MATHEMATIK III FÜR STUDIERENDE DER PHYSIK

§45 Lineare Differentialgl. mit konst. Koeffizienten

Zum Schluss dieses Paragraphen behandeln wir noch die
(45.15) DGl der erzwungenen gedämpften Schwingung
Wir betrachten die DGl

$$y'' + 2\mu y' + by \quad = \quad f(t) \quad , \quad \mu \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

Darin kann man μ als Dämpfungsfaktor und $f(t)$ als zeitabhängige Kraft interpretieren. Je nachdem wie f aussieht, unterscheiden wir mehrere Fälle:
1) $\mathbf{f(t) = c\,e^{i\omega t}}$ mit $c, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$:

Ist $\mu = 0$ und $\omega^2 = b$, so hat man die DGl

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) y \quad = \quad c\,e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad P(T) \quad = \quad T^2 + b \quad ,$$

und P hat ix als einfache Nullstelle. Nach Satz 45.13 erhält man eine spezielle Lösung φ der DGl durch den Ansatz

$$\varphi(t) \quad = \quad (c_1 t + c_0)e^{i\omega t} \quad .$$

Einsetzen ergibt: c_0 beliebig und $c_1 = -\dfrac{ic}{2\omega}$. Eine Lösung ist also

$$\varphi(t) \quad = \quad -\frac{ic}{2\omega} t e^{i\omega t} \quad .$$

φ beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude (für $c \neq 0$) unbeschränkt wächst. $\mu = 0$ und $\omega^2 = b$ bezeichnet man als den "Resonanzfall": Wir haben keine Dämpfung, und die Frequenz der äußeren Kraft ist gleich der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{b}$ der freien Schwingung.
Ist $\mu \neq 0$ oder $\omega^2 \neq b$, so kommt man mit dem Ansatz

$$\varphi(t) \quad = \quad c_0\, e^{i\omega t}$$

zum Ziel, und zwar erhält man durch Einsetzen:

$$\varphi(t) = c \cdot \frac{(b-\omega^2) - 2i\mu\omega}{B^2}\, e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad B \quad := \quad \sqrt{(b-\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2} \quad .$$

Man kann von dieser Funktion für den Fall $c \in \mathbb{R}$ noch den Realteil bestimmen, dann erhält man die Lösung der reellen DGl

$$y'' + 2\mu y' + by \quad = \quad c\cos\omega t \; : \qquad \text{Es ist}$$

$$\operatorname{Re}\varphi(t) \quad = \quad c \cdot \frac{b-\omega^2}{B^2}\cos\omega t + c \cdot \frac{2\mu\omega}{B^2}\sin\omega t \quad .$$

Das kann man noch in eine etwas gefälligere Form bringen: Es ist

$$-1 \quad \leq \quad \frac{b-\omega^2}{\sqrt{(b-\omega^2)^2 + 4\mu^2\omega^2}} \quad \leq \quad 1 \quad , \quad \text{also ist}$$

$$\varepsilon \quad := \quad \arccos \frac{b-\omega^2}{B} \quad \in \quad [0,\pi] \quad \text{definiert,}$$

dafür gilt $\sin\varepsilon \geq 0$ und damit

$$\sin\varepsilon \quad = \quad \frac{2\mu\omega}{B} \quad .$$

Setzt man noch $\delta \quad := \quad \dfrac{\varepsilon}{\omega}$ und $A \quad := \quad \dfrac{c}{B}$, so folgt

$$\operatorname{Re}\varphi(t) \quad = \quad A\cdot\cos(\omega(t-\delta)) \quad ,$$

was man mit dem Additionstheorem für $\cos$ nachrechnen kann.

2) f periodisch mit der Periode ω

Dann wird man versuchen, f in eine Fourierreihe zu entwickeln (wann das geht, haben wir in §16 gelernt) und dann Teil 1) auf die einzelnen Summanden anzuwenden: Für

$$f(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\frac{2\pi}{\omega}t}$$

versucht man, eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$\varphi(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\, e^{in\frac{2\pi}{\omega}t}$$

zu bekommen, etwa indem man die d_n durch Koeffizientenvergleich bestimmt.

3) f nicht periodisch

Wir werden im Laufe dieses Semesters sehen, dass man in manchen Fällen, etwa wenn f "hinreichend schnell" für $t \to \pm\infty$ gegen 0 geht, f schreiben kann als "Fourier-Integral"

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\, e^{ixt}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Dann macht man für eine Lösung den Ansatz

$$\varphi(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x)\, e^{ixt}\,\mathrm{d}x$$

mit einer zu bestimmenden Funktion $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

§52 Fourier - Integrale

52.2 Fouriertransformation von Distributionen

Bemerkung 52.2.1 : Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, so hat man die durch f definierte reguläre Distribution T_f :

$$T_f[\varphi] \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}^n x \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \;=\; \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \;\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

und nach Regel 52.1.6 e) gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}^n x \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{\varphi}(y)\,\mathrm{d}^n y \quad , \qquad \text{also}$$

$$T_{\hat{f}}[\varphi] \quad = \quad T_f[\hat{\varphi}] \quad .$$

Will man also die Fourier-Transformierte $\hat{T}$ einer Distribution T so definieren, dass $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$ für reguläre Distributionen gilt, so ist es sinnvoll,

$$\hat{T}[\varphi] \quad := \quad T[\hat{\varphi}] \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

zu setzen, soweit die rechte Seite definiert ist. Damit das definiert ist, verkleinert man den Raum der Distributionen und vergrößert den Raum der Testfunktionen:

<u>**Definition 52.2.2 :**</u> Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen

$$\varphi : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \quad ,$$

so dass es zu jedem Paar $(\alpha, j) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0$ eine Zahl $C_{\alpha,j} \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \ (1 + ||x||)^j |D^\alpha \varphi(x)| \quad \leq \quad C_{\alpha,j} \quad .$$

Die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ heißen <u>**schnell fallende**</u> oder <u>**temperierte** Funktionen</u>. Man sieht, dass $\mathfrak{S}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

Auf $\mathfrak{S}$ definieren wir einen Konvergenzbegriff, damit wir nachher stetige Funktionen auf $\mathfrak{S}$ definieren können:

<u>**Definition 52.2.3 :**</u> Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{S}$ und sei $\varphi \in \mathfrak{S}$. Dann sagen wir, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ <u>**konvergiert in** $\mathfrak{S}$</u> gegen φ , geschrieben

$$\varphi_k \quad \underset{\mathfrak{S}}{\longrightarrow} \quad \varphi \quad ,$$

wenn für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ die durch

$$(1 + ||x||^j)\, D^\alpha(\varphi_k - \varphi)(x)$$

definierten Folgen von Funktionen von $x \in \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

<u>**Folgerung 52.2.4 :**</u> Es gilt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{S} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Auch bezüglich der Konvergenz ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ein Unterraum von $\mathfrak{S}$: Sind $\varphi_k , \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und gilt

$$\varphi_k \quad \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \quad \varphi \quad ,$$

so gibt es ein Kompaktum K mit

$$\operatorname{Supp}(\varphi_k - \varphi) \subset K \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \quad , \quad \text{und}$$

$$D^\alpha(\varphi_k - \varphi) \quad \text{konvergiert auf}\, K \,\text{gleichmäßig gegen} \quad 0 \quad .$$

Da $(1+||x||^j)$ auf K beschränkt ist, konvergiert dann auch

$$(1+||x||^j)\, D^\alpha(\varphi_k - \varphi)(x)$$

gleichmäßig auf K gegen 0, sogar gleichmäßig auf dem $\mathbb{R}^n$, denn außerhalb von K ist das sowieso 0. Also gilt

$$\varphi_k \quad \underset{\mathfrak{S}}{\longrightarrow} \quad \varphi \quad .$$

Definition 52.2.5 : Unter $\mathfrak{S}'$ verstehen wir den Vektorraum der stetigen, linearen Abbildungen

$$T: \quad \mathfrak{S} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad , \quad \varphi \longmapsto T[\varphi] \quad .$$

"Stetigkeit von T" soll dabei bedeuten: Für jede Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{S}$ mit

$$\varphi_k \quad \underset{\mathfrak{S}}{\longrightarrow} \quad \varphi \quad \text{gilt} \quad \lim_{k\to\infty} T[\varphi_k] \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Konvergenz in } \mathbb{C}\text{)}}}{=} \quad T[\varphi]$$

Die Elemente von $\mathfrak{S}'$ heißen **temperierte Distributionen** .

