\ [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}\quad ,\quad \varphi(t) \quad := \quad t\cdot(1+i)\quad ,\quad \text{dann ist}$$

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int\limits_0^1 f(t(1+i))\cdot(1+i)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int\limits_0^1 t^2(1+i)^3\,\mathrm{d}t$$

$$= \quad (-2+2i)\,\frac{1}{3}t^3\,\Bigg|_0^1 \quad = \quad -\frac{2}{3}(1-i)\quad .$$

Beachten Sie dabei:
a) φ ist kein geschlossener Weg.
b) f besitzt eine "Stammfunktion" : Für $F(z) := \dfrac{1}{3}z^3$ gilt $F'(z) = f(z)$.
2.) Sei f wie in 1.) und φ der geschlossene Weg

$$\varphi\ :\ [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\quad ,\quad \varphi(t) := r\,e^{it}\,,\ r>0\ \text{fest. Dafür ist}$$

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} (r\,e^{it})^2 ire^{it}\,\mathrm{d}t = ir^3\int\limits_0^{2\pi} e^{3it}\,\mathrm{d}t$$

$$= \quad \frac{ir^3}{3i}\,e^{3it}\,\Bigg|_0^{2\pi} \quad = \quad 0\quad .\quad \text{Hier war nun}$$

a) φ ein geschlossener Weg,
b) f eine Funktion mit einer Stammfunktion.
3.) Wir nehmen denselben Weg wie in 2.), aber

$$f\ :\ \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}\quad ,\quad f(z) \quad := \quad \frac{1}{z}\quad .$$

f besitzt auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfunktion, denn der komplexe Logarithmus $\log\ :\ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ist nur auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ differenzierbar. Es gilt

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,\mathrm{d}t \quad = \quad i\int\limits_0^{2\pi}\,\mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi i\quad .$$

- Allgemein gilt

Satz 66.2.8 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, und zu

$$F\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C}\quad \text{gebe es eine } \underline{\textbf{Stammfunktion}}\quad F\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C}\,,$$

d.h. es gelte $\forall\, z\in A\ :\ F'(z) = f(z)$. Dann gilt für jeden Weg $\varphi\ :\ [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $|\varphi| \subset A$:

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\quad .$$

Beweis : Für $G : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $G(t) := F(\varphi(t))$ gilt

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad , \qquad \text{also}$$

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t \stackrel{(*)}{=}$$

$$G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \quad ,$$

$\stackrel{(*)}{=}$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Für die Abschätzung von Integralen brauchen wir den

Satz 66.2.9 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und φ ein Weg mit $|\varphi| \subset A$. Dann gilt

$$\left| \int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L(\varphi) \cdot \sup\{\ |f(z)| \ \mid \ z \in |\varphi| \ \} \ .$$

Beweis : Sei $\varphi : [a;b] \longrightarrow A$, dann ist

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad . \quad \text{Nun ist}$$

$$g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(t) := f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

eine Regelfunktion, also gilt nach Satz 11.3.3 b) (K197) :

$$\left| \int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int\limits_a^b |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \quad .$$

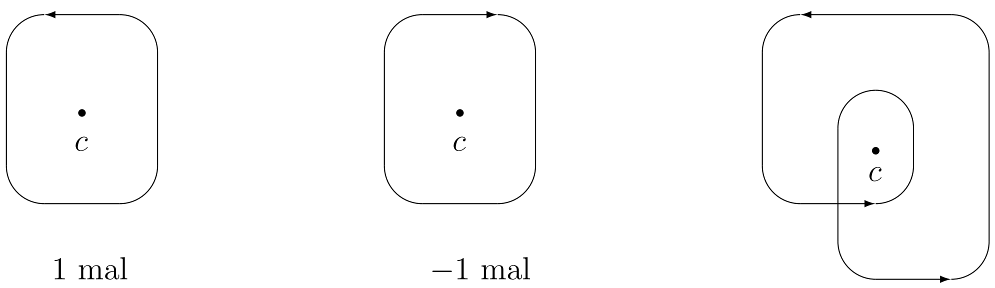
Auf der kompakten Menge $|\varphi|$ existiert

$$M := \max\{\ |f(z)| \ \mid \ z \in |\varphi| \ \} \quad , \quad \text{und damit wird}$$

$$\left| \int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \int\limits_a^b M \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = M \cdot L(\varphi) \quad .$$ □

66.3 Homologie von Wegen

Für die Berechnung von Wegintegralen ist es nützlich, zu wissen, “wie oft” ein geschlossener Weg φ um einen Punkt $c \notin |\varphi|$ “herumläuft”,



1 mal $\qquad -1$ mal $\qquad$ 2 mal

Es ist nicht leicht, den Begriff der "Windungszahl" formal korrekt und auch noch anschaulich zu definieren.

(66.3.1) Beispiel : Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann läuft der Weg

$$\varphi_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi_n(t) := e^{int} \quad ,$$

wie man anschaulich sieht, $n-$mal um den Nullpunkt herum. Wie kann man diese Zahl n aus dem Weg φ_n berechnen ? Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}} \, \mathrm{d}t = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = n \quad ,$$

und das machen wir für beliebige Wege :

Satz und Definition 66.3.2 : Sei $\varphi : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \notin |\varphi|$. Dann ist

$$I(\varphi, \zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\mathrm{d}z}{z - \zeta}$$

eine ganze Zahl. $I(\varphi, \zeta)$ heißt die **Windungszahl von φ um ζ** .

Beweis : φ ist stetig und stückweise stetig differenzierbar, also gibt es eine Partition

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

so dass φ' auf den Intervallen $[a_{j-1}, a_j]$, $j \in \underline{n}$, stetig ist. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\mathrm{d}z}{z - \zeta} = \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta} \, \mathrm{d}t \quad .$$

Wir lassen die obere Grenze variieren: Sei

$$h : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad h(x) := \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta} \, \mathrm{d}t \quad .$$

Wir zeigen ,dass h stetig ist: Da $|\varphi|$ kompakt und $\zeta \notin |\varphi|$ ist, ist

$$m := \inf \{ \ |\varphi(t) - \zeta| \ | \ t \in [a; b] \ \} = \inf \{ \ |z - \zeta| \ | \ z \in |\varphi| \ \} > 0 \, .$$

φ' ist stetig auf den endlich vielen kompakten Teilintervallen $[a_{j-1}, a_j]$, also existiert

$$S := \sup \{ \ \sup \{ \ |\varphi'(t)| \ | \ t \in [a_{j-1}; a_j] \ \} \ | \ j \in \underline{n} \ \} \in \mathbb{R}_+ \quad ,$$

und mit $M := \dfrac{S}{m}$ gilt

$$\left|\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\zeta}\right| \le M \quad \text{für alle} \quad t \in [a;b] \quad ,$$

also für $x, x' \in [a;b]$ mit $x' \le x$ nach Satz 11.3.3 b) :

$$|h(x)-h(x')| = \left|\int\limits_{x'}^{x} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\zeta}\,\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_{x'}^{x} \left|\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\zeta}\right| \mathrm{d}t \le M\,(x-x')\,,$$

entsprechend für $x \le x'$, also

$$|h(x)-h(x')| \le M|x-x'|$$

und damit ist h stetig auf $[a;b]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist h differenzierbar in allen $x \ne a_1, \ldots, a_{n-1}$, und dafür gilt

$$(*) \qquad h'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)-\zeta} \quad .$$

Wir definieren nun

$$f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(x) := e^{-h(x)} \cdot (\varphi(x)-\zeta) \quad ,$$

dann ist f stetig, da h und φ stetig sind, und differenzierbar in allen $x \ne a_1, \ldots, a_{n-1}$, mit

$$f'(x) = e^{-h(x)}(-h'(x)(\varphi(x)-\zeta)+\varphi'(x)) = 0 \quad \text{nach} \quad (*)\,.$$

Auf allen Teilintervallen $[a_{j-1}, a_j]$, $j \in \underline{n}$, ist also f differenzierbar mit Ableitung 0. Nach dem Kriterium für Konstanz ((9.3.12), K 146) ist f auf den Teilintervallen $[a_{j-1}, a_j]$ konstant. (In den Teilungspunkten hat man hier die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte von f zu nehmen.) Es gibt also $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = c_j \quad \text{für} \quad x \in [a_{j-1}; a_j] \quad .$$

Da aber f auf ganz $[a;b]$ stetig ist, sind diese Konstanten alle gleich,

$$f(x) = f(a_0) = f(a) \quad \text{für alle} \quad x \in [a;b] \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$e^{-h(x)} \cdot (\varphi(x)-\zeta) = e^{-h(a)} \cdot (\varphi(a)-\zeta) = \varphi(a)-\zeta \quad ,$$

$$e^{h(x)} = \frac{\varphi(x)-\zeta}{\varphi(a)-\zeta} \quad , \quad e^{h(b)} = \frac{\varphi(b)-\zeta}{\varphi(a)-\zeta} = 1 \quad ,$$

da φ geschlossen ist. Nun wissen wir aus Folgerung 8.7.8 (K 122) :

$$e^z = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 2\pi i k \quad , \quad \text{also :}$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : h(b) = 2\pi i k \quad , \quad \text{also}$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} = \int\limits_{a}^{b} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\zeta}\,\mathrm{d}t = h(b) = 2\pi i k \quad . \qquad \square$$

Definition 66.3.3 : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und

$$\varphi : \ [a;b] \longrightarrow A \quad , \quad \psi : \ [a_1;b_1] \longrightarrow A$$

zwei geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Wege in A . φ und ψ heißen **homolog in A** , in Zeichen:

$$\varphi \sim_A \psi \quad , \quad \text{wenn}$$

$$\forall\, x \in \complement A : \ I(\varphi, x) = I(\psi, x)$$

gilt, d.h. wenn φ und ψ um alle Punkte **außerhalb** von A gleich oft herumlaufen. Insbesondere kann es sein, dass ein geschlossener Weg φ in A homolog ist zu einem Weg φ_0 , der nur aus einem Punkt $z_0 \in A$ besteht:

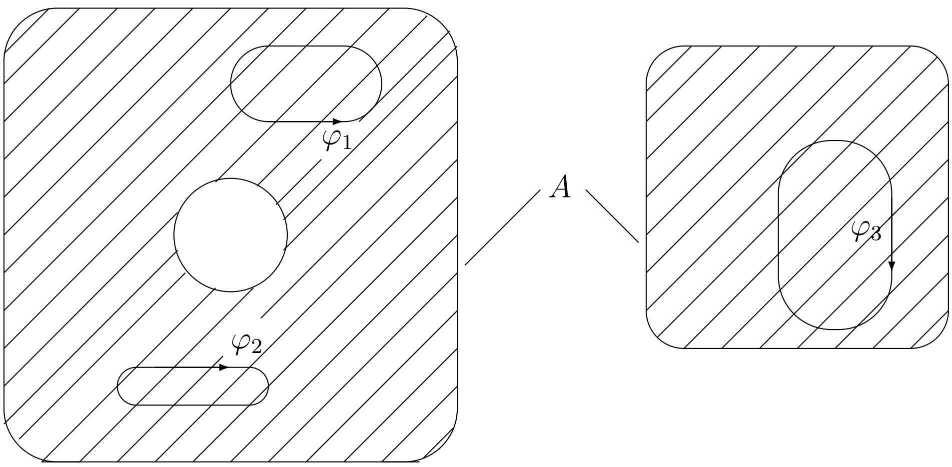
$$\varphi_0 : \ [a_0;b_0] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi_0(t) = z_0 \quad \text{für alle} \quad t \in [a_0;b_0] \quad .$$

φ heißt dann **nullhomolog in A**; man schreibt

$$\varphi \sim_A 0 \quad ,$$

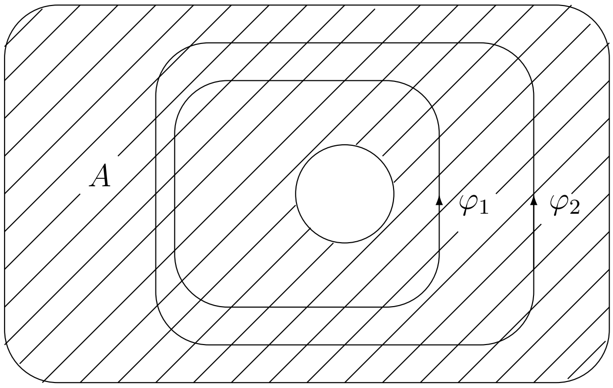
denn es kommt nicht darauf an, welchen Wert das z_0 hat.

Beispiele (66.3.4) "Homologie" ist ein anschaulicher Begriff:
1) Die folgenden Wege sind in A homolog :



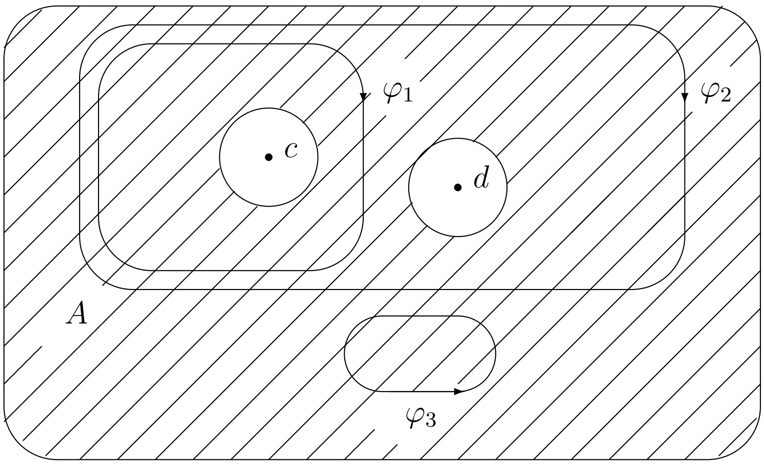
$$\varphi_1 \sim_A \varphi_2 \sim_A \varphi_3 \sim_A 0$$

2)



$\varphi_1 \sim_A \varphi_2$, $\neg(\varphi_1 \sim_A 0)$

3) Die folgenden Wege sind in A
nicht homolog: Es gilt
$I(\varphi_1, c) = -1$, $I(\varphi_3, c) = 0$,
also $\neg(\varphi_1 \sim_A \varphi_3)$



$I(\varphi_1, d) = 0$, $I(\varphi_2, d) = -1$, also $\neg(\varphi_1 \sim_A \varphi_2)$,
$I(\varphi_2, d) = -1$, $I(\varphi_3, d) = 0$, also $\neg(\varphi_2 \sim_A \varphi_3)$.

Wir sehen: Es hängt von der Menge A und von den Wegen ab, ob zwei Wege homolog sind !

- Man kann den Begriff des geschlossenen Weges noch etwas verallgemeinern:

Definition 66.3.5 : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen, $A \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$\Gamma := ((\gamma_j, k_j))_{j \in \underline{n}}$$

eine Familie von Paaren von geschlossenen (stückweise stetig differenzierbaren) Wegen γ_j in A und ganzen Zahlen k_j . Man schreibt dafür

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{n} k_j \gamma_j$$

und nennt Γ einen **Zyklus** in A. Für stetiges

$$f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{setzt man}$$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} k_j \int\limits_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

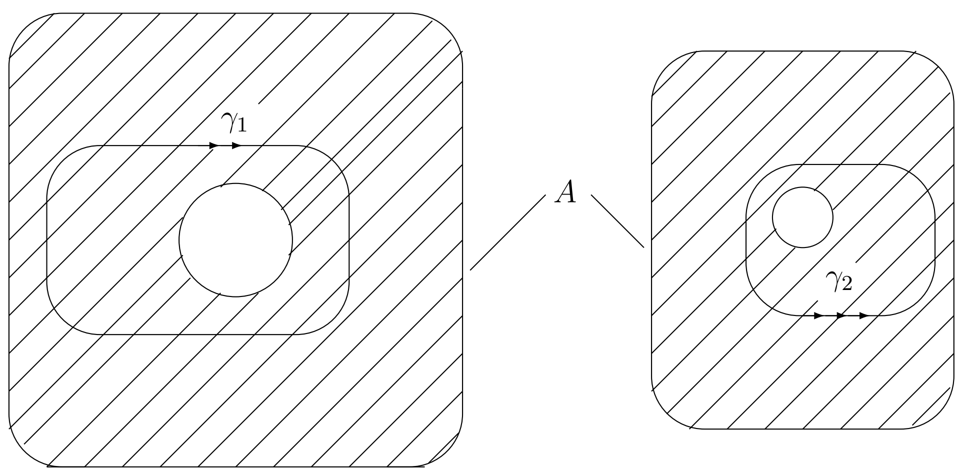
Man nennt $|\Gamma| \quad := \quad \bigcup_{j=1}^{n} |\gamma_j|$ die **Spur** von Γ, und für $c \in \mathbb{C}$, $c \notin |\Gamma|$ nennt man

$$I(\Gamma, c) \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} k_j\, I(\gamma_j, c)$$

die **Windungszahl** von Γ um c . Γ heißt **nullhomolog in A**, wenn

$$\forall\, c \in \complement A\ :\ I(\Gamma, c) \ = \ 0 \quad \text{ist.}$$

Bemerkung 66.3.6 : Wir können statt über einzelne Wege in A also auch über Zyklen wie



$$2\gamma_1 + 3\gamma_2$$

integrieren, die keine Wege sind.

66.4 Der Cauchysche Integralsatz

Eine vereinfachte Version, deren Beweis in KÖNIGSBERGER, Analysis 2, steht, ist

(66.4.1) Cauchyscher Integralsatz für offene konvexe Teilmengen :

Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen, $A \neq \emptyset$ und **konvex**, d.h. für alle $a, b \in A$ sei auch die Verbindungsstrecke

$$\{\ a + t(b-a)\ \mid\ t \in [0;1]\ \}$$

Teilmenge von A. Sei

$$f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar. Dann gilt}$$

a) f besitzt in A eine Stammfunktion $F : A \longrightarrow \mathbb{C}$, d.h. es gibt eine in A komplex differenzierbare Funktion F mit

$$F'(z) \quad = \quad f(z) \quad .$$

Mit Satz 66.2.8 folgt daraus:

b) Für jeden geschlossenen Weg γ in A ist

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad .$$

Den **Beweis** führen wir in zwei Teilen, (66.4.2) und (66.4.3) :

(66.4.2) Lemma von Goursat : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und konvex,

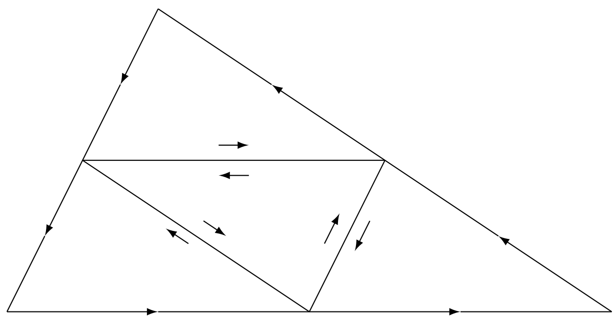
$$f \;:\; A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar.}$$

Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta \subset A$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad .$$

Beweis : Wir zerlegen das Dreieck Δ durch Verbinden der Seitenmittelpunkte zunächst in vier kongruente Dreiecke. Sei Δ_1 eines dieser vier Dreiecke, für welches das Integral über den Rand den größten Betrag hat. Da die Summe der Integrale über die Ränder der vier Teildreiecke gerade $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z$ ist, folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad .$$



Durch Fortsetzung dieses Verfahrens finden wir eine Folge von Dreiecken $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$ mit

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad \leq \quad 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad .$$

Die Mittelpunkte der Dreiecke Δ_n bilden eine Cauchyfolge, und z_0 sei deren Grenzwert. z_0 liegt in allen Dreiecken Δ_n . Wegen der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0 gilt mit $B := f'(z_0)$:

$$f(z) \;=\; f(z_0) + B \cdot (z - z_0) + |z - z_0| \cdot r(z)\,,$$

wobei r stetig ist in A mit $r(z_0) = 0$. Da die konstante Funktion $z \longmapsto z_0$ und die affin-lineare Funktion $z \longmapsto B \cdot (z - z_0)$ Stammfunktionen besitzen, folgt nach Satz 66.2.8 :

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0|\, r(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Ist L der Umfang des Dreiecks Δ , so hat das Dreieck Δ_n den Umfang $2^{-n}L$. Ferner gilt

$$|z - z_0| \le 2^{-n}L \quad \text{für} \quad z \in \partial\Delta_n\,,$$

da z_0 in Δ_n enthalten ist. Mit Satz 66.2.9 folgt

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0| r(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad \le \quad 2^{-n}L \cdot 2^{-n}L \cdot \sup\{\ |r(z)|\ \mid\ z \in \partial\Delta_n\ \} \quad .$$

Insgesamt ergibt sich also für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \quad \le \quad L^2 \sup\{\ |r(z)|\ \mid\ z \in \Delta_n\ \} \quad .$$

Wegen $\lim\limits_{z \to z_0} r(z) = 0$ beweist diese Abschätzung das Lemma. □

(66.4.3) Integrabilitätskriterium : (L 200) Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, und für jedes Dreieck $\Delta \subset A$ gelte

$$(*) \qquad \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann besitzt f in A eine komplex-differenzierbare Stammfunktion F.

Beweis : Sei $a \in A$ beliebig. Wenn f eine Stammfunktion besitzt, erhält man diese durch Integration längs der Strecke von a nach z, $z \in A$, d.h. längs

$$\gamma_{a,z}\ :\ [0;1] \longrightarrow A\,,\ \gamma_{a,z}(t) := a + t(z - a) \quad .$$

Wir definieren also

$$F(z) \quad := \quad \int_{\gamma_{a,z}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

und zeigen, dass $F' = f$ gilt. Nun gilt wegen der Voraussetzung $(*)$, wenn wir für $z, z+h \in A$ das (in A gelegene) Dreieck mit den Ecken $a, z, z+h$ betrachten:

$$\left(\int_{\gamma_{z,z+h}} + \int_{\gamma_{z+h,a}} + \int_{\gamma_{a,z}} \right) f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$F(z+h) - F(z) \quad = \quad \int\limits_{\gamma_{z,z+h}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \quad .$$

Wegen $f(z) = \int\limits_{\gamma_{z,z+h}} f(z)\,\mathrm{d}\zeta$ folgt mit der Abschätzung 66.2.9 :

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup\{\ |f(\zeta) - f(z)| \ \mid \ \zeta \in |\gamma_{z,z+h}|\ \} \quad .$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt daraus für $h \to 0$ die Behauptung. $\square$

Bemerkung 66.4.4 : Lässt man die Voraussetzung “ A konvex ” in Satz 66.4.1 weg, so erhält man die Aussage b) nicht mehr:

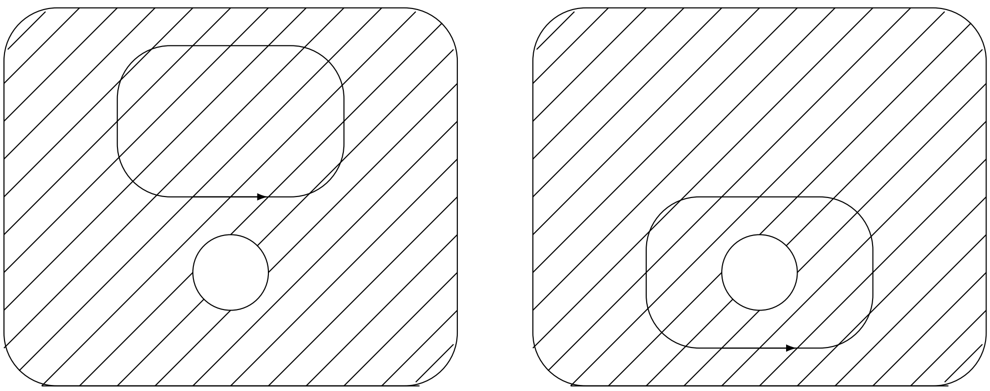
$$f \ : \ \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad , \quad f(z) \quad := \quad \frac{1}{z}$$

ist differenzierbar, aber für den geschlossenen Weg

$$\varphi \ : \ [0; 2\,\pi] \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(t) \quad := \quad e^{it} \quad \text{gilt}$$

$$\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z \ = \ 2\,\pi i \quad .$$

Will man die Aussage b) für nicht konvexes A haben, so muss man fordern, dass der geschlossene Weg um Punkte, die nicht zum Definitionsbereich A von f gehören, nicht herumläuft, d.h. präziser: Man setzt
$\varphi \sim_A 0$ voraus:



so, nicht so.