Bemerkung 52.2.6 : Die Bezeichnung legt es hahe, zu vermuten, dass "temperierte Distributionen" ebenfalls Distributionen im Sinne von Definition 50.1.4 sind, dass also

$$\mathfrak{S}' \quad \subset \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

gilt. Wenn man es genau nimmt, ist das sicher falsch: Ist

$$T \in \mathfrak{S} \quad , \quad \text{so ist } T \text{ eine Abbildung} \quad \mathfrak{S} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad ; \text{ist}$$

$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \text{so ist } T \text{ eine Abbildung} \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C} \quad ,$$

die Definitionsbereiche sind also verschieden. Es ist aber nach 52.2.4

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \subset \quad \mathfrak{S}$$

und damit ist für $T \in \mathfrak{S}'$ die Restriktion

$$T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \; : \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{C}$$

eine Abbildung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{C}$. Die Restriktion ist natürlich linear, und auch stetig, denn wenn

$$\varphi_k \quad \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \quad \varphi$$

geht, dann gilt nach Folgerung 52.2.4 auch $\varphi_k \quad \underset{\mathfrak{S}}{\longrightarrow} \quad \varphi$ und damit

$$\lim_{k\to\infty} T[\varphi_k] \quad = \quad T[\varphi] \quad , \qquad \text{also}$$

$$\lim_{k\to\infty} T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}[\varphi_k] \quad = \quad T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}[\varphi] \quad .$$

Also ist zwar nicht T, aber doch $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$, eine Distribution, also Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Insofern kann man, da die Abbildung

$$\mathfrak{S}' \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad , \quad T \longmapsto T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

auch noch injektiv ist, $\mathfrak{S}'$ als Teilmenge von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ auffassen.
Wir haben nun die passenden Räume, und wie man die Fourier-Transformierte definieren sollte, wissen wir auch:
Definition 52.2.7 : Sei $T \in \mathfrak{S}'$ und $\varphi \in \mathfrak{S}$. Dann defineren wir die **Fouriertransformierte $\hat{T}$** von T durch

$$\hat{T}[\varphi] \quad := \quad T[\hat{\varphi}] \quad ,$$

wobei $\hat{\varphi}$ die Fourier-Transformierte von $\varphi \in \mathfrak{S} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist .
($\mathfrak{S} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ folgt aus $|\varphi(x)| \leq C_{0,j}||x||^{-j}$ für $j \in \mathbb{N}$ und der Integrierbarkeit von $x \longmapsto ||x||^{-j}$ für $j > n$, siehe Beispiel (49.3.9) bzw. (L277) .) □

Die folgenden Sätze wollen wir nicht beweisen :
Satz 52.2.8 : Die in Definition 52.2.7 eingeführte Abbildung

$$\widehat{T} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{C}$$

gehört zu $\mathfrak{S}'$. Für eine reguläre Distribution

$$T_f \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{erhält man}$$

$$\widehat{T_f} \quad = \quad T_{\widehat{f}} \quad .$$ □

Für die Fouriertransformation von Distributionen gelten ähnliche Regeln wie in 52.1.6. Beachten Sie dabei, dass man Distributionen mit Funktionen aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ multiplizieren kann:
Satz 52.2.9 : Sei $T \in \mathfrak{S}'$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann gilt
a) $\widehat{D^\alpha T} = \mu^\alpha \cdot \hat{T}$ mit $\mu(x) := ix$, $\mu^\alpha(x) := i^{|\alpha|}x^\alpha$
b) $D^\alpha \hat{T} \quad = \quad \widehat{\check{\mu}^\alpha \cdot T}$ mit $\check{\mu}(x) := -ix$
c) $\hat{\hat{T}} \quad = \quad \check{T}$, wobei

$$\check{T}[\varphi] \quad := \quad T[\check{\varphi}] \quad , \quad \check{\varphi}(x) \quad := \quad \varphi(-x) \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathfrak{S} \quad \text{ist.}$$

Es gilt hier also die Fourier-Inversions-Formel, ohne dass man wie in Satz 52.1.8 voraussetzen muss, dass man $\hat{\hat{T}}$ überhaupt bilden kann. Für $T \in \mathfrak{S}'$ ist eben auch $\widehat{T} \in \mathfrak{S}'$.
Aus c) folgt
Satz 52.2.10 : Die Fourier-Transformation

$$\widehat{\ }: \mathfrak{S}' \longrightarrow \mathfrak{S}'$$

ist ein Vektorraum-Isomorphismus, und es gilt für $T, T_k \in \mathfrak{S}'$, $k \in \mathbb{N}$:

$$T_k \underset{\mathfrak{S}'}{\longrightarrow} T \iff \widehat{T_k} \underset{\mathfrak{S}'}{\longrightarrow} \widehat{T} \quad .$$ □

Wir wollen die Theorie hier nicht vertiefen, sondern in einigen Beispielen die Fouriertransformierten ausrechnen:
Beispiele : (52.2.11) Die lineare Abbildung

$$\delta_a : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \delta_a[\varphi] \quad := \quad \varphi(a) \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}^n$$

gehört zu $\mathfrak{S}'$, denn aus

$$\varphi_k \underset{\mathfrak{S}}{\longrightarrow} \varphi \quad \text{folgt insbesondere} \quad \lim_{k\to\infty} \varphi_k(a) = \varphi(a) \quad , \qquad \text{also}$$

$$\lim_{k\to\infty} \delta_a[\varphi_k] \quad = \quad \delta_a[\varphi] \quad .$$

Die $\delta-$ Distribution (aufgefasst als Abbildung von $\underline{\mathfrak{S}}$ in $\mathbb{C}$) ist also eine temperierte Distribution. Es ist für $\varphi \in \mathfrak{S}$:

$$\widehat{\delta_a}[\varphi] = \delta_a[\widehat{\varphi}] = \widehat{\varphi}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, e^{-i<x,a>}\, \mathrm{d}^n x = T_{e_{-a}}[\varphi] \quad , \quad \text{wobei}$$

$$e_a(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{i<x,a>} \quad \text{für} \quad x, a \in \mathbb{R}^n \quad \text{ist,}$$

$$e_a \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \text{also} \quad T_{e_{-a}} \quad \text{eine reguläre Distribution} \quad ,$$

$$\widehat{\delta_a} = T_{e_{-a}} \quad .$$

Die Fouriertransformierte der nicht regulären Distribution δ_a ist also die reguläre Distribution $T_{e_{-a}}$. Speziell für $a = 0$ ist

$$\widehat{\delta_0} = T_{e_0} \quad , \quad e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \quad .$$

(52.2.12) Mit Satz 52.2.9 a) erhalten wir

$$\widehat{D^\alpha \delta_a} = \mu^\alpha \widehat{\delta_a} \quad \text{mit} \quad \mu(x) = ix \quad ,$$

$$= \mu^\alpha T_{e_{-a}} \quad , \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} (\mu^\alpha T_{e_{-a}})[\varphi] &= T_{e_{-a}}[\mu^\alpha \varphi] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} i^{|\alpha|}\, x^\alpha\, e^{-i<x,a>}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}^n x \\ &= T_{\mu^\alpha \cdot e_{-a}}[\varphi] \quad , \quad \text{also} \end{aligned}$$

$$\widehat{D^\alpha \delta_a} = T_{\mu^\alpha \cdot e_{-a}} \quad . \qquad \square$$

(52.2.13) Mit der Formel aus (52.2.12) und der Fourier-Inversions-Formel 52.2.9 c) folgt

$$\widehat{T_{\mu^\alpha \cdot e_{-a}}} = \widehat{\widehat{D^\alpha \delta_a}} = \check{}(D^\alpha \delta_a) \quad ,$$

$$\check{}(D^\alpha \delta_a[\varphi]) = D^\alpha \delta_a[\check{\varphi}] = \delta_a[(D^\alpha)^* \check{\varphi}] \quad .$$

Nach Beispiel (50.2.12) ist $(D^\alpha)^* = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$, also

$$\check{}(D^\alpha \delta_a\,[\varphi]) = \delta_a[(-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha \check{\varphi}] = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha \check{\varphi})(a) = D^\alpha \varphi(-a) \quad ,$$

$$\widehat{T_{\mu^\alpha e_{-a}}}[\varphi] = (D^\alpha \varphi)(-a) \quad \text{und damit}$$

$$\underline{\widehat{T_{\mu^\alpha e_a}} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_a} \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \text{denn}$$

$$((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_a)[\varphi] = \delta_a[(-1)^{|\alpha|}(D^\alpha)^* \varphi] = \delta_a[D^\alpha \varphi] = (D^\alpha \varphi)(a) \quad .$$

Wir notieren einige Spezialfälle: Für

$\underline{a = 0}$ erhält man $\widehat{T_{\mu^\alpha e_0}} = (-1)^\alpha D^\alpha \delta_0$, für

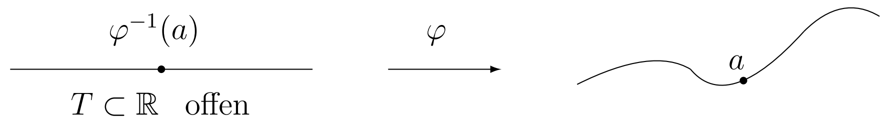
$\underline{\alpha = 0}$: $\widehat{T_{e_a}} = \delta_a$, und für

$\underline{\alpha = 0 \quad \text{und} \quad a = 0}$: $\widehat{T_{e_0}} = \delta_0$.

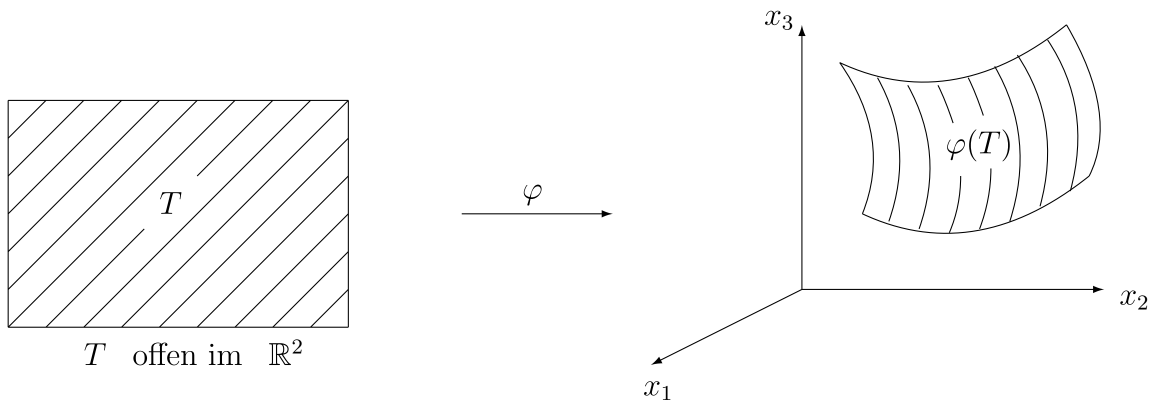
Aus der vorletzten Formel sieht man, dass δ_a die Fouriertransformierte einer regulären Distribution ist.

§54 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

(54.1.10) Karten: Spezialfälle : Als Physiker sollte man stets die Spezialfälle für $n = 2$ und 3 im Auge haben:
a) Ist $k = 1$ und T ein Intervall, so ist eine Karte von M ein doppelpunktfreier, stetig differenzierbarer parametrisierter Weg im $\mathbb{R}^n$, bei dem auch noch $\forall\, t \in T \,:\, \varphi'(t) \neq 0$ ist.

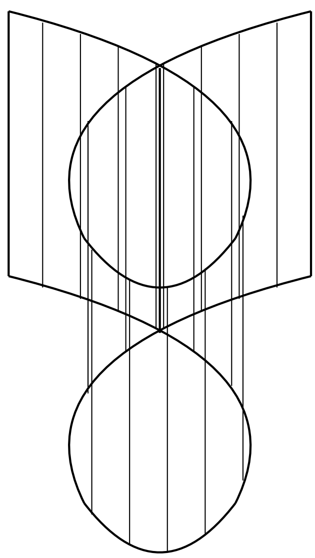


Wir kennen das aus §34 im letzten Semester.
b) Ist $k = 2$ und $n = 3$, so heißt eine Karte von M **parametrisierte Fläche** (ohne Selbstschnitt) .



So etwas

ist dabei nicht zugelassen !



Beachten Sie dabei, dass eine $k-$dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ i.A. nicht aus nur **einer** Karte besteht. Ein Beispiel dafür ist die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, also die $2-$Sphäre im $\mathbb{R}^3$: Dass es zu **einer** Landkarte keine bijektive Abbildung φ auf die Erdoberfläche gibt, bei der φ und φ^{-1}

stetig sind, wissen Sie aus dem Geographie-Unterricht.

(54.2.3) Gramsche Determinante: Spezialfälle:

a) Ist $k = 1$, $T \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter, stetig differenzierbarer Weg, so hat man nur

$$g_{11}(t) = \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \right\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t} \right)^2 = ||\varphi'(t)||^2 \quad ,$$

und das ist auch die Gramsche Determinante:

$$g(t) = ||\varphi'(t)||^2 \quad .$$

b) Ist $k = 2$ und $n = 3$, $T \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, so hat man die Gramsche Determinante

$$g(t) = \det \begin{pmatrix} \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \right)^2 & \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \\ \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_1} & \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{\partial\varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} || \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} ||^2 & \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} \right\rangle & || \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_2} ||^2 \end{pmatrix}$$

Man kann das noch übersichtlicher schreiben: Es ist

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_2} \end{pmatrix} \quad ,$$

also $\varphi'(t)$ eine $3 \times 2-$Matrix. Für die erste Spalte dieser Matrix schreiben wir im Folgenden $\underline{\varphi_{\bullet 1}(t)}$, analog: $\underline{\varphi_{\bullet 2}(t)}$, also

$$\varphi_{\bullet 1}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_1} \end{pmatrix} \quad , \quad \varphi_{\bullet 2}(t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} \\ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial t_2} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann wird

$$g(t) = \det \begin{pmatrix} ||\varphi_{\bullet 1}(t)||^2 & < \varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t) > \\ < \varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t) > & ||\varphi_{\bullet 2}(t)||^2 \end{pmatrix}$$

$$g(t) \;=\; ||\varphi_{\bullet 1}(t)||^2||\varphi_{\bullet 2}(t)||^2 - <\varphi_{\bullet 1}(t), \varphi_{\bullet 2}(t)>^2$$
$$= \;||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||^2 \quad \text{nach 21.5.8 .}$$

$g(t)$ ist also das Quadrat der Fläche, die von den Vektoren $\varphi_{\bullet 1}(t)$ und $\varphi_{\bullet 2}(t)$ aufgespannt wird.

c) Ist $k = n$ und $T \subset \mathbb{R}^n$ offen, so kann man

$$\varphi \;:\; T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \quad , \quad \varphi(t) \;:=\; t$$

als Karte nehmen. Dann ist

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j} = e^j \quad , \quad g_{jl}(t) = \delta_{jl} \quad \text{für} \quad j,l \in \underline{n} \quad \text{und} \quad g(t) = \det E_n = 1 \quad .$$

<u>(54.2.4) Beispiel :</u> Wir nehmen eine Kugel mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ und von ihrer Oberfläche eine Karte, die nur einen “Meridian” auslässt:

$$\Phi \;:\; (-\pi;\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$\Phi(\varphi,\vartheta) := (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\vartheta)\,.$$

In diesem Fall erhält man

$$\Phi_{\bullet 1}(\varphi,\vartheta) = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\vartheta \\ R\cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} , \; \Phi_{\bullet 2}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\vartheta \\ -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und damit

$$g(\varphi,\vartheta) \;=\; R^4\cos^2\vartheta \;>\; 0 \quad .$$

<u>(54.2.9) Flächenelement: Spezialfälle:</u>
Wir hatten in (54.2.3) schon die Gramsche Determinante in Spezialfällen ausgerechnet. Damit erhalten wir

a) für $k = 1$, also für einen parametrisierten, stetig differenzierbaren Weg

$$\varphi \;:\; T \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad T \quad \text{ein offenes Intervall:}$$

$$\mathrm{d}s(t) \;=\; ||\varphi'(t)||\mathrm{d}^1t$$

und sprechen in diesem Fall vom **<u>Linienelement</u>**. Wir schreiben hier $\mathrm{d}s(t)$ statt $dS(t)$.

b) Ist $k = 2$ und $n = 3$, also T offen im $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi \;:\; T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$$

eine parametrisierte Fläche, φ stetig differenzierbar, so ist

$$\mathrm{d}S(x) \;=\; ||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

das Flächenelement, und schließlich ist

c) für $k = n$ einfach

$$\mathrm{d}V \quad := \quad \mathrm{d}^n t$$

das Flächenelement, das man insbesondere für $n = 3$ das **Volumenelement** nennt. □

Satz 54.2.12 : (G 144) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $n \geq 2$. Dann ist für fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ die Funktion f über die Sphäre

$$K_r := \{ \; x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r \; \} \quad \text{integrierbar, und es gilt}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}r = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{S^{n-1}} f(r\xi)\mathrm{d}S(\xi) \right) \cdot r^{n-1}\mathrm{d}r \quad .$$

Beweis mit der Transformationsformel für Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$:
In (49.3.6) hatten wir die Formel (2^n):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r,\varphi)) \cdot C_n(\varphi) \cdot r^{n-1}\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}r \quad ,$$

wobei das Integral in der Klammer nach dem Satz von FUBINI für fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ existiert. Dabei war

$$\Pi^{n-1} := (-\pi;\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2} \right)^{n-2} \quad , \quad \varphi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \quad \text{und}$$

(1) $$C_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \cos^0\varphi_1 \cdot \cos^1\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos^{n-2}\varphi_{n-1} \quad .$$

Berechnen wir andererseits

$$\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad \text{für festes} \quad r > 0 \quad , \quad \text{so können wir}$$

$$\Phi_n : \Pi^{n-1} \longrightarrow K_r \quad , \quad (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \longmapsto P_n(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

als Parametrisierung nehmen ($K_r \setminus \Phi_n(\Pi^{n-1})$ ist eine $(n-1)-$dimensionale Nullmenge) und erhalten

$$\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad = \quad \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))\sqrt{g^{(n)}(\varphi)}\,\mathrm{d}^{n-1}\varphi \quad ,$$

wobei das (n) andeuten soll, dass wir die GRAMsche Determinante

$$g^{(n)}(\varphi) := \det(g_{jl}^{(n)}(\varphi))_{(j,l)\in\underline{n-1}\times\underline{n-1}} \quad \text{bilden, wobei}$$

$$g_{jl}^{(n)}(\varphi) := \left\langle \frac{\partial\Phi_n(\varphi)}{\partial\varphi_j}, \frac{\partial\Phi_n(\varphi)}{\partial\varphi_l} \right\rangle$$

ist. Wir zeigen mit Induktion, dass für $n \geq 2$ gilt

(∗) $$\sqrt{g^{(n)}(\varphi)} = C_n(\varphi) \cdot r^{n-1} \quad .$$

Induktionsanfang : Für $n = 2$ haben wir

$$\Phi_2 : (-\pi;\pi) \longrightarrow K_r \quad , \quad \varphi_1 \longmapsto P_2(r,\varphi_1) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi_1 \\ r\sin\varphi_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$g^{(2)}(\varphi_1) \overset{(54.2.3)a)}{=} \left\| \frac{\mathrm{d}\Phi_2(\varphi_1)}{\mathrm{d}\varphi_1} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -r\sin\varphi_1 \\ r\cos\varphi_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2 \quad ,$$

$$\sqrt{g^{(2)}(\varphi_1)} = r = C_2(\varphi_1)\cdot r^1 \quad .$$

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sei $(*)$ richtig. Dann haben wir für $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$:

$$\Phi'_{n+1}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi'_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\cos\varphi_n & -\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot\sin\varphi_n \\ \hline 0 & r\cdot\cos\varphi_n \end{array} \right)$$