(66.4.5) Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz :

Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen, $A \neq \emptyset$,

$$f \ : \ A \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar}$$

und Γ ein in A nullhomologer Zyklus. Dann gilt

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad .$$

Den **Beweis** davon, der natürlich den Satz 66.4.1 benutzt, können Sie in Büchern über Funktionentheorie nachlesen, etwa in

W.Fischer, I.Lieb: Funktionentheorie, S.105 - 108 . □

Eine zu (66.4.5) gleichbedeutende Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes, die man praktisch brauchen kann, ist

(66.4.6) Cauchyscher Integralsatz, 2.Formulierung :
Sei A offen in $\mathbb{C}$,

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar,}$$

und Γ_1, Γ_2 seien in A homologe Zyklen, d.h.

$$I(\Gamma_1, c) = I(\Gamma_2, c) \quad \text{für alle} \quad c \in \complement A \quad . \quad \text{Dann gilt}$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Beweis : (66.4.5) $\Longrightarrow$ (66.4.6) : Seien

$$\Gamma_1 = \sum_{j=1}^{n} k_j\gamma_j \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \sum_{j=n+1}^{n+m} k_j\gamma_j$$

zwei in A homologe Zyklen, dann ist

$$\Gamma := \Gamma_1 - \Gamma_2 := \sum_{j=1}^{n} k_j\gamma_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} (-k_j)\gamma_j$$

nullhomolog in A , und aus

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{folgt die Behauptung.}$$

(66.4.6) $\Longrightarrow$ (66.4.5) : Zu einem gegebenen nullhomologen Zyklus $\Gamma =: \Gamma_1$ nimmt man

$$\Gamma_2 := \gamma_0$$

mit einem Weg γ_0 , der nur aus einem Punkt aus A besteht. Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad , \quad \text{da} \quad \Gamma \sim_A 0 \sim_A \gamma_0 \quad .$$ □

Der Cauchysche Integralsatz sagt aus, dass es bei der Berechnung von Wegintegralen nur auf die vom Weg umschlossenen "Singularitäten" ankommt, also auf die Punkte, in denen f **nicht** differenzierbar bzw. gar nicht definiert ist, denn dort, wo f differenzierbar ist, kann man den Weg abändern. Zunächst: Es gibt Singularitäten, die man beheben kann, die bei der Integration nichts ausmachen :

Definition 66.4.7 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $\zeta \in A$,

$$f \ : \ A \setminus \{\zeta\} \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad .$$

ζ heißt **Riemann-Punkt** von f , wenn es eine Umgebung $U \subset A$ von ζ gibt, so dass f auf $U \setminus \{\zeta\}$ definiert, **beschränkt** und differenzierbar ist.

(66.4.8) Beispiele : 1) Sei $f \ : \ \mathbb{C}^* \ \longrightarrow \ \mathbb{C} \quad , \quad f(z) := e^{\frac{1}{z}}$, so ist 0 kein Riemann-Punkt von f , denn wegen $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in \mathbb{R}}} e^x = \infty$ gibt es keine Umgebung U von 0 , so dass f in $U \setminus \{0\}$ beschränkt ist.

2) Sei $f \ : \ \mathbb{C}^* \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{\sin z}{z}$. Dann ist 0 ein Riemann-Punkt von f , denn wegen

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\sin z}{z} \quad = \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} \quad = \quad \cos 0$$

gibt es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\sin z}{z} - 1 \right| < 1 \quad , \qquad \text{also} \quad \left| \frac{\sin z}{z} \right| < 2 \quad \text{für} \quad z \in K_\delta(0) \quad .$$

Es wird sich zeigen, dass man f in jedem Riemann-Punkt stetig ergänzen kann.

Behauptung (66.4.9) : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $\zeta \in A$,

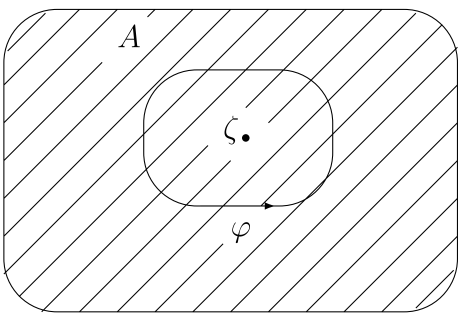
$$f \ : \ A \setminus \{\zeta\} \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$$

sei differenzierbar und ζ ein Riemann-Punkt von f . Sei

$$\varphi \ : \ [a;b] \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$$

ein geschlossener Weg mit $\varphi \subset A \setminus \{\zeta\}$. φ sei nullhomolog in A . Dann ist

$$\int_\varphi f(z) \, \mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad .$$



Das heißt: Riemann-Punkte verhalten sich bei der Integration genau so wie Punkte, in denen f differenzierbar ist.

Beweis : Da φ nullhomolog ist, gilt

$$\forall c \in \complement A : \; I(\varphi, c) \quad = \quad 0 \quad . \quad \text{Sei}$$

$$w \quad := \quad I(\varphi, \zeta) \quad ,$$

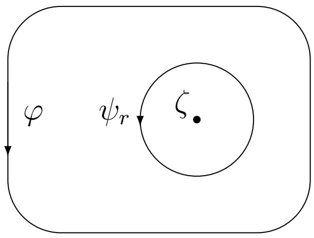
dann ist $w \in \mathbb{Z}$. Sei U eine Umgebung von ζ, so dass f in $U \setminus \{\zeta\}$ beschränkt ist, und $r \in \mathbb{R}_+^*$ so klein, dass

$$K_r(\zeta) \subset U \quad \text{ist, dann ist}$$

$\psi_r \; : \; [0, 2\pi] \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \quad , \quad \psi_r(t) := re^{iwt} + \zeta$
ein geschlossener Weg in $A \setminus \{\zeta\}$ mit

$$I(\psi_r, c) = 0 \quad \text{für} \quad c \in \complement A \quad , \quad I(\psi_r, \zeta) = w \quad , \qquad \text{also}$$

$$I(\psi_r, c) = I(\varphi, c) \quad \text{für alle} \quad c \in \complement (A \setminus \{\zeta\}) \quad .$$



ψ_r und φ sind also homolog in $A \setminus \{\zeta\}$, und da f in $A \setminus \{\zeta\}$ differenzierbar ist, gilt nach Satz (66.4.6) :

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \int_{\psi_r} f(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Auf $U \setminus \{\zeta\}$ ist f beschränkt, es gibt also ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle} \quad z \in U \setminus \{\zeta\} \quad ,$$

also folgt nach der Abschätzungsformel 66.2.9 :

$$\left| \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq L(\psi_r) \cdot \sup\{ \; |f(z)| \; | \; z \in |\psi_r| \; \} \; \leq \; 2\pi r |w| \cdot M \quad ,$$

wobei man noch $r \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig klein wählen kann, also

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad . \qquad \square$$

66.5 Die Cauchysche Integralformel

(66.5.1) Cauchysche Integralformel : Sei A offen in $\mathbb{C}$, φ ein geschlossener Weg in A, und φ sei nullhomolog in A. Sei $\zeta \in A$, $\zeta \notin |\varphi|$. Dann gilt für jede differenzierbare Funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\,\mathrm{d}z \quad = \quad I(\varphi, \zeta) \cdot f(\zeta) \quad .$$

Beweis : $g(z) := \dfrac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$ ist auf $A\setminus\{\zeta\}$ definiert und differenzierbar. Es existiert

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\neq\zeta}} g(z) \quad = \quad f'(\zeta) \quad ,$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von ζ, so dass gilt

$$z \in U\setminus\{\zeta\} \quad \Longrightarrow \quad |g(z)-f'(\zeta)| < \varepsilon \quad ,$$

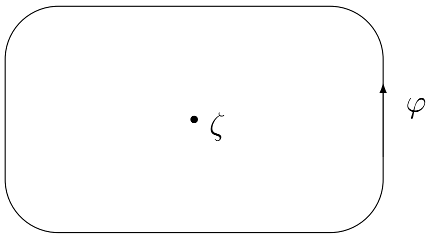
also $|g(z)| < |f'(\zeta)|+\varepsilon$ für $z \in U\setminus\{\zeta\}$. g ist also auf $U\setminus\{\zeta\}$ beschränkt; ζ ist ein Riemann-Punkt von g . Nach (66.4.8) ist

$$\int_\varphi g(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 0 \quad , \qquad \text{also}$$

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z = f(\zeta)\cdot\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-\zeta} \overset{66.3.2}{\longrightarrow} f(\zeta)\cdot 2\pi i\cdot I(\varphi,\zeta)\,.\square$$

<u>(66.5.2) Interpretation dieses Satzes :</u>

1) Ist $I(\varphi,\zeta) \neq 0$, so gilt



$$f(\zeta)\cdot I(\varphi,\zeta) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}z \quad ,$$

d.h. man kann den Funktionswert $f(\zeta)$ von f "in einem Punkt ζ im Inneren von φ " ausrechnen, wenn man $f(z)$ für $z \in |\varphi|$, also auf dem Rand der von φ eingeschlossenen Menge, kennt. Das liegt daran, dass $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind. Einen entsprechenden Satz für harmonische Funktionen

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

habe wir als Satz 63.2.4 (G165) (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen) kennengelernt:

$$u(a) \quad = \quad \frac{1}{2\,\pi}\int_{\|\xi\|=1} u(a+r\xi)\,\mathrm{d}\,S(\xi) \quad .$$

2) Meistens benutzt man die Formel umgekehrt, um Integrale auszurechnen.

<u>**Satz 66.5.3 :**</u> Sei A offen in $\mathbb{C}$, $A \neq \emptyset$ und

$$f \; : \; A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar.}$$

Dann ist f komplex-analytisch. Genauer: Sei $a \in A$ und $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, so dass $K_\rho(a) \subset A$ ist, dann gibt es eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ mit einem Konvergenzradius $\geq \rho$, so dass

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{für alle} \quad z \in K_\rho(a)$$

ist, und für jedes r mit $0 < r < \rho$ gilt

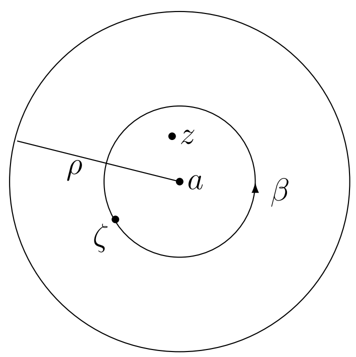
$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad ,$$

wobei $\partial K_r(a)$ der einmal positiv durchlaufene Rand von $K_r(a)$ ist.