$\in M((n+1)\times n,\mathbb{R})$, das ist einfach die Matrix von $P'_{n+1}(r,\varphi)$ aus Formel $(6')$ in (49.3.6) , in der man die 1.Spalte (also die Ableitung nach r) weggelassen hat. Wir bilden nun das Skalarprodukt der n Spalten miteinander: Die Spalten mit Index $j < n$ sind die Spalten von $\Phi'_n(\varphi)$, multipliziert mit $\cos\varphi_n$, und um die 0 unten ergänzt, also ist

$$g^{(n+1)}_{jl}(\varphi) = g^{(n)}_{jl}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cos^2\varphi_n \quad \text{für} \quad j,l < n \quad .$$

Es ist wegen $\|P_n(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\| = r$:

$$g^{(n+1)}_{nn}(\varphi) = \|\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\|^2\cdot\sin^2\varphi_n + r^2\cos^2\varphi_n = r^2 \quad ,$$

und für $j < n$:

$$g^{(n+1)}_{jn}(\varphi) = -\left\langle \frac{\partial\Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}{\partial\varphi_j}, \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \right\rangle \cos\varphi_n\sin\varphi_n \quad .$$

Wendet man auf die einzelnen Summanden des Skalarprodukts die Produktregel (im $\mathbb{R}^1$) an, so erhält man

$$g^{(n+1)}_{jn}(\varphi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi_j} < \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}), \Phi_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) > \cos\varphi_n\sin\varphi_n$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi_j}(r^2)\cdot\cos\varphi_n\sin\varphi_n = 0 \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\varphi) &= \det \left(\begin{array}{c|c} g^{(n)}_{jl}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cos^2\varphi_n & 0 \\ \hline 0 & r^2 \end{array} \right) \\ &= g^{(n)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cos^{2(n-1)}\varphi_n\cdot r^2 \quad , \\ \sqrt{g^{(n+1)}(\varphi)} &= \sqrt{g^{(n)}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})}\cdot\cos^{n-1}\varphi_n\cdot r \\ &= C_{n-1}(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\cdot r^{n-1}\cos^{n-1}\varphi_n\cdot r \quad , \end{aligned}$$

und nach (1) ist das gleich $C_n(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\cdot r^n$.

Damit ist $(*)$ bewiesen, und mit $(*)$ erhalten wir

$$\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad = \quad \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r,\varphi))\, C_n(\varphi)\cdot r^{n-1}\mathrm{d}^{n-1}\varphi \quad ,$$

und das linke Integral existiert, wenn das rechte existiert. Oben eingesetzt ergibt das

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}^n x \quad = \quad \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \right) \mathrm{d}r \quad .$$

Die zweite Gleichung der Behauptung erhält man aus

$$\begin{aligned} \int\limits_{S^{n-1}} f(r\xi)\mathrm{d}S(\xi)\cdot r^{n-1} \quad &= \quad \int\limits_{\Pi^{n-1}} f(r\cdot P_n(1,\varphi))\cdot C_n(\varphi)\mathrm{d}\varphi\cdot r^{n-1} \\ &= \quad \int\limits_{K_r} f(x)\mathrm{d}S(x) \quad . \end{aligned}$$

□

§55 Der Gaußsche Integralsatz

(55.2.11) Beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins :

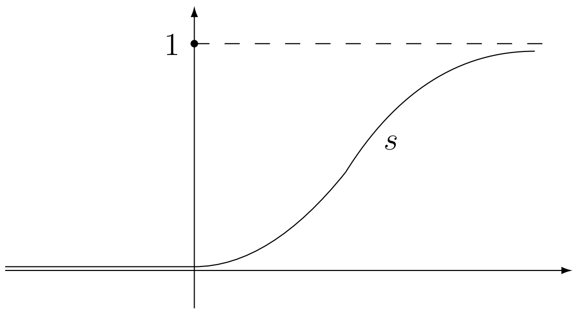
Als Übungsaufgabe hatten wir gezeigt, dass

$$s\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad s(t) \quad := \quad \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{fr } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist. Setzen wir

$$g\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g(t) \quad := \quad s(1+t)\cdot s(1-t)\,,$$

so ist auch g beliebig oft differenzierbar; es gilt

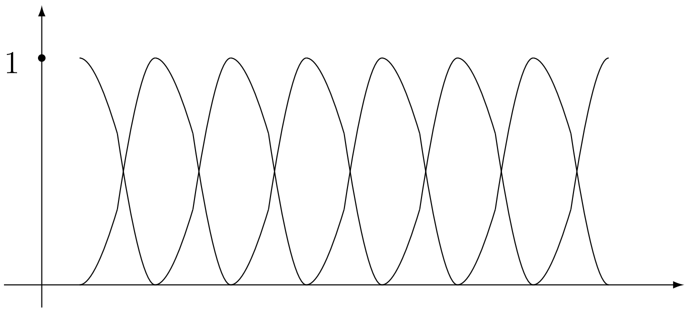


$$g(t) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1+t>0 \wedge 1-t>0 \quad \Longleftrightarrow \quad t\in(-1;1) \quad ,$$

also $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, und in $(-1;1)$ ist $g(t)>0$. Es ist

$$G\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad G(t) \quad := \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t-k)$$

definiert, denn zu jedem $t\in\mathbb{R}$ gibt es eine oder zwei ganze Zahlen k mit $t\in(k-1,k+1)$, und nur für solche k ist $g(t-k)\neq 0$. G ist, wie g, beliebig oft differenzierbar,



und es gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}\, \forall\, t \in \mathbb{R} : \ G(t) \quad = \quad G(t-k) \quad .$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $G(t) > 0$; wir können also

$$h(t) \quad := \quad \frac{g(t)}{G(t)} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}$$

setzen, dann ist $\operatorname{Supp}\, h = [-1;1]$, $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, und

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-k) \quad = \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} \quad = \quad \frac{1}{G(t)} \cdot G(t) \quad = \quad 1 \quad .$$

Wir möchten noch erreichen, dass der Durchmesser der Träger der einzelnen Summanden kleiner als ein vorgegebenes $\lambda > 0$ wird. Außerdem sollen die Summanden im $\mathbb{R}^n$ definiert sein. Wir definieren dazu für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$\alpha_{p\varepsilon} : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{durch}$$

$$\alpha_{p\varepsilon}(x) \quad := \quad \frac{1}{G_\varepsilon(x)} \prod_{j=1}^n g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \quad \text{mit}$$

$$G_\varepsilon(x) \quad := \quad \sum_{q\in\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - q_j\right) \quad .$$

Wegen $g\left(\dfrac{x_j}{\varepsilon} - q_j\right) > 0 \iff \dfrac{x_j}{\varepsilon} \in (q_j - 1; q_j + 1)$ und $g \geq 0$ sieht man wie oben: $G_\varepsilon > 0$, und G_ε ist beliebig oft differenzierbar, also auch

(i) $\alpha_{p\varepsilon}$ beliebig oft differenzierbar, und

(ii) $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha_{p\varepsilon}(x) = \frac{1}{G_\varepsilon(x)} \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) = \frac{G_\varepsilon(x)}{G_\varepsilon(x)} = 1$;

man nennt daher $(\alpha_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ eine **beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins**, und es gilt noch

(iii) $\operatorname{Supp}\, \alpha_{p\varepsilon} \quad = \quad \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j - p_j\varepsilon| \leq \varepsilon \text{ für alle } j \in \underline{n}\ \}$,

also

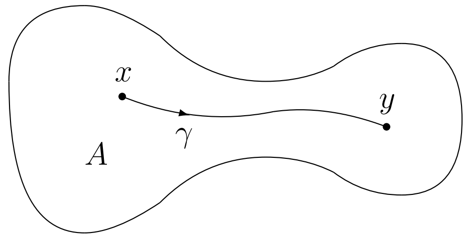
$\operatorname{diam}\, (\operatorname{Supp}\, \alpha_{p\varepsilon}) \quad = \quad \operatorname{diam}\, [0; 2\varepsilon]^n \quad = \quad 2\varepsilon\sqrt{n}$,

und das wird kleiner als λ für $\varepsilon < \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n}}$.

Bemerkung 55.2.15 : Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, und auch noch **wegezusammenhängend** , d.h. zu $x, y \in A$ gebe es einen Weg

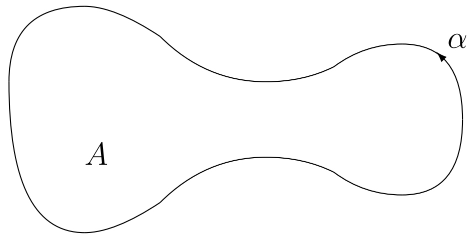
$\gamma : [0;1] \longrightarrow A$ mit

$\gamma(0) = x\,,\ \gamma(1) = y\,.$



Hat A glatten Rand, so kann man (was anschaulich klar ist) Rd A parametrisieren durch **einen** stetig differenzierbaren Weg

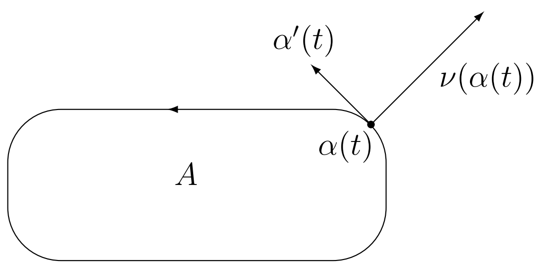
$\alpha : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a;b]$, und zwar so, dass α um die Punkte aus A einmal im mathematisch positiven Sinn herumläuft.



Für $t \in [a;b]$ ist $\alpha'(t)$ nach Satz 55.1.2 ein Tangentialvektor an α (sogar eine Basis des Tangentialraums), also an Rd A , und anschaulich sieht man, dass

$$\nu(\alpha(t)) \quad := \quad + \frac{(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))}{||\alpha'(t)||}$$

der **äußere** Einheits-Normalenvektor an Rd A ist.



Sei nun $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein auf einer offenen Menge U mit $A \subset U$ stetig differenzierbares Vektorfeld, dann setzen wir

$$K : U \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad K(x) \quad := \quad (F_2(x), -F_1(x))$$

und wenden darauf den Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ an :

$$\int\limits_A \operatorname{div} K(x)\,\mathrm{d}^2x \quad = \quad \int\limits_{\mathrm{Rd}\,A} < K(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad , \quad \text{also}$$

$$\int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int\limits_{[a;b]} < K(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)) > ||\alpha'(t)|| \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_a^b (F_2(\alpha(t)) \cdot \alpha_2'(t) + F_1(\alpha(t)) \cdot \alpha_1'(t)) \mathrm{d}t = \int\limits_a^b < F(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad .$$

Nennt man noch $\mathrm{d}\vec{s}(t) \quad := \quad \alpha'(t)\mathrm{d}t$ das **vektorielle Linienelement**, so wird

$$(*) \quad \int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad = \quad \int\limits_{\partial A} < F(s), d\vec{s} > \quad ,$$

wenn man das letzte Integral als $\int\limits_a^b < F(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t$ definiert.

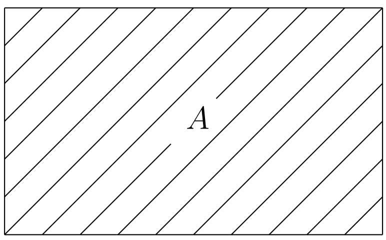
$(*)$ heißt der **Satz von Green** für glatt berandete, wegezusammenhängende kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung 55.2.16 : Wir haben hier in Formel $(*)$ zum ersten Mal "$\int\limits_{\partial A}$" für das Integral über den Rand von A geschrieben. Bisher hatten wir, etwa im Satz von Gauß , "$\int\limits_{\mathrm{Rd}A}$" für das Integral über die Menge der Randpunkte geschrieben, und die Orientierung festgelegt durch den äußeren Normalenvektor ν, der im Integral stand. Beim Satz von Green meinen wir mit "∂A" den **orientierten Rand** , also den Randweg

$$\alpha : \ [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ,$$

der einmal positiv um die Punkte von A herumläuft.

Bemerkung 55.2.17 : Im Satz von Gauß hatten wir vorausgesetzt, dass A ein "Kompaktum mit glattem Rand" ist. Man kann (und muss) diese Voraussetzung etwas abschwächen, denn sonst wären für A schon Rechtecke im $\mathbb{R}^2$



ausgeschlossen. Rd A darf "Singularitäten" enthalten, d.h. Punkte, in denen der Rand "nicht glatt" ist, aber man muss festlegen, was für Punkte dabei noch zugelassen sind. Für $n = 2$ wollen wir das präzisieren:

Definition 55.2.18 : Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und wegezusammenhängend. Es gebe einen stückweise stetig differenzierbaren Weg

$$\alpha \,:\, [a;b] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \mathrm{Rd}\, A \,=\, \{\, \alpha(t) \,|\, t \in [a;b] \}\,,$$

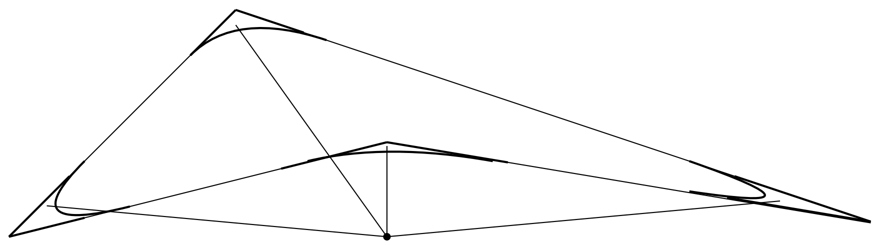
also eine Partition

$$a \,=\, t_0 < t_1 < \ldots < t_r \,=\, b \quad ,$$

so dass die Wege $\alpha|_{[t_{j-1};t_j]} \,:\, [t_{j-1}, t_j] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^2$ für $j \in \underline{n}$ stetig differenzierbar sind, und so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt : Es gibt ein Kompaktum $A^{(\varepsilon)}$ mit glattem Rand und stetig differenzierbarem Randweg

$$\alpha^{(\varepsilon)} \,:\, [a,b] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad , \quad \text{also} \quad \mathrm{Rd}\, A^{(\varepsilon)} \,=\, \{\; \alpha^{(\varepsilon)}(t) \;|\; t \in [a,b] \;\} \quad ,$$

so dass gilt



$A\,\Delta\, A^{(\varepsilon)}$

a) $v_2(A\Delta\, A^{(\varepsilon)}\,) < \varepsilon$, wobei wir für $B, C \subset \mathbb{R}^2$ definieren:
$B\Delta C \quad := \quad (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \quad .$
b) Die Gesamtlänge der in $\mathrm{Rd}\; A\Delta\, \mathrm{Rd}\; A^{(\varepsilon)}$ auftretenden Kurven ist kleiner als ε.

Dann heißt A eine **zulässige kompakte Menge** im $\mathbb{R}^2$, und wir notieren:

Satz 55.2.19 : Der Satz von Green gilt auch für zulässige kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. □

§56 Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Wir werden den Satz von Stokes für Flächen im $\mathbb{R}^3$ anschließend mit Hilfe von Differentialformen beweisen. Es kann aber sein, dass Sie Differentialformen zu abstrakt finden und dem Beweis daher nicht trauen. Ich schreibe Ihnen deshalb auch noch einen Beweis auf, wie man den Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ direkt aus dem Satz von Green im $\mathbb{R}^2$ folgern kann. Wir beschränken uns dabei auf 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ mit **einer** Karte, also parametrisierte Flächen.

56.1 Definitionen und Beispiele

Definition 56.1.1 : Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen und $A \subset T$ eine zulässige kompakte Menge im $\mathbb{R}^2$. Sei
$\varphi \,:\, T \overset{\sim}{\longrightarrow} \varphi(T) \subset \mathbb{R}^3$ **zweimal** stetig differenzierbar,

bijektiv, und φ^{-1} stetig, dann nennen wir die kompakte Menge

$$B \quad := \quad \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3$$

mit dem durch

$$\nu(\varphi(t)) \quad := \quad \frac{\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)}{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||} \quad \text{für} \quad t \in A$$

definierten Einheits-Normalen-Vektorfeld eine **zulässige kompakte und durch ν orientierte Fläche** im $\mathbb{R}^3$. Ist

$$\alpha : \ [a;b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \text{Rd} \ A = \{ \ \alpha(t) \ | \ t \in [a;b] \ \}$$

ein um die Punkte von A positiv herumlaufender Weg, so nennen wir

$$\partial B \quad := \quad \varphi \circ \alpha : \ [a;b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3$$

den **orientierten Rand** von B.