<u>**Beweis :**</u> Sei $z \in K_\rho(a)$, dann wählen wir ein festes r mit

$|z-a| \; < \; r \; < \; \rho$ und den Weg

$\beta \; : \; [0 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \beta(t) \quad := \quad a + re^{it} \quad ,$



dann ist $I(\beta, z) \; = \; 1$, und nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad .$$

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert für $|z| < 1$ gegen $\dfrac{1}{1-z}$, also gilt für $\zeta \in |\beta|$:

$$\frac{1}{\zeta - z} \; = \; \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} \; = \; \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n \quad \text{für} \quad |z-a| < |\zeta - a| \, .$$

Für $\zeta \in |\beta|$ ist $|\zeta - a| = r$, und es war $|z-a| < r$. Also folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(\beta(t))}{(\beta(t)-a)^{n+1}} \cdot \beta'(t) \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n f(a+re^{it}) \cdot i}{r^n e^{int}} \right) \mathrm{d}t \quad .$$

Sei nun $g_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $g_n(t) := \dfrac{(z-a)^n f(a+re^{it}) \cdot i}{r^n e^{int}}$.

f ist in $K_\rho(a)$ differenzierbar, also stetig, also auf der kompakten Menge $\overline{K_\rho(a)}$ beschränkt, etwa

$$|f(\zeta)| \le M_r \quad \text{für} \quad \zeta \in \overline{K_r(a)} \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$|g_n(t)| \le \frac{|z-a|^n M_r}{r^n} \quad .$$

Wegen $|z-a| < r$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_r \left(\dfrac{|z-a|}{r} \right)^n$.
Das ist eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Nach Definition 7.3.10 (K85), angewendet auf die Menge $D := [0; 2\pi]$, konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \quad \text{normal, also gleichmäßig, auf} \quad [0, 2\pi] \quad ,$$

und nach Folgerung 11.7.3 (K304) können wir gliedweise integrieren, da die Integrale über die einzelnen Summanden existieren:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(z-a)^n f(re^{it}+a) i}{r^n e^{int}} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad . \quad \text{Mit}$$

$$(*) \qquad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad \text{folgt}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad .$$

Das Integral in $(*)$ ändert sich nicht, wenn wir das r in

$$\beta(t) = a + r\,e^{it}$$

näher an ρ gehen lassen, aber so, dass immer noch $r < \rho$ ist. Also gilt $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ für alle z mit $|z-a| < \rho$, also gilt die Behauptung.□

(66.5.4) Zusatz : Sei $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, A offen, $a \in A$ und $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ mit $K_\rho(a) \subset A$. Dann hat man für $z \in K_\rho(a)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad \text{und für die } a_n \text{ gilt}$$

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \quad \text{mit} \quad M_r := \sup\{ \ |f(\zeta)| \ | \ \zeta \in \overline{K_r(a)} \ \}$$

für jedes r mit $0 < r < \rho$.

Beweis : Das folgt aus der Formel $(*)$ im Beweis von Satz 66.5.3 :

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \quad \text{und} \quad L(\beta) = 2\pi r$$

mit der Abschätzungsformel (66.2.9) . □

Folgerung 66.5.5 : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen und

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{komplex differenzierbar.}$$

Dann ist f in A beliebig oft differenzierbar.

Beweis : Nach Satz 66.5.3 ist f in jedem $a \in A$ analytisch, d.h. es gibt ein $\rho > 0$ und eine in $K_\rho(a) \subset A$ konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad \text{die gleich} \quad f(z) \quad \text{ist.}$$

Nach Beispiel (66.1.4) ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \quad ,$$

und das ist wieder eine Potenzreihe, also differenzierbar. Mit Induktion folgt, dass $f^{(n)}(z)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ existiert. □

Definition 66.5.6 : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen. Dann nennt man eine komplex-differenzierbare Funktion

$$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$$

auch **holomorph** in A . - Nach Folgerung 66.5.5 sind die Begriffe

f differenzierbar in A
f analytisch in A
f holomorph in A

gleichbedeutend, sofern A offen ist. □

Bemerkung 66.5.7 : Sei A offen, $a \in A$ und $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ mit $K_\rho(a) \subset A$. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für} \quad |z-a| < \rho \quad ,$$

so sind die Koeffizienten a_n nach Satz 66.1.6 eindeutig bestimmt, denn sei auch

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \quad \text{mit} \quad b_n \in \mathbb{C} \quad , \quad \text{dann folgt}$$

$$0 \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z-a)^n \quad \text{für alle} \quad z \in K_\rho(a) \quad ,$$

und wenn man sich den Beweis von Satz 66.1.16 ansieht, folgt daraus

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; a_n - b_n = 0 \quad .$$

Aus der Formel in Satz 66.5.3 folgt daher

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\,\pi\, i} \int\limits_{\partial K_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}z \quad \text{für jedes} \quad r \quad \text{mit} \quad 0 < r < \rho \quad .$$

Nimmt man nun noch die Formel für die a_n aus Folgerung 66.1.15,

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad , \quad \text{so erhält man die}$$

(66.5.8) Cauchysche Integralformel für die Ableitungen :

Sei A offen in $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar, $a \in A$ und $\rho > 0$ mit $\overline{K_\rho(a)} \subset A$, dann gilt für $r < \rho$:

$$f^{(n)}(a) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}z$$

oder allgemeiner, nach dem CAUCHYschen Integralsatz, für einen in A nullhomologen Weg φ mit $a \notin |\varphi|$:

$$I(\varphi, a) \cdot f^{(n)}(a) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}z \quad . \qquad \square$$

Aus der Abschätzungsformel (66.5.4) für die Koeffizienten a_n erhält man mühelos den

(66.5.9) Satz von Liouville : Eine auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbare, beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis : Ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad .$$

Da f auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar ist, hat man für jedes $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\rho)} z^n \quad \text{für} \quad |z| < \rho \quad \text{mit}$$

$$a_n^{(\rho)} \quad = \quad \frac{1}{2\,\pi\,i} \int\limits_{\partial K_{\frac{\rho}{2}}(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \text{nach} \quad 66.5.3.$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 66.4.6 hängt die rechte Seite nicht von ρ ab, also gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n \;=\; \frac{1}{2\,\pi\,i} \int\limits_{\partial K_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad ,$$

für beliebiges $r > 0$, und dafür gilt nach (66.5.4) :

$$|a_n| \;\leq\; \frac{M}{r^n} \quad .$$

Da hier r beliebig groß gewählt werden kann, folgt

$$|a_n| \;=\; 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \quad , \qquad \text{also}$$

$$f(z) \quad = \quad a_0 \quad . \qquad \square$$

Beachten Sie, dass es einen ähnlichen Satz für reell-differenzierbare Funktionen nicht gibt. Z.B. ist

$$\sin \,:\; \mathbb{R} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, beschränkt, aber nicht konstant !

- Mit Hilfe des Satzes von LIOUVILLE erhält man einen sehr kurzen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, den wir schon im 2.Semester (bei der Partialbruchzerlegung, bei der Berechnung von Eigenwerten) verwendet haben:

(11.5.7) bzw. (66.5.10) Fundamentalsatz der Algebra :

Jede Polynomfunktion

$$P(z) \;=\; z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis : Angenommen, es ist $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$f \,:\; \mathbb{C} \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \quad , \quad f(z) \quad := \quad \frac{1}{P(z)}$$

nach der Quotientenregel in ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar. Wählen wir

$$R \quad := \quad 2n \cdot \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|, \frac{1}{2n}\} \quad ,$$

so ist $R \in \mathbb{R}_+^*$, und für $|z| \geq R$ gilt

$$|P(z)| \;\geq\; |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \;\geq\; |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|z|}{2n}|z|^k \quad ,$$

und wegen $|z| \geq R \geq 1$:

$$|P(z)| \geq |z|^n - n \cdot \frac{|z|^n}{2n} \geq \frac{R^n}{2} \quad ,$$

$$\frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{R^n} \quad \text{für} \quad |z| \geq R \quad ,$$

außerhalb der kompakten Menge $\overline{K_R(0)}$ ist f also beschränkt. Auch in der kompakten Menge $\overline{K_R(0)}$ ist die differenzierbare, als stetige, Funktion f beschränkt. Nach dem Satz von LIOUVILLE ist f konstant in $\mathbb{C}$ und damit auch P, aber dann wären nach Satz 66.1.16 die Koeffizienten von

$$P(z) \quad = \quad z^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \quad \text{mit} \quad n > 0$$

alle 0 bis auf a_0 , insbesondere $1 = 0$, Widerspruch. □

66.6 Laurentreihen

Bemerkung 66.6.1 : Bisher hatten wir nur Punkte $a \in \mathbb{C}$ betrachtet, für die

$$f \; : \; K_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar und}$$

$$f \quad \text{auf} \quad K_r(a) \setminus \{a\} \quad \text{beschränkt}$$

war, das waren die Riemann-Punkte. Wir wollen andere "isolierte Singularitäten" von f , also Punkte $a \in \mathbb{C}$, zu denen es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$f \; : \; K_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar}$$

ist, beschreiben. Dazu brauchen wir die Laurent-Reihen (Aussprache beachten, Laurent war Franzose) :

Definition 66.6.2 : Unter einer **Laurent-Reihe**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad a_n \in \mathbb{C} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}$$

um a versteht man die Summe der Reihen

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-a}\right)^n}_{\textbf{Hauptteil}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{\textbf{Nebenteil}} \quad , \quad \text{welche man}$$

(**Hauptteil** bzw. **Nebenteil**)

nennt. Die Laurentreihe heißt **konvergent** in z, wenn sowohl der Haupt- als auch der Nebenteil in z konvergieren.

Folgerung 66.6.3 : Bei einer Laurentreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ist der **Nebenteil** eine Potenzreihe in $z - a$; es gibt nach Satz 6.4.6 (K 75) einen Konvergenzradius $R \in [0; \infty]$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{für} \quad |z-a| < R \quad \text{konvergiert,}$$

und der **Hauptteil** ist eine Potenzreihe in $\zeta := \dfrac{1}{z-a}$, es gibt also einen Konvergenzradius $\rho \in [0;\infty]$ von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$. Setzen wir $r := \dfrac{1}{\rho} \in [0;\infty]$, so konvergiert also

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} \quad \text{für} \quad |z-a| > r \quad .$$

Insgesamt haben wir also einen (eventuell leeren) Kreisring

$$K_{r,R}(a) \quad := \quad \{\ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\ \} \quad ,$$

in dem die Laurentreihe konvergiert. Aus den Sätzen über Potenzreihen folgt noch :

(i) Seien r', R' mit $r < r' < R' < R$, dann konvergiert die Laurentreihe in der Menge $\{\ z \in \mathbb{C} \mid r' \le |z-a| \le R'\ \}$ gleichmäßig.

(ii) Für $|z-a| < r$ oder $|z-a| > R$ divergiert die Laurentreihe.

Mit (i) erhält man sofort die

Folgerung 66.6.4 : Die Laurentreihe $f(z) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergiere im Kreisring

$$K_{r,R}(a) = \{\ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\ \} \quad .$$

Dann ist sie dort differenzierbar, mit

$$f'(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} \quad .$$

Ist $a_{-1} = 0$, so ist

$$F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1} \quad \text{für} \quad z \in K_{r,R}(a)$$

eine Stammfunktion von f. □

Genau so wie bei Potenzreihen sind auch bei Laurentreihen die Koeffizienten eindeutig bestimmt:

(66.6.5) Integralformel für die Laurentkoeffizienten : Konvergiert $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ im Kreisring $K_{r,R}(a)$ gegen die Funktion f, so gilt

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta$$

für jeden kreisförmigen Weg

$$\kappa_\rho : \ [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \kappa_\rho(t) := a + \rho e^{it} \quad , \qquad \text{mit} \quad \rho \in (r;R) \quad .$$

<u>**Beweis :**</u> Nach Folgerung 66.6.4 besitzt

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} - \frac{a_n}{z-a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n-1} - a_n (z-a)^{-1}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} a_{k+n+1} (z-a)^k$$

eine Stammfunktion in $K_{r,R}(a)$, also ist

$$0 = \int_{\kappa_\rho} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta - a_n \underbrace{\int_{\kappa_\rho} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - a}}_{= 2\pi i} \quad . \qquad \square$$

Von Folgerung 66.6.4 gilt auch die Umkehrung:
<u>**Satz 66.6.6 :**</u> Jede in einem Kreisring $K_{r,R}(a)$ differenzierbare Funktion f besitzt in diesem genau eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{mit}$$

$$a_n = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \text{wobei} \quad \rho \in (r;R) \quad \text{und}$$