(56.1.2) Beispiel : Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ offen, $A \subset T$ eine zulässige kompakte Menge und

$$\varphi : \ T \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(t_1, t_2) \quad := \quad (t_1, t_2, 0) \quad . \quad \text{Dann ist}$$

$$\varphi_{\bullet 1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^1 \quad , \quad \varphi_{\bullet 2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^2 \quad ,$$

also $\nu(\varphi(t)) = e^3$ für alle $t \in A$ und

$$\partial(\varphi(A)) : \ [a;b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$t \longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0) \quad , \quad \text{wenn}$$

$$\partial A = \alpha : \ [a;b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^2 \quad \text{ist} .$$

(56.1.3) Beispiel : Wir nehmen eine Kugel mit Radius R, wie in Beispiel (54.2.4) , und

$$\Phi : \ \mathbb{R}^2 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$\Phi(\varphi, \vartheta) \quad := \quad (R\cos\varphi\cos\vartheta, R\sin\varphi\cos\vartheta, R\sin\vartheta) \quad .$$

Φ ist auf $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbar. $\Phi_{\bullet 1}$ und $\Phi_{\bullet 2}$ hatten wir in 54.2.4 ausgerechnet und erhalten damit

$$\nu(\Phi(\varphi, \vartheta)) \quad = \quad (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad = \quad \frac{1}{R}\Phi(\varphi, \vartheta) \quad .$$

Sei $A \quad := \quad [-\pi; \pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, so ist die Restriktion von Φ auf A injektiv, und

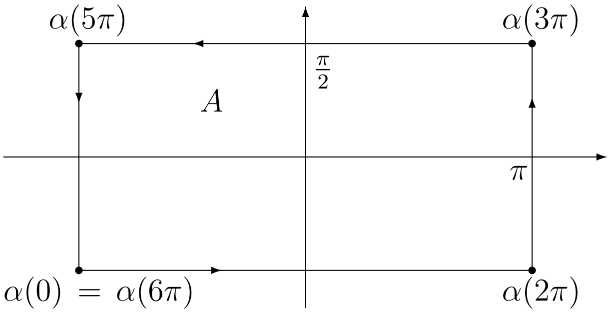
$$\Phi|_A : \ A \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3$$

ist eine Karte der Kugeloberfläche, die einen "Meridian" , und zwar die Menge

$$\{ \ (-R\cos\vartheta, 0, R\sin\vartheta) \ | \ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \ \}$$

auslässt. Der positiv durchlaufene Rand ∂A von A ist gegeben durch

$\alpha\ :\ [0;6\pi]\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^2$,

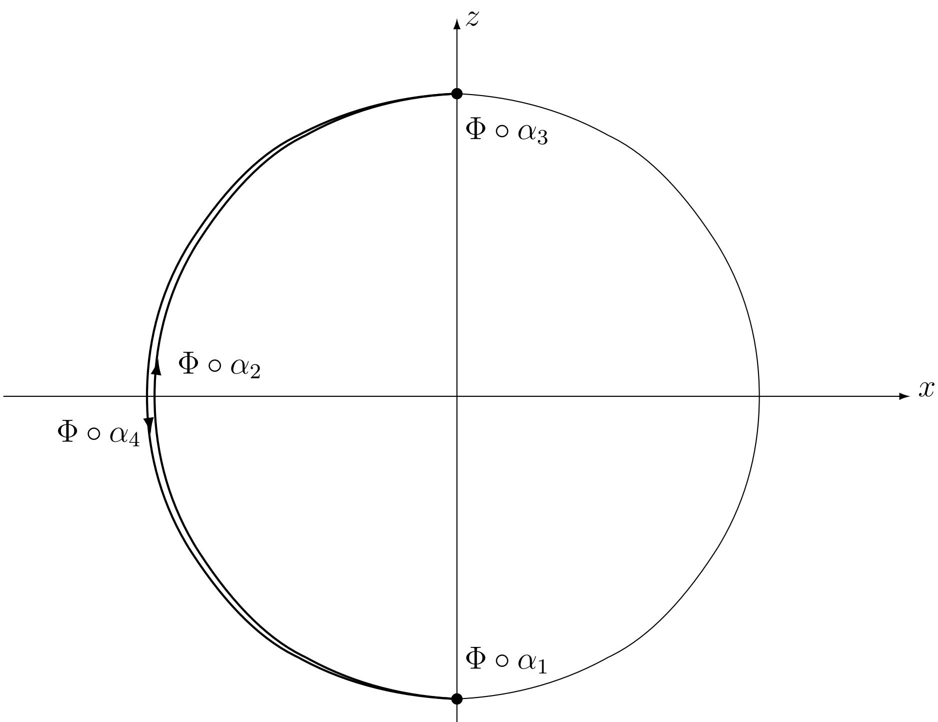


$$\alpha(t) \quad := \quad \begin{cases} \alpha_1(t) & := & (t-\pi, -\frac{\pi}{2}) & \text{für} & t \in [0;2\pi] \\ \alpha_2(t) & := & (\pi, t-\frac{5}{2}\pi) & \text{für} & t \in [2\pi;3\pi] \\ \alpha_3(t) & := & (-t+4\pi, \frac{\pi}{2}) & \text{für} & t \in [3\pi;5\pi] \\ \alpha_4(t) & := & (-\pi, -t+\frac{11}{2}\pi) & \text{für} & t \in [5\pi;6\pi] \end{cases}$$

Das ergibt

$$(\Phi \circ \alpha_1)(t) \ = \ (0,0,-R) \quad \text{für} \quad t \in [0;2\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_3)(t) \ = \ (0,0,R) \quad \text{für} \quad t \in [3\pi;5\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_2)(t) \ = \ (-R\sin t, 0, -R\cos t) \quad \text{für} \quad t \in [2\pi;3\pi] \quad ,$$
$$(\Phi \circ \alpha_4)(t) \ = \ (R\sin t, 0, -R\cos t) \quad \text{für} \quad t \in [5\pi;6\pi] \quad .$$

$\Phi \circ \alpha_1$ und $\Phi \circ \alpha_3$ sind also Wege, die nur aus einem Punkt bestehen (dem Südpol S und dem Nordpol N der Kugel) , $\Phi \circ \alpha_2$ und $\Phi \circ \alpha_4$ durchlaufen dieselben Punkte, in entgegengesetzter Richtung (von S nach N bzw. N nach S). Integrale über $\partial(\Phi(A))$ ergeben also 0 .



(56.1.4) Zur Wiederholung : Für ein Vektorfeld

$K\,:\,U\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^3\quad,\quad U\subset\mathbb{R}^3$ offen, K stetig differenzierbar, hatten wir in (35.15) die Rotation definiert als

$$(\operatorname{rot}K)(x)\;:=\;\left(\frac{\partial K_3(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial K_2(x)}{\partial x_3},\frac{\partial K_1(x)}{\partial x_3}-\frac{\partial K_3(x)}{\partial x_1},\frac{\partial K_2(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial K_1(x)}{\partial x_2}\right)$$

$$\text{für}\quad x\;=\;(x_1,x_2,x_3)\in U\quad .$$

56.2 Der Satz

Satz 56.2.1 (Satz von Stokes für zulässige kompakte Flächen im $\mathbb{R}^3$):
Sei B eine zulässige kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit orientiertem Rand ∂B . Sei $U\subset\mathbb{R}^3$ offen, $B\subset U$ und

$$K\,:\,U\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^3$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int\limits_B <\operatorname{rot}K(x),\nu(x)>\mathrm{d}S(x)\quad=\quad\int\limits_{\partial B}<K(s),\,\mathrm{d}\vec{s}>\quad .$$

Bemerkung (56.2.2) : Will man nicht nur (wie in der theoretischen Physik) schöne Formeln haben, sondern die beiden Integrale ausrechnen, so ist es nötig, sich an die Definitionen zu erinnern: Zu B hat man eine zulässige kompakte Fläche $A\subset\mathbb{R}^2$ mit einem Randweg $\alpha\,:\,[a;b]\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^2$, der A positiv umläuft, und die zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi\,:\,T\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^3\quad\text{für eine offene Teilmenge}\quad T\subset\mathbb{R}^2\quad\text{mit}\quad A\subset T\quad,$$

$$\text{und}\quad B\;=\;\varphi(A)\quad,\quad\partial B\;=\;\varphi\circ\alpha\,:\,[a;b]\;\longrightarrow\;\mathbb{R}^3\quad .$$

Damit wird nach den Definitionen in §54 :

$$\int\limits_B<\operatorname{rot}K(x),\nu(x)>\mathrm{d}S(x)\;=\;\int\limits_A<\operatorname{rot}K(\varphi(t)),\varphi_{\bullet 1}(t)\times\varphi_{\bullet 2}(t)>\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2$$

$$=\;\int\limits_A\det(\operatorname{rot}K(\varphi(t)),\varphi_{\bullet 1}(t),\varphi_{\bullet_2}(t))\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\quad ,$$

$$\int\limits_{\partial B}<K(s),\,\mathrm{d}\vec{s}>\quad=\quad\int\limits_a^b<K(\varphi(\alpha(\xi))),(\varphi\circ\alpha)'(\xi)>\mathrm{d}\xi\quad .$$

Wir benutzen diese Bezeichnungen auch gleich beim Beweis des Satzes von Stokes, um ihn auf den Satz von Green zurückzuführen:

Beweis von Satz 56.2.1 : 1) Sei also $B\;=\;\varphi(A)$ mit einer zulässigen kompakten Fläche $A\subset\mathbb{R}^2$. Schreiben wir Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ als Spalten, so setzen wir

$$(1) \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transposition}}}{{}^t\tilde{K}(x)} \quad := \quad {}^tK(\varphi(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrizenprodukt,}}}{\cdot} (D\varphi)(x) \quad ,$$

dadurch ist ein Vektorfeld

$$\tilde{K} \,:\, \varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^2 \quad \text{definiert, denn}$$

$${}^tK(\varphi(x)) \in M(1 \times 3, \mathbb{R}) \quad , \quad (D\varphi)(x) \in M(3 \times 2, \mathbb{R}) \quad ,$$

also ${}^t\tilde{K}(x) \in M(1 \times 2, \mathbb{R})$. $\varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) = \varphi^{-1}(U) \cap T$ ist offen, da U und T offen sind und φ stetig ist ist, und

$$A \subset \varphi^{-1}(U \cap \varphi(T)) \quad \text{wegen} \quad \varphi(A) \subset \varphi(T) \quad \text{und} \quad \varphi(A) \subset U \quad .$$

$\tilde{K}$ ist also definiert auf einer offenen Menge im $\mathbb{R}^2$, die A enthält, und $\tilde{K}$ ist stetig differenzierbar nach der Ketten- und Produktregel, da K, φ und $D\varphi$ (!) stetig differenzierbar sind. Auf das Vektorfeld $\tilde{K}$ und die zulässige kompakte Menge A können wir den Satz 55.2.19 bzw. 55.2.15, also den Satz von Green im $\mathbb{R}^2$, anwenden: Es gilt

$$(2) \qquad \int\limits_{\partial A} < \tilde{K}(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad = \quad \int\limits_{A} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{K}_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{K}_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

2) Sei $\partial A = \alpha \,:\, [a;b] \;\longrightarrow\; A$, dann ist

$$\partial B \quad = \quad \varphi \circ \alpha \,:\, [a;b] \;\longrightarrow\; B \quad , \quad \text{und es gilt}$$

$$\int\limits_{\varphi\circ\alpha} < K(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad = \quad \int\limits_a^b < K(\varphi(\alpha(t))), (\varphi \circ \alpha)'(t) > \mathrm{d}t$$

$$= \int\limits_a^b \underbrace{{}^tK(\varphi(\alpha(t)))}_{\in M(1 \times 3, \mathbb{R})} \cdot \underbrace{(\varphi \circ \alpha)'(t)}_{\in M(3 \times 1, \mathbb{R})} \mathrm{d}t \quad , \quad \text{und nach der Kettenregel :}$$

$$= \int\limits_a^b \underbrace{{}^tK(\varphi(\alpha(t)))}_{\substack{| \\ \in M(1 \times 3, \mathbb{R})}} \cdot (\underbrace{(D\varphi)(\alpha(t))}_{\substack{| \\ \in M(3 \times 2, \mathbb{R})}} \cdot \underbrace{\alpha'(t)}_{\substack{| \\ \in M(2 \times 1, \mathbb{R})}}) \mathrm{d}t$$

Aus der Assoziativität des Matrizenprodukts und der Definition (1) von $\tilde{K}$ erhalten wir

$$\int\limits_{\varphi\circ\alpha} < K(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad = \quad \int\limits_a^b < \tilde{K}(\alpha(t)), \alpha'(t) > \mathrm{d}t \quad = \quad \int\limits_{\alpha} < \tilde{K}(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad ,$$

$$\int\limits_{\partial B} < K(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad = \quad \int\limits_{\partial A} < \tilde{K}(s), \mathrm{d}\vec{s} > \quad .$$

3) Wir formen nun die rechte Seite von (2) um: Für $x = {}^t(x_1, x_2)$ und

$$J \quad := \quad \int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, \tilde{K}_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2}\, \tilde{K}_1(x) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

gilt nach der Definition (1) von $\tilde{K}$ für die $j-$te Komponente von $\tilde{K}$, $j = 1, 2:$

$$\tilde{K}_j(x) \quad = \quad {}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet j}(x) \quad , \quad \text{also}$$

$$J \quad = \quad \int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left({}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet 2}(x)\right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left({}^tK(\varphi(x)) \cdot \varphi_{\bullet 1}(x)\right) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \int\limits_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{k=1}^3 K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{k=1}^3 K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_1} \right) \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

Wenden wir Ketten- und Produktregel an auf das für $u = {}^t(u_1, u_2, u_3) \in B \subset \mathbb{R}^3$ definierte $K(u)$, so folgt

$$\begin{aligned} J \quad = \quad \int\limits_A \sum_{k=1}^3 \Bigg[& \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_2} \\ & - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} K_k(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_1} \\ & + K_k(\varphi(x)) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \Bigg] \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad . \end{aligned}$$

Da φ zweimal stetig differenzierbar ist, ist für $k \in \underline{3}$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad = \quad \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \quad .$$

Mit den Vektoren

$$b := K(\varphi(x)) \quad , \quad c := \varphi_{\bullet 1}(x) \quad , \quad d := \varphi_{\bullet 2}(x) \in \mathbb{R}^3$$

und dem vektoriellen Differentialoperator

$$a := \nabla = {}^t\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \quad \text{gilt also}$$

$$J \quad = \quad \sum_{j,k=1}^3 a_j b_k (c_j d_k - d_j c_k) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

Wenn man hier berücksichtigt, dass die a_j keine Skalare, sondern Differentialoperatoren sind, die nur auf die nachfolgenden b_k anzuwenden sind (also nicht mit diesen vertauscht werden dürfen), kann man weiterrechnen:

$$\begin{aligned} J \quad &= \quad \int\limits_A \left(\sum_{j,k=1}^3 c_j a_j b_k d_k - \sum_{j,k=1}^3 d_j a_j b_k c_k \right) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\ &= \quad \int\limits_A (< c, a >< b, d > - < d, a >< b, c >) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

und mit der Vektorproduktregel 21.5.7 folgt

$$J \quad = \quad \int\limits_A < a \times b, c \times d > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$= \quad \int\limits_A < \nabla \times K(\varphi(x)), \varphi_{\bullet 1}(x) \times \varphi_{\bullet 2}(x) > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad .$$

Hier ist $\nabla \times K(\varphi(x))$ die Rotation von K an der Stelle $\varphi(x)$, also

$$J \quad = \quad \int\limits_A < \operatorname{rot} K(\varphi(x)), \varphi_{\bullet 1}(x) \times \varphi_{\bullet 2}(x) > \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \quad ,$$

$$(4) \qquad J \quad = \quad \int\limits_B < \operatorname{rot} K(y), \nu(y) > \mathrm{d}S(y) \quad .$$

Setzt man (3) und (4) in (2) ein, so erhält man die Behauptung. □

§60 Integration von Differentialformen

60.2. Integration über Untermannigfaltigkeiten

Definition 60.2.3 : b) Es gebe nun **endlich viele** Karten

$$\varphi_j \, : \, T_j \overset{\sim}{\longrightarrow} V_j \, = \, \varphi_j(T_j) \subset M \, , \, j \in \underline{m} \, , \quad \text{mit}$$

$$A \subset \bigcup_{j \in \underline{m}} V_j \quad , \quad \text{so dass} \quad \mathfrak{A} \cup \{ \; \varphi_j \; | \; j \in \underline{m} \; \} \quad \text{orientiert ist,}$$

mit einer der Überdeckung $(V_j)_{j \in \underline{m}}$ untergeordneten **lokal-integrierbaren** Teilung der Eins, d.h. mit Funktionen

$$\alpha_j \, : \, \bigcup_{l \in \underline{m}} V_l \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für} \quad j \in \underline{m}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\quad 0 \le \alpha_j \le 1 \quad$ und $\quad \alpha_j \Big|_{\bigcup\limits_{l \in \underline{m}} V_l \setminus V_j} = 0$

(ii) $\quad \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j(x) \, = \, 1 \quad$ für alle $\quad x \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} V_j$

(iii) Die Funktionen $t \longmapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$ sind lokal-integrierbar über T_j .

Wenn man nicht, wie in Forster, Analysis 3 , S.239 , auch noch fordert, dass die α_j stetig sind, kann man eine solche Familie von Karten sofort angeben:

$(*)$ Sei $(V_j)_{j \in \underline{m}}$ eine Überdeckung von A mit offenen, beschränkten V_j . Man nehme

$$\alpha_j := 1_{W_j}\,,\; W_j := V_j \setminus \left(\bigcup_{l<j} V_l \right) \quad \text{für} \quad j \in \underline{m} \quad .$$

Wir setzen in jedem Fall

$$A_j \quad := \quad A \cap \{\ x \in \bigcup_{l=1}^{m} V_l \ \mid \ \alpha_j(x) \neq 0\ \} \subset V_j$$

und nennen die $k-$Form ω **integrierbar** über A , falls ω über alle A_j (im Sinne von a)) integrierbar ist, und wir setzen dann

$$(1) \int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega \quad := \quad \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_{\mathrm{j}}^{-1}(\mathrm{A_j})} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega) \quad .$$

$(*)$ Wählt man die lokal-integrierbare Teilung der Eins wie unter $(*)$ angegeben, so sieht man, dass hier das herauskommt, was man erwartet: Es ist in diesem Fall

$$\bigcup_{j=1}^{m} V_j = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} W_j}_{\text{disjunkt}} \quad , \quad \text{also} \quad A_j = A \cap W_j \quad \text{und} \quad A = \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} A_j}_{\text{disjunkt}} \quad ,$$

$$(2) \int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\varphi_j^{-1}(A_j)} \varphi_j^* \omega \quad ,$$

wegen $\alpha_j(x) = 1$ für $x \in W_j$. Mit dieser Formel (2) und dieser Wahl der α_j kann man $\int\limits_{(\mathrm{A},\mathfrak{A})} \omega$ auch im Fall mehrerer Karten leicht ausrechnen (leichter als mit Formel(1)). Man müsste noch zeigen, dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig ist von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins. □