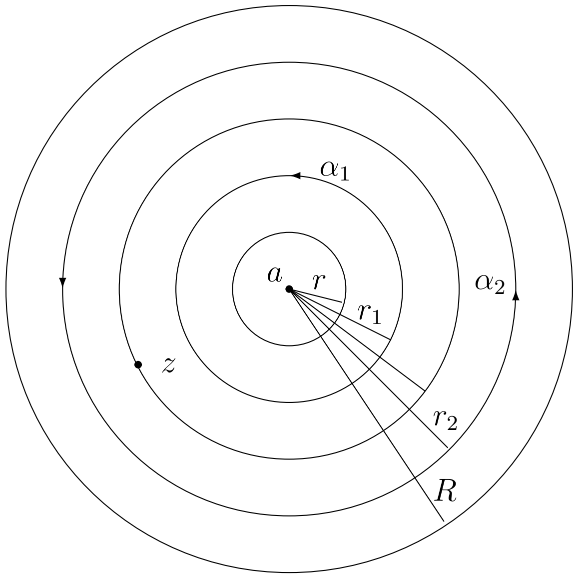
$$\kappa_\rho : \ [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \kappa_\rho(t) := a + \rho e^{it} \quad \text{ist.}$$

<u>**Beweis :**</u> Sei $z \in K_{r,R}(a)$, dann nehmen wir uns r_1, r_2 mit

$$r < r_1 < |z-a| < r_2 < R$$

und den Zyklus

$$\Gamma := \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{mit} \quad \alpha_j : \ [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_j(t) := a + r_j e^{it}$$



Dann gilt $I(\Gamma, z) = 1$, und nach der CAUCHYschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad ,$$

denn Γ ist nullhomolog in $K_{r,R}(a)$, also

$$2\pi i f(z) = \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \quad .$$

Für $\zeta \in |\alpha_1|$ haben wir

$$|\zeta - a| = r_1 \,, \; |z - a| > r_1 \quad , \qquad \text{also} \quad \left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| < 1 \quad ,$$

und wir entwickeln in die auf $\{ \; \zeta \in \mathbb{C} \; | \; \zeta \in |\alpha_1| \; \}$ gleichmäßig konvergente Reihe

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} = \frac{1}{z - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a} \right)^n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{p-1}}{(z - a)^p} \quad .$$

Wir haben also

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{p=1}^{\infty} b_p (z - a)^p \quad \text{mit} \quad b_p := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-p+1}} \mathrm{d}\zeta \quad .$$

Mit $a_{-n} := b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ergibt das den Hauptteil der Laurentreihe. Für $\zeta \in |\alpha_2|$ haben wir

$$|\zeta - a| = r_2 \,, \; |z - a| < r_2 \quad , \qquad \text{also} \quad \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1 \quad , \qquad \text{und es gilt}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{mit} \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \quad .$$

Das ergibt den Nebenteil der Laurentreihe. Da man r_2 beliebig nahe an R und r_1 beliebig nahe an r wählen kann, und da die a_n nach (66.6.5) eindeutig bestimmt sind, folgt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für} \quad r < |z - a| < R \quad ,$$

und da sich die Integrale über α_1 und α_2 nicht ändern, wenn man r_1 und r_2 innerhalb von $(r; R)$ ändert, folgt

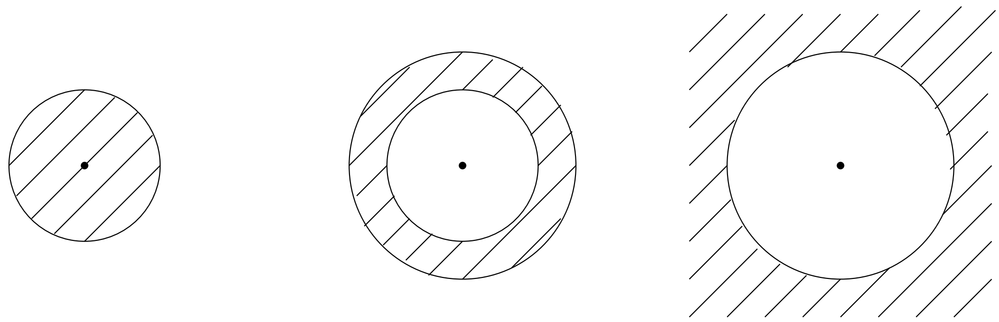
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\kappa_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, d\zeta$$

mit beliebigem $\rho \in (r; R)$. □

(66.6.7) Beispiel : Sei

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Dann hat man drei Kreisringe um 0, in denen f differenzierbar ist, und man erhält mit der geometrischen Reihe:



$K_1(0)$ $K_{1,2}(0)$ $K_{2,\infty}(0)$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{in} \quad K_1(0) \quad ,$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad \text{in} \quad K_{1,2}(0) \quad ,$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \cdot \frac{1}{z^n} \quad \text{in} \quad K_{2,\infty}(0) \quad .$$

66.7 Isolierte Singularitäten

Definition 66.7.1 : Ist U offen in $\mathbb{C}$, $a \in U$ und

$$f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

differenzierbar, so heißt a eine **isolierte Singularität** von f. Genauer: a heißt

1.) eine **hebbare Singularität**, wenn f in a analytisch fortgesetzt werden kann, d.h. wenn es ein (auch in a) differenzierbares

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(z) = f(z) \quad \text{für} \quad z \in U \setminus \{a\} \quad \text{gibt,}$$

2.) ein **Pol**, wenn a nicht hebbar ist, aber eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass a eine hebbare Singularität von $(z-a)^k \cdot f(z)$ ist. Das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft heißt die **Vielfachheit** des Pols. a ist genau dann $k-$facher Pol von f, wenn

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \quad \text{für} \quad z \in U \setminus \{a\} \quad \text{ist,}$$

mit einer in U differenzierbaren Funktion g mit $g(a) \neq 0$, 3.) eine **wesentliche Singularität**, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist.

Hebbare Singularitäten kennen wir schon:

(66.7.2) Riemannscher Hebbarkeitssatz : Sei U offen in $\mathbb{C}$, $a \in U$ und $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar. a sei Riemann-Punkt von f. Dann ist a eine hebbare Singularität von f, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g|_{U \setminus \{a\}} = f \quad .$$

Beweis : Nach Definition 66.4.7 gibt es ein $r > 0$, so dass f in $K_r(a) \setminus \{a\}$ beschränkt ist, etwa $|f(z)| \leq M$ für $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$. Wir setzen

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi(z) \quad := \quad \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{für } z \neq a \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases} \quad .$$

Dann ist φ in $U \setminus \{a\}$ differenzierbar, und auch in a, denn es existiert

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} (z-a) \cdot f(z) = 0$$

wegen $|f(z)| \leq M$ für $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$, also ist

$$\varphi'(a) = 0 \quad .$$

φ hat also in $K_r(a)$ eine Potenzreihenentwicklung

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

mit $a_0 = \varphi(a) = 0$ und $a_1 = \varphi'(a) = 0$, also

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2} \quad \text{für} \quad z \in K_r(a) \setminus \{a\} \quad ,$$

und $g(z) := \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$ ist die gesuchte Fortsetzung von f. □

(66.7.3) Klassifizierung der isolierten Singularitäten mit der Laurent-Reihe : Sei U offen in $\mathbb{C}$, $a \in U$,

$$f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{differenzierbar}$$

und a eine isolierte Singularität von f. Dann hat man ein $r > 0$ und eine Laurent-Entwicklung von f um a :

$$f(z) = \varphi(z) + f_H(z) \quad ,$$

wobei $\varphi(z)$ der Nebenteil und $f_H(z)$ der Hauptteil der Laurentreihe ist, also

$$f_H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} \quad .$$

Die Koeffizienten der Laurentreihe sind nach (66.6.5) eindeutig bestimmt. Deshalb gilt :

1.) a ist genau dann eine hebbare Singularität, also ein Riemann-Punkt, wenn $f_H = 0$ ist.

2.) a ist genau dann ein Pol von f, wenn f_H eine von 0 verschiedene **endliche** Summe ist, und zwar ist a genau dann ein Pol der Vielfachheit k, wenn gilt

$$f_H(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \quad \text{mit} \quad a_{-k} \neq 0 \quad .$$

3.) a ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn unendlich viele a_{-n}, $n \in \mathbb{N}$, im Hauptteil $f_H(z)$ ungleich 0 sind.

Beispiele : (66.7.4) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \sin \frac{1}{z}$, dann ist für $z \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^{-1})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{z^{-1}}{1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} \mp \ldots$$

Das ist die Laurententwicklung von f um 0. Hier sind unendlich viele der a_{-n} ungleich 0 (nämlich die mit ungeraden n). Also ist 0 eine wesentliche Singularität von f.

(66.7.5) Sei $f : K_\pi(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{z}{\sin z}$, dann existiert

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} f(z) = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{z}{\sin z} = 1 \quad .$$

0 ist also ein Riemann-Punkt von f, denn $g : K_\pi(0) \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z = 0 \\ \dfrac{z}{\sin z} & \text{für } z \neq 0 \end{cases}$$

ist in $K_\pi(0)$ analytisch (mit $g'(0) = 0$) und setzt f fort.

(66.7.6) Sei $f : K_\pi(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{1}{\sin z}$.

Dann ist $f(z) = \frac{1}{z} \cdot g(z)$ mit der in (66.7.5) definierten, auf $K_\pi(0)$ analytischen, Funktion g , also gibt es $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ mit

$$g(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für} \quad |z| < \pi \quad \text{und damit}$$

$$f(z) \quad = \quad \frac{a_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} \quad \text{mit} \quad a_0 \;=\; g(0) \;=\; 1 \neq 0 \quad ,$$

also ist 0 ein Pol der Vielfachheit 1 von f .

Definition 66.7.7 : Sei $A \subset \mathbb{C}$ offen. Es gebe eine Menge $P \subset A$ von isolierten Punkten (d.h. zu jedem $p \in P$ gebe es ein $r > 0$ mit $K_r(p) \setminus \{p\} \subset A \setminus P$), so dass
(i) $f : A \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch ist, und
(ii) die Elemente von P sämtlich Pole von f sind.
Dann heißt f eine **meromorphe Funktion** auf A.

Folgerung 66.7.8 : Sei R eine komplexe rationale Funktion, also

$$R(z) \quad = \quad \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomfunktionen $P(z)$ und $Q(z)$ mit komplexen Koeffizienten und $Q(z) \neq 0$. Dann ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Menge

$$N \quad := \quad \{\; z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \;=\; 0 \;\} \quad \text{endlich,}$$

$$R : \; \mathbb{C} \setminus N \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{ist differenzierbar,}$$

und alle $p \in N$ sind Pole von R, denn nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir $Q(z)$ in Linearfaktoren zerlegen,

$$Q(z) \quad = \quad c \cdot \prod_{q \in N} (z-q)^{s_q} \quad \text{mit} \quad s_q \in \mathbb{N} \quad , \qquad \text{also}$$

$$R(z) \quad = \quad \frac{1}{(z-p)^{s_p}} \cdot f(z) \quad \text{mit} \quad f(z) \quad := \quad \frac{P(z)}{c \cdot \prod_{q \in N \setminus \{p\}} (z-q)^{s_q}} \quad ,$$

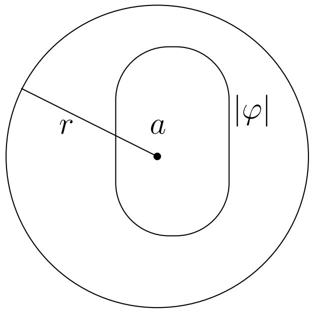
und f ist in einer passenden Umgebung von p analytisch. R hat in p also einen Pol der Vielfachheit höchstens s_p, wenn s_p die Vielfachheit der Nullstelle p von $Q(z)$ ist.

66.8 Der Residuensatz

Bemerkung 66.8.1 : Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$,

$$f : \; K_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analytisch und φ ein geschlossener Weg mit $|\varphi| \subset K_r(a) \setminus \{a\}$.
Dann kann man f in eine Laurentreihe entwickeln :



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{für alle} \quad z \quad \text{mit} \quad 0 < |z-a| < r \quad ,$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z) \quad \text{mit} \quad g(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} a_n(z-a)^n \quad ,$$

also

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{a_{-1}}{z-a}\,\mathrm{d}z + \int_\varphi g(z)\,\mathrm{d}z \quad .$$

Nun besitzt g eine Stammfunktion, nämlich

$$G : K_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad G(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} \frac{1}{n+1} a_n(z-a)^{n+1} \quad ,$$

denn dieses G ist in $K_r(a) \setminus \{a\}$ differenzierbar mit $G'(z) = g(z)$. Nach Satz 66.2.8 ist $\int_\varphi g(z)\,\mathrm{d}z = 0$, also

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1} \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = a_{-1} \cdot 2\pi i\, I(\varphi, a) \quad ,$$

wobei $I(\varphi, a)$ die Windungszahl von φ um a ist. Die Formel

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1} \cdot 2\pi i\, I(\varphi, a) \tag{66.8.2}$$

gilt auch, wenn f in $K_r(a)$ einschließlich a analytisch ist, denn dann ist $a_{-1} = 0$, und $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ nach dem Cauchyschen Integralsatz 66.4.1.

Definition 66.8.3 : Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und

$$f : K_r(a) \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{analytisch.}$$

Dann heißt der Koeffizient a_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um a das **Residuum** von f in a. Man schreibt

$$\operatorname{Res}(f, a) := a_{-1} \quad .$$

Man kann die Formel (66.8.2) noch etwas verallgemeinern für den Fall, dass f mehrere isolierte Singularitäten hat:

(66.8.4) Residuensatz : Sei A offen in $\mathbb{C}$, D eine endliche Teilmenge von A,

$$f : A \setminus D \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{sei analytisch,}$$

Γ sei ein Zyklus in $A \setminus D$, Γ nullhomolog in A. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in D} I(\Gamma, a) \cdot \operatorname{Res}(f, a) \quad .$$

<u>**Beweis :**</u> Sei

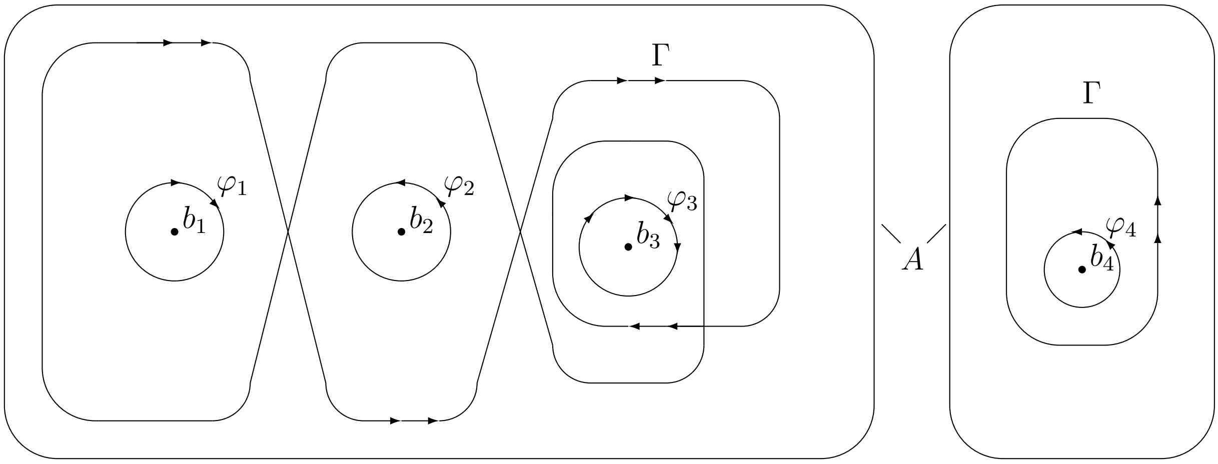
$$\Gamma \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} k_j \gamma_j$$

mit $k_j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und geschlossenen Wegen γ_j in $A \setminus D$. Es ist $D = \{b_1, \ldots, b_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Um jedes b_l, $l \in \underline{n}$, nehmen wir einen Kreis mit Radius r_l, so dass

$$K_{r_l}(b_l) \setminus \{b_l\} \quad \subset \quad A \setminus D$$

ist, und dazu einen Weg φ_l, der den Rand dieses Kreises genau $I(\Gamma, b_l)-$mal durchläuft. Sei

$$\Phi \quad := \quad \sum_{l=1}^{n} \varphi_l \quad ,$$



Dann ist auch $\Phi \sim_A 0$, und es gilt

$$\Phi \sim_{A \setminus D} \Gamma \quad .$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 66.4.6 gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \quad \stackrel{\downarrow}{=} \quad \int_\Phi f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad \sum_{l=1}^{n} \int_{\varphi_l} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$\stackrel{(66.8.2)}{\longrightarrow} 2\pi i \sum_{l=1}^{n} I(\Gamma, b_l) \operatorname{Res}(f, b_l) \quad . \qquad \square$$

<u>**Bemerkung 66.8.5 :**</u> Bevor wir die Anwendungen des Residuensatzes kennenlernen, wollen wir einige Kniffe lernen, wie man $\operatorname{Res}(f, a)$ praktisch berechnen kann. Natürlich: Ist a eine isolierte Singularität von f , so kann man f im Prinzip immer in eine Laurentreihe

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für} \quad 0 < |z-a| < r \quad , \quad r > 0$$

entwickeln, dann hat man a_{-1} . I.A. ist es aber ein völlig unnötiger Rechenaufwand, a_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen, wenn man nur a_{-1} braucht.

Auch ist es unsinnig, a_{-1} nach der Formel (66.8.2) als

$$a_{-1} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\kappa_r} f(z)\,\mathrm{d}z$$

zu berechnen, wenn κ_r ein Weg ist, der den Kreis mit Radius r um a einmal positiv durchläuft: Man will ja Integrale mit Residuen berechnen und nicht umgekehrt !

(66.8.6) Behauptung : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $a \in A$,

$$f \;:\; A \setminus \{a\} \;\longrightarrow\; \mathbb{C} \quad \text{analytisch. Dann gilt :}$$

f hat in a einen einfachen Pol $\iff$ $\exists \lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$\operatorname{Res}(f,a) \quad = \quad \lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \quad .$$

Beweis : Es gilt :
f hat in a einen einfachen Pol $\iff$
Es gibt ein $r > 0$, so dass f in $K_r(a) \setminus \{a\}$ die Laurententwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{mit} \quad a_{-1} \neq 0 \quad \text{hat} \quad \iff$$

Für $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ ist $(z-a)f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n-1}(z-a)^n$ mit $a_{-1} \neq 0$
$\iff$ $g(z) \;:=\; (z-a) \cdot f(z)$ ist eine Potenzreihe,
also in a analytisch fortsetzbar, mit $g(a) \;:=\; a_{-1} \neq 0$ $\iff$
$\exists \lim\limits_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) \;=\; a_{-1} \neq 0$. □

Spezialfall 66.8.7 : Sei A offen in $\mathbb{C}$, $a \in A$,
$g\,,h \;:\; A \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$ seien analytisch , $g(a) \neq 0$,
h habe in a eine einfache Nullstelle
(d.h. $h(z) \;=\; (z-a)\,h_1(z)$ mit analytischem h_1 , $h_1(a) \neq 0$). Dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) \quad = \quad \frac{g(a)}{h'(a)} \quad .$$

Beweis : Die Taylorentwicklungen von g und h um a seien

$$g(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad ,$$

dann ist $b_0 \;=\; 0$, a_0 , $b_1 \neq 0$, und es existiert

$$\lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \lim_{z \to a} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+1}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n} \;=\; \frac{a_0}{b_1} \;=\; \frac{g(a)}{h'(a)} \neq 0 \quad .$$

Mit (66.8.6) folgt die Behauptung. □

Man kann (66.8.6) verallgemeinern:

(66.8.8) Residuen von Funktionen mit Polen höherer Vielfachheit :

Es gilt :

f hat in a einen Pol der Vielfachheit k $\iff$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{für} \quad z \in K_r(a) \setminus \{a\} \quad \text{mit} \quad r > 0\,,\; a_{-k} \neq 0$$

$$\iff \quad g(z) := (z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-a)^n$$

ist in a analytisch fortsetzbar mit $g(a) := a_{-k} \neq 0$,

und der Koeffizient $a_{-1} = a_{(k-1)-k}$ von $(z-a)^{k-1}$ in dieser Potenzreihe ist nach Folgerung 66.1.15 :

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!}\, g^{(k-1)}(a) \quad .$$

Hat also f in a einen $k-$fachen Pol, $k \geq 1$, so ist

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{\,k-1}}((z-a)^k \cdot f(z)) \quad .$$

(66.8.9) Beispiel : Sei $f(z) := \dfrac{z+2}{(z-3)^3(z+2)}$, so hat f in 3 einen $3-$fachen Pol. Sei

$$g(z) := (z-3)^3 f(z) = \frac{z+2}{z+3} = 1 - \frac{1}{z+3} \quad ,$$

so ist $g''(z) = \dfrac{-2}{(z+3)^3}$, also

$$\operatorname{Res}(f,3) = \frac{1}{2!}\,\frac{-2}{(3+3)^3} = -\frac{1}{216} \quad .$$

(66.8.10) Beispiel : Sei $f(z) := \dfrac{z+2}{(z-3)^2 \sin(z-3)}$, so hat f in 3 einen $3-$fachen Pol. Hier muss man $g''(3)$ für

$$g(z) := \frac{z+2}{\dfrac{\sin(z-3)}{z-3}} = \frac{z+2}{h(z)} \quad \text{mit} \quad h(z) := \frac{\sin(z-3)}{z-3}$$

ausrechnen; es ist

$$g'(z) = \frac{h(z) - (z+2)h'(z)}{h^2(z)} = \frac{1}{h(z)} - \frac{(z+2)h'(z)}{h^2(z)} \quad ,$$

$$g''(z) = -\frac{h'(z)}{h^2(z)} - \frac{h(z)(h'(z)+(z+2)h''(z)) - 2(h'(z))^2(z+2)}{h^3(z)} \quad ,$$

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-3)^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{(z-3)^2}{6} + \frac{(z-3)^4}{120} \mp \ldots$$

$$h'(z) = -\frac{1}{3}(z-1) + \ldots \quad , \quad h''(z) = -\frac{1}{3} + \ldots \quad , \qquad \text{also}$$

$$h(3) = 1 \quad , \quad h'(3) = 0 \quad , \quad h''(3) = -\frac{1}{3} \quad ,$$

$$g''(3) = -5 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} \quad ,$$

$$\mathrm{Res}\,(f,3) = \frac{1}{2!}\,g''(3) = \frac{5}{6} \quad .$$

(66.8.11) Residuum der logarithmischen Ableitung :

Sei A offen in $\mathbb{C}$, $a \in A$, und f meromorph auf A. Sei

$$F : A \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad F(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$\mathrm{Res}\,(F,a) = \begin{cases} k & \text{, wenn } f \text{ bei } a \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle hat,} \\ -k & \text{, wenn } f \text{ bei } a \text{ einen } k\text{-fachen Pol hat.} \end{cases}$$

Beweis : Da f meromorph ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$f(z) = (z-a)^n\, g(z) \quad ,$$

wobei $g(a) \neq 0$ und g analytisch in einer Umgebung U von a ist, also

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z) \quad ,$$

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} \quad ,$$

wobei $\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ wegen $g(a) \neq 0$ in einer Umgebung von a differenzierbar, also analytisch, ist. Also ist

$$\mathrm{Res}\,(F,a) = n \quad .$$

Ist $n \geq 0$, so haben wir bei a eine $n-$fache Nullstelle von f.
Ist $n < 0$, so haben wir bei a einen $n-$fachen Pol. □

66.9 Anwendungen des Residuensatzes

Typ 1 : Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion zweier Variablen, und $R(\cos t, \sin t)$ sei für alle $t \in [0;2\pi]$ definiert. Sei

$$F(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \quad \text{und}$$

$$E \quad := \quad \{\ z \in \mathbb{C} \ \mid\ |z| < 1\ \} \quad , \quad \text{dann gilt}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi \sum_{a\in E} \operatorname{Res}(F, a) \quad , \quad \text{kurz :}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right), a\right) \quad .$$

Beweis : Wir setzen

$$\gamma\ :\ [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \gamma(t) := e^{it} \quad , \quad \text{dann ist}$$

$$F(\gamma(t)) \quad = \quad e^{-it}\, R(\cos t, \sin t) \quad .$$

Auf $|\gamma|$ liegen also keine Singularitäten von F, und da R eine rationale Funktion von x und y ist, sind alle Singularitäten von F Pole. Nach dem Residuensatz ist

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{i} \int\limits_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{i} \int\limits_{\gamma} F(z)\,\mathrm{d}z \ \overset{\downarrow}{=}$$

$$\frac{1}{i} 2\pi i \sum_{a\in E} \operatorname{Res}(F, a) \cdot I(\gamma, a) \quad = \quad 2\pi \sum_{a\in E} \operatorname{Res}(F, a) \quad . \qquad \square$$

In (L218) finden Sie auch ein Beispiel. - Für das Folgende die

Definition 66.9.2 : Sei $R(z)$ eine komplexe rationale Funktion, also

$$R(z) \quad = \quad \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit komplexen Polynomfunktionen P und Q . Sei

$$k \quad := \quad \deg Q - \deg P \in \mathbb{Z} \quad ,$$

dann sagen wir: **R hat in ∞ eine Nullstelle der Vielfachheit k**. Ist $k \in \mathbb{N}_0$, so folgt daraus: Es gibt ein $r_0 > 0$ und ein $M \in \mathbb{R}_+^*$, so dass

$$|\,R(z)\,| \quad \le \quad \frac{M}{|z|^k} \quad \text{für alle} \quad z \quad \text{mit} \quad |z| > r_0 \quad \text{ist.}$$

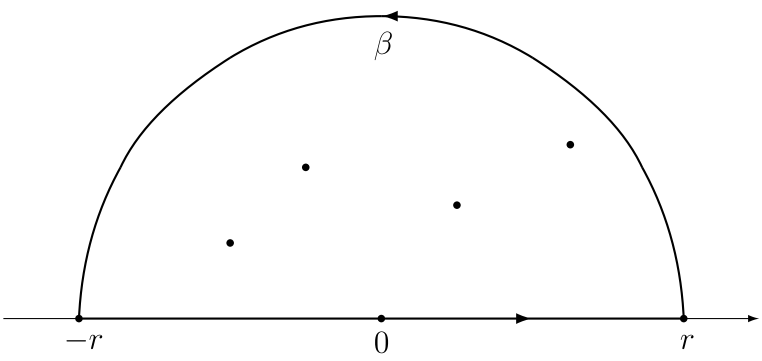
(66.9.3) Typ 2 : Sei R eine reelle rationale Funktion, die auf der reellen Achse keinen Pol und in ∞ eine mindestens 2-fache Nullstelle hat. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad 2\pi i \sum_{a \text{ mit } \operatorname{Im} a\, >\, 0} \operatorname{Res}(R, a) \quad .$$

Beweis : Wir wählen ein $r > 0$, so dass alle (endlich vielen) Pole von R einen Betrag $< r$ haben,
und den Weg

$$\beta : [-r; \pi + r] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\beta(t) \quad := \quad \begin{cases} t & \text{für } t \in [-r; r] \\ r\, e^{i(t-r)} & \text{für } t \in [r; \pi + r] \end{cases},$$



dann ist β geschlossen, und nach dem Residuensatz gilt

$$\int_\beta R(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{Res}(R, a) \quad ,$$

wobei $H := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$ ist, also

$$\int_{-r}^{r} R(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^\pi R(r\, e^{it}) \cdot ire^{it}\, \mathrm{d}t \quad = \quad 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{Res}(R, a) \quad .$$

Nun ist

$$\left| \int_0^\pi R(r\, e^{it})\, ire^{it}\ \mathrm{d}t \right| \quad \leq \quad \pi r \cdot \sup\{ |R(z)| \mid |z| = r \} \quad ,$$

und da nach Voraussetzung

$$|R(z)| \quad \leq \quad \frac{M}{|z|^k} \quad \leq \quad \frac{M}{|z|^2} \quad \text{für} \quad |z| > r_0$$

ist, gilt für $r > r_0$:

$$\left| \int_0^\pi R(r\, e^{it}) ire^{it}\, \mathrm{d}t \right| \quad \leq \quad \pi r \cdot \frac{M}{r^2} \quad \text{für} \quad r > r_0 \quad , \quad \text{also für} \quad r \to \infty :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)\, \mathrm{d}t = 2\pi i \sum_{a \in H} \operatorname{Res}(R, a) \quad . \qquad \square$$

(66.9.4) Beispiel : Wir probieren die Methode aus bei einem Integral, das wir schon kennen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \quad = \quad \lim_{r\to\infty} \arctan x \Bigg|_{-r}^{r} \quad = \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad = \quad \pi \quad .$$

Das hätten wir auch so berechnen können: $R(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ hat in ∞ eine Nullstelle der Vielfachheit 2 . $1+x^2$ hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, aber in $\mathbb{C}$ ist

$$x^2+1 \quad = \quad (x+i)(x-i) \quad ,$$

wir haben also einfache Pole von $R(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(1+i)(1-i)}$ bei i und $-i$. Der einzige Pol a mit $\operatorname{Im} a > 0$ ist i. Es ist

$$\lim_{z\to i}(z-i)R(z) \;=\; \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} \;=\; \frac{1}{2i} \;=\; -\frac{i}{2} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\operatorname{Res}(R,i) \quad = \quad -\frac{i}{2} \quad \text{nach} \quad (66.8.6) \ ,$$

und damit nach (66.9.3) :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad = \quad 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \quad = \quad \pi \quad , \quad \text{wie oben.}$$

Hier hat unsere Methode nichts Neues ergeben. Auch sonst kann man, wie wir wissen,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$$

stets mit Partialbruchzerlegung berechnen, aber das ist meist mühsamer als mit (66.9.3), schon bei einfachen Beispielen wie

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \quad .$$

(66.9.5) Typ 3 : Wir wollen

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\,\mathrm{d}x$$

berechnen, wobei f in allen z mit $\operatorname{Im} z \geq 0$ differenzierbar ist, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten a, für die $\operatorname{Im} a \neq 0$ ist, und es gelte

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ \mathrm{Im}\ z \geq 0}} |f(z)| = 0 \quad . \quad \text{Dann gilt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, \mathrm{d}x \quad = \quad 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ a > 0} \mathrm{Res}\, \big(f(z)e^{iz}, a\big) \quad .$$

Beweis : Wir integrieren $f(z) \cdot e^{iz}$ über denselben Weg wie in (66.9.3) und erhalten

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ a > 0} \mathrm{Res}\, (f(z)e^{iz}, a) - \lim_{r\to\infty} \int_{\delta_r} f(z)e^{iz}\, \mathrm{d}z \quad ,$$

mit $\delta_r \ : \ [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\delta_r(t) := re^{it}$, falls der Limes existiert. Nun gilt wegen der Beschränktheit des Integrals (Satz 47.3.4) :

$$\left| \int_{\delta_r} f(z)e^{iz}\, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_0^{\pi} f(re^{it})\, e^{ire^{it}} \cdot ire^{it}\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\pi} r\, |f(re^{it})| \cdot |e^{-r\sin t}|\, \mathrm{d}t$$

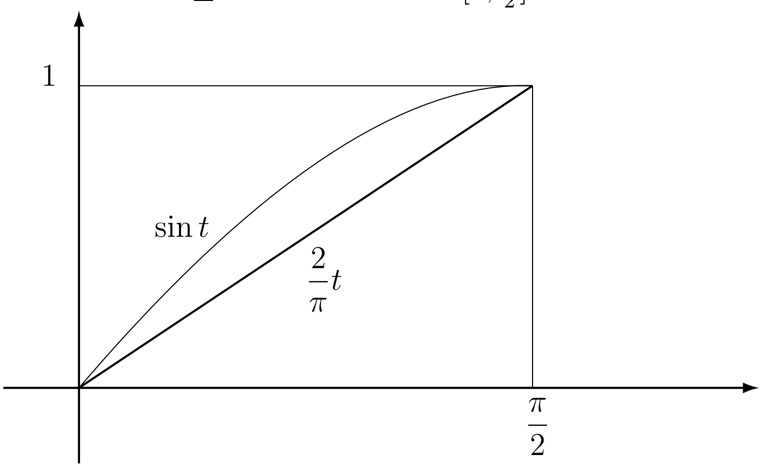
$$\leq r\, M(r) \int_0^{\pi} e^{-r\sin t}\, \mathrm{d}t \quad = \quad 2rM(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\, \mathrm{d}t$$

mit $M(r) := \sup\{\ |f(z)| \mid |z| = r \wedge \mathrm{Im}\, z \geq 0\ \}$.

Nun folgt daraus, dass die Sinusfunktion in $[0; \frac{\pi}{2}]$ konkav ist:

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t \quad \text{für} \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad , \quad \text{also}$$

$$e^{-r\sin t} \leq e^{-\frac{2}{\pi}rt} \quad \text{für} \quad t \in [0; \tfrac{\pi}{2}]$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}rt}\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi}t} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r}(1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2r}\,, \quad \text{also}$$

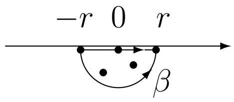
$$\left| \int\limits_{\delta_r} f(z) e^{iz} \, \mathrm{d}z \right| \quad \leq \quad \pi \cdot M(r) \quad ,$$

und wegen $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$ geht das gegen 0 für $r \to \infty$. Also gilt

$$I \quad = \quad 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ a > 0} \mathrm{Res}\,(f(z) e^{iz}, a) \quad .$$

□

(66.9.6) Bemerkung : Um $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix} \, \mathrm{d}x$ zu berechnen, muss man dieselbe Überlegung für einen Weg der Form



machen; man erhält dann

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix} \, \mathrm{d}x \ = \ -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\ a < 0} \mathrm{Res}\,(f(z) e^{-iz}, a) \quad ,$$

wenn f eine (mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten a, für die $\mathrm{Im}\ a \neq 0$ ist) in der unteren Halbebene $\mathrm{Im}\ z \leq 0$ differenzierbare Funktion ist. Zu summieren ist hier über alle Singularitäten in der unteren Halbebene, und man muss voraussetzen

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ \mathrm{Im}\ z \leq 0}} |f(z)| \quad = \quad 0 \quad .$$

(66.9.7) Beispiel : Es ist

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\overset{(66.9.5)}{=} \ \mathrm{Re} \left(i\,\pi \sum_{\mathrm{Im}\ a > 0} \mathrm{Res} \left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, a \right) \right) \quad ,$$

wobei über alle Pole in der oberen Halbebene summiert wird. Die Voraussetzung von (66.9.5) ist erfüllt: Für $z = re^{it}$ und $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| \quad = \quad \lim_{\substack{r \to \infty \\ t \in [0;\pi]}} \underbrace{\left| \frac{1}{1 + r^2 e^{2it}} \right|}_{\leq \frac{1}{r^2 - 1}} \quad = \quad 0 \quad .$$

Nun hat $\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ nur bei $a = i$ einen einfachen Pol mit $\mathrm{Im}\, a > 0$, und für das Residuum gilt nach (66.8.7):

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{1+z^2}, i\right) = \frac{e^{ia}}{2a} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie} \quad , \qquad \text{also}$$

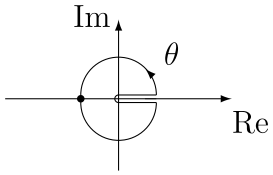
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2e} \quad .$$

(66.9.8) Typ 4 : Sei $0 < \alpha < 1$ und R eine reelle rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}_+$ definiert ist, mit

$\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$. Definieren wir

$(*)\quad z^\alpha := |z|^\alpha e^{i\alpha\theta}$
mit $\theta \in (0; 2\pi)$

für $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{R}_+$, so gilt



$$\int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \cdot \sum_{a\neq 0} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, a\right) \quad .$$

Beweis : Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$ ist $R(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$ mit zwei Polynomfunktionen F und G, für die

$$\deg F(x) < \deg G(x)$$

gilt. Im Intervall $[1;\infty)$ hat man daher eine Konstante c mit

$$|R(x)| \leq c\cdot\frac{1}{x} \quad ,$$

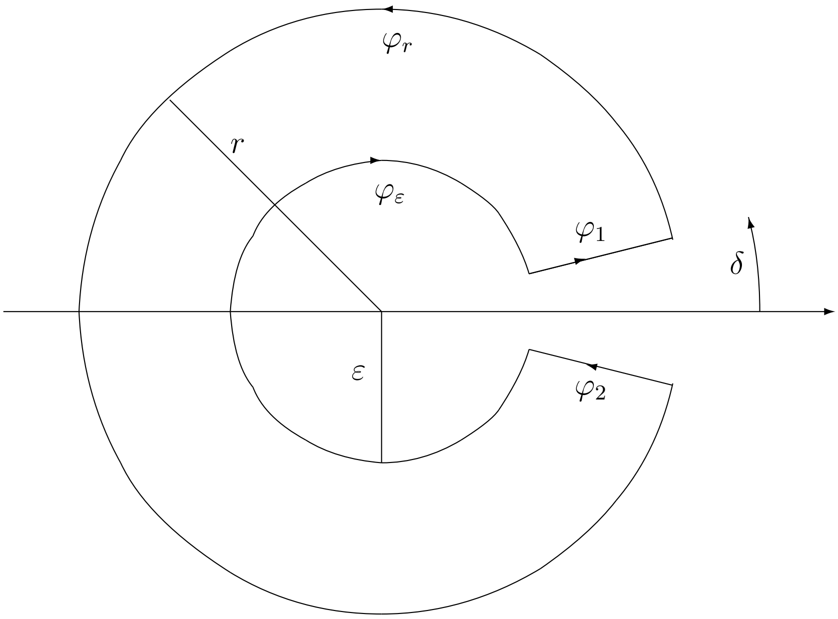
$\int\limits_1^\infty \dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}}$ konvergiert für $\alpha > 0$ nach dem Satz 49.3.7 über die Integration rotationssymetrischer Funktionen, also konvergiert wegen

$$\left|\frac{R(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{c}{x^{\alpha+1}} \quad \text{auch} \quad \int_1^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad ,$$

und auch $\int\limits_0^1 \dfrac{R(x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium (11.9.6), denn $R(x)$ ist auf $[0;1]$ beschränkt und

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \quad \text{konvergiert für} \quad \alpha < 1 \quad \text{nach (49.3.9).}$$

Wir integrieren nun $\frac{R(z)}{z^\alpha}$, wobei z^α die in $(*)$ definierte Funktion ist, über den aus den skizzierten Wegen $\varphi_1, \varphi_r, \varphi_2, \varphi_\varepsilon$ zusammengesetzten Weg φ, der in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ verläuft:



Mit der Wahl von θ in $(*)$ haben wir z^α so definiert, dass es in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (nicht $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, wie wir es beim Logarithmus gemacht haben) differenzierbar ist. Wir wählen noch r so groß und ε so klein, dass für alle Pole $a \neq 0$ von $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ gilt

$$I(\varphi, a) \quad = \quad 1 \quad . \quad \text{Dann gilt}$$

$$2\pi i \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, a\right) = \int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z = \left(\int_{\varphi_r} + \int_{\varphi_\varepsilon} + \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2}\right) \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z \quad .$$

Aus $\lim\limits_{x \to \infty} R(x) = 0$ und $0 < \alpha < 1$ folgt nun, dass die Integrale über φ_r und φ_ε für $r \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ gegen 0 gehen. Man erhält

$$\int_\varphi \frac{R(z)}{z^\alpha}\, \mathrm{d}z = \lim_{r \to \infty\,,\, \varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i\delta})}{(te^{i\delta})^\alpha} e^{i\delta}\, \mathrm{d}t - \int_\varepsilon^r \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{(te^{i(2\pi-\delta)})^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)}\, \mathrm{d}t \right)$$

$$= e^{-i\alpha\delta} \int_0^\infty \frac{R(te^{i\delta})}{t^\alpha} e^{i\delta}\, \mathrm{d}t - e^{i\alpha\delta - 2\pi i\alpha} \int_0^\infty \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{t^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)}\, \mathrm{d}t \quad .$$

Wir bilden nun den Limes für $\delta \to 0$:

$$2\pi i \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, a\right) \quad = \quad \left(1 - e^{-2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \quad . \qquad \square$$

(66.9.9) Beispiel : Wir wollen

$$I \quad := \quad \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \quad \text{für} \quad \alpha \in (0;1) \quad \text{berechnen:}$$

$\dfrac{R(z)}{z^\alpha} := \dfrac{1}{z^\alpha\,(1+z)}$ hat nur bei $a = -1$ einen Pol $\neq 0$, und es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, -1\right) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^\alpha} = \frac{1}{(-1)^\alpha} \quad ,$$

wobei z^α die in $(*)$ definierte Funktion ist, also

$$\ldots \quad = \frac{1}{(1\cdot e^{i\pi})^\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}} \quad , \qquad \text{also}$$

$$I = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}}\cdot\frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = \underline{\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}} \quad .$$

(66.9.10) Typ 5 : Sei R eine reelle rationale Funktion, die in $\mathbb{R}_+$ keine Pole hat, mit

$$\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0 \quad . \quad \text{Sei}$$

$$(**) \quad l : \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad l(re^{i\theta}) := \ln r + i\theta\,, \text{ wenn } \theta \in (0;2\pi) \text{ ist}$$

(also l nicht der **Hauptzweig des** komplexen Logarithmus), dann gilt

$$\int\limits_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum_{a\neq 0}\operatorname{Res}\,(R(z)\,l(z)^2, a)\right) \quad \text{und}$$

$$\int\limits_0^\infty R(x)\,\ln x\,\mathrm{d}x \quad = \quad -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{a\neq 0}\operatorname{Res}\,(R(z)\,l(z)^2, a)\right) \quad .$$

Beweis : Wir nehmen denselben Integrationsweg φ wie in (66.9.8) und haben uns deshalb einen Zweig $l(z)$ des Logarithmus definiert, der in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ differenzierbar ist. Wir integrieren $R(z)\,l(z)^2$ über φ. Wiederum lässt sich zeigen, dass die Wegintegrale über φ_r und φ_ε für $r\to\infty$ und $\varepsilon\to 0$ gegen 0 gehen. Damit folgt für $\delta\to 0$:

$$2\pi i\sum_{a\neq 0}\operatorname{Res}\,(R(z)\,l(z)^2, a) \quad = \quad \int\limits_0^\infty R(te^{i\delta})(\ln t + i\delta)^2 e^{i\delta}\,\mathrm{d}t$$

$$- \int\limits_0^\infty R(te^{i(2\pi-\delta)})(\ln t + i(2\pi-\delta))^2\, e^{i(2\pi-\delta)}\,\mathrm{d}t \quad ,$$

und für $\delta\to 0$:

$$\ldots \quad = \quad \int\limits_0^\infty R(t)(\ln t)^2\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty R(t)(\ln t + 2\pi i)^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \quad -4\pi i \int_0^\infty R(t) \ln t \, \mathrm{d}t + 4\pi^2 \int_0^\infty R(t) \, \mathrm{d}t \quad , \qquad \text{also}$$

$$-2 \int_0^\infty R(t) \ln t \, \mathrm{d}t - 2\pi i \int_0^\infty R(t) \, \mathrm{d}t \quad = \quad \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}\left(R(z) l(z)^2, a\right) \quad .$$

Da nun R eine reelle rationale Funktion ist, also auf $\mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung Imaginär- und Realteil bilden und erhalten die angegebenen Formeln. □

(66.9.11) Beispiel : Wir wollen

$$I \quad := \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, \mathrm{d}x \quad \text{berechnen. Für}$$

$$R(x) \quad := \quad \frac{1}{(1+x)^3} \quad \text{gilt} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(1+x)^3} \;=\; 0 \,,$$

und $R(z) \;=\; \dfrac{1}{(1+z)^3}$ hat in $a \;=\; -1$ einen dreifachen Pol. Nach (66.8.8) ist

$$\operatorname{Res}\left(R(z)\, l(z)^2, -1\right) \quad = \quad \frac{1}{2!} \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^{\,2}} (z+1)^3 R(z) l(z)^2$$

$$= \quad \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^{\,2}} l(z)^2 \quad = \quad \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(2 l(z) \cdot \frac{1}{z} \right)$$

$$= \quad \lim_{z \to -1} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} - l(z) \frac{1}{z^2} \right) \quad = \quad \frac{1}{(-1)^2} - \frac{l(-1)}{(-1)^2} \quad = \quad 1 - i\pi \quad .$$

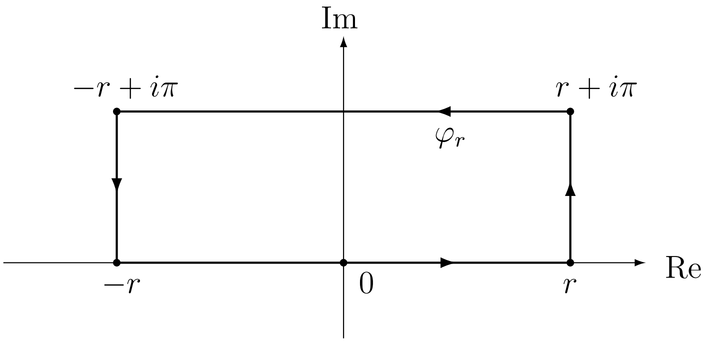
Damit erhalten wir

$$I \;=\; -\frac{1}{2} \quad \text{und nebenbei noch}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^3} \quad = \quad -\frac{1}{2\pi}(-\pi) \quad = \quad \frac{1}{2} \quad .$$ □

Im Buch von Behnke-Sommer (S.195 - 216) stehen weitere Anwendungen des Residuensatzes. Eins davon ist

(66.9.12) Beispiel : Zu berechnen ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$. Dazu integrieren wir $\dfrac{1}{\cosh z}$ über den Rand eines Rechtecks:



$$\int\limits_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} = \int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)} + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\,\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)} - \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\,\mathrm{d}t}{\cosh(-r+it)} \quad .$$

Nun gilt

$$\left| \int\limits_{0}^{\pi} \frac{i\,\mathrm{d}t}{\cosh(r+it)} \right| \le \pi \cdot \sup_{t\in[0;\pi]} \frac{1}{|\cosh r \cos t + i \sinh r \sin t|}$$

$$= \pi \cdot \sup_{t\in[0;\pi]} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 r \cos^2 t + \sinh^2 r \sin^2 t}} = \frac{\pi}{\sinh r} \quad .$$

Wegen $\lim\limits_{r\to\infty} \sinh r = \infty$ wird

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh(t+i\pi)} = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{\varphi_r} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} \quad ,$$

und wegen $\cosh(t+i\pi) = -\cosh t$ folgt

$$2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = 2\pi i \sum_{0\,<\,\mathrm{Im}\;a\,<\,\pi} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\cosh z}, a\right) \quad ,$$

denn auf der reellen Achse hat $\dfrac{1}{\cosh z}$ keine Singularitäten. Es ist $\cosh a = 0$ nur für $a = i\frac{\pi}{2}$ (unter der Voraussetzung $0 < \mathrm{Im}\, a < \pi$), und zwar ist $i\frac{\pi}{2}$ ein einfacher Pol wegen

$$\cosh'(i\frac{\pi}{2}) = \sinh(i\frac{\pi}{2}) = i \sin\frac{\pi}{2} = i \neq 0 \quad .$$

Nach (66.8.7) ist dann

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\cosh z}, i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\cosh'\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = -i \quad , \qquad \text{also}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t} = \pi \quad . \qquad \square$$