60.3. Integration über Hyperflächen

Satz 60.3.8 : Sei U offen im $\mathbb{R}^3\,, M \subset U$ eine parametrisierte Fläche, also eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit nur einer Karte

$$\varphi \;:\; T \overset{\sim}{\longrightarrow} \varphi(T) = M \quad , \quad T \ \text{ offen im } \ \mathbb{R}^2 \quad . \quad \text{Sei}$$

$$f = (f_1, f_2, f_3) \;:\; U \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^3 \quad \text{ein stetiges Vektorfeld.}$$

Sei $K \subset M$ kompakt. Dann gilt

$$\int\limits_K < f, \mathrm{d}\vec{S} > \quad = \quad \int\limits_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad , \quad \text{wobei für} \quad t \in T$$

$$\nu(\varphi(t)) \quad := \quad \frac{\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)}{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||} \quad \text{ist.}$$

Beweis : Es ist

$$\int_K < f, \mathrm{d}\vec{S} > \;=\; \int_K f_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \int_K f_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \int_K f_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 \mathrm{d}\varphi_2 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 - \varphi^* f_2 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_3 + \varphi^* f_3 \mathrm{d}\varphi_1 \wedge \mathrm{d}\varphi_2)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right) + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) \right) \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right\rangle \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} < \varphi^* f(t), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 \quad .$$

Rechts steht nun das in 60.1.1 definierte Integral einer 2-Form über eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$\int_K < f, \mathrm{d}\vec{S} > \;=\; \int_{\varphi^{-1}(K)} < \varphi^* f(t), \varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t) > \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(K)} < f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) > \underbrace{||\varphi_{\bullet 1}(t) \times \varphi_{\bullet 2}(t)||\mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2}_{= \mathrm{d}S(x) \quad \text{nach 54.2.9 b)}}$$

$$\overset{54.2.7}{=} \int_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad .$$

□

Definition 60.3.9 : In Definition 54.2.7 hatten wir allgemein

$$\int_K g(x) \mathrm{d}S(x)$$

für eine Funktion $g : \; K \longrightarrow \mathbb{R}$, K eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, definiert. Für ein Vektorfeld

$$f = (f_1, f_2, f_3) : \; K \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{nennt man}$$

$$\int_K < f(x), \nu(x) > \mathrm{d}S(x) \quad ,$$

wobei ν wie in 60.3.8 definiert ist, den **Fluss des Vektorfelds f durch die Fläche K**. □

§62 Die Wellengleichung

62.1 Allgemeines über partielle Differentialgleichungen

In den folgenden drei Paragraphen beschäftigen wir uns mit partiellen DGln, allerdings nicht ganz allgemein. Wir sind bescheiden und betrachten hier nur **lineare** partielle DGln **2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten**, und auch dabei nur einige physikalisch wichtige Beispiele. Das schließt natürlich nicht aus, dass Sie sich etwas umfassender informieren wollen bzw. müssen, wenn Sie ein Problem aus der Physik haben. Eine Liste empfehlenswerter Bücher finden Sie nach §64.

Was wir hier machen, steht (ausführlicher) als Kap.I "Beispiele" im Buch G.Hellwig : Partielle Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart 1960, und wir benutzen das Skript, das mein Kollege Rolf Berndt nach diesem Buch ausgearbeitet hat. Zunächst einige allgemeine Definitionen:

Definition 62.1.1 : Seien

$$G \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad U \subset \mathbb{R}^{2n+1+n^2}$$

Gebiete, d.h. offene, wegezusammenhängende Teilmengen. Sei

$$F : U \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{stetig.}$$

Dann heißt eine zweimal partiell differenzierbare Funktion

$$u : G \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto u(x)$$

eine **Lösung** der **partiellen DGl 2. Ordnung**

$$(*) \quad F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \ldots, u_{x_nx_n}) = 0 \quad ,$$

wobei wir zur Abkürzung

$$u_{x_j} := \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad , \quad u_{x_jx_k} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$$

geschrieben haben, wenn gilt

(i) $(x_1, \ldots, x_n, u(x), u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_nx_n}(x)) \in U$ für $x \in G$,

(ii) $F(x_1, \ldots, x_n, u(x), u_{x_1}(x), \ldots, u_{x_nx_n}(x)) = 0$ für alle $x \in G$.

(62.1.2) Beispiele , die uns im Folgenden beschäftigen werden, sind:

1.) Die $n-$dimensionale Potentialgleichung

$$\Delta_n u := u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0 \quad .$$

2.) Die $m-$dimensionale Wellengleichung

$$\Delta_m u = c_1^2 u_{tt} \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad ,$$

wobei das n aus Definition 62.1.1 gleich $m+1$ ist und $t := x_n$ gesetzt ist.

3.) Die $m-$dimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_m u = c_2 u_t \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{C} \quad .$$

4.) Die $m-$dimensionale Telegrafengleichung

$$\delta_m u = c_1 u_{tt} + c_2 u_t \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad , \quad c_2 \neq 0 \quad .$$

(62.1.3) Typeneinteilung : Ein Spezialfall der allgemeinen DGl 2.Ordnung $(*)$ ist

$$(*') \quad A(u) + h = 0 \quad \text{mit} \quad A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{jk}\, u_{x_j x_k} \,.$$

Diese Gleichung heißt

i) quasilinear, falls a_{jk} und h Funktionen in den $2n{+}1$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, u$, $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$ sind;

ii) fastlinear, falls die a_{jk} Funktionen allein von x sind und h eine Funktion wie unter i) ist;

iii) linear, falls $h = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j u_{x_j} + a\,u + f$ ist und die a_{jk}, die a_j, a und f Funktionen von x allein sind und

iv) linear mit konstanten Koeffizienten, falls die a_{jk}, die a_j, a und f überdies konstant sind.

Nur dieser letzte einfachste Fall soll im folgenden behandelt werden.
Wenn nur Lösungen $u \in \mathcal{C}^2(G)$ gesucht werden, für die dann also

$$u_{x_j x_k} = u_{x_k x_j}$$

für alle $j,\, k \in \underline{n}$ gilt, kann man in $A(u)$ so zusammenfassen , dass $a_{jk} = a_{kj}$ ist, dass also die Matrix

$$A = (a_{jk})$$

symmetrisch ist. Über symmetrische Matrizen wissen wir aus Folgerung 22.4.8: Es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so dass

$$S \cdot A \cdot {}^t S \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist, dass also SA^tS Diagonalform hat. Dabei ist S nicht eindeutig bestimmt, auch die λ_j sind es nicht, aber nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz sind die Zahlen

$k \;=\;$ Anzahl der $j \in \underline{n}$ mit $\lambda_j > 0$,

$t \;=\;$ Anzahl der $j \in \underline{n}$ mit $\lambda_j < 0$, der **Trägheitsindex** von A , und

$d \;=\;$ Anzahl der $j \in \underline{n}$ mit $\lambda_j = 0$, der **Defekt** von A ,

eindeutig bestimmt. Man kann das zur Klassifikation der DGln

$$A(u) \;=\; -h \quad \text{mit} \quad A(u) \;=\; \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k}$$

benutzen: Führt man

$$\tilde{x} \quad := \quad S \cdot x$$

als neue Variable ein, so erhält man für die Funktion

$$\widetilde{u}(\widetilde{x_1},\ldots,\widetilde{x_n}) \quad := \quad u(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{nach der Kettenregel :}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{x_j}} \cdot \frac{\partial \widetilde{x_j}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}\widetilde{u}_{\widetilde{x_j}} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = \sum_{j,l=1}^{n} s_{ji}s_{lk}\widetilde{u}_{\widetilde{x_j}\widetilde{x_l}} \quad ,$$

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j,l=1}^{n} s_{ji}s_{lk}\widetilde{u}_{\widetilde{x_j}\widetilde{x_l}} = \sum_{j,l=1}^{n} \left(\sum_{i,k=1}^{n} s_{ji}a_{ik}s_{lk} \right) \widetilde{u}_{\widetilde{x_j}\widetilde{x_l}}$$

$$= \sum_{j,l=1}^{n} d_{jl}\widetilde{u}_{\widetilde{x_j}\widetilde{x_l}} \quad \text{mit} \quad D \quad := \quad S \cdot A \cdot^{t} S \quad .$$

Statt $(*')$ erhält man die DGl

$$(*'') \quad B(\widetilde{u}) \quad = \quad -\tilde{h}(\widetilde{u}) \quad \text{mit} \quad \tilde{B}(\widetilde{u}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \widetilde{u}_{\widetilde{x_j}\widetilde{x_j}} \quad ,$$

also eine DGl, in der keine “gemischten” Ableitungen $\widetilde{u}_{\widetilde{x_i}\widetilde{x_k}}$, $i \neq k$, auftauchen. Da die Anzahlen t und d der Eigenwerte λ_j , die negativ bzw. 0 sind, eindeutig festgelegt sind, kann man aus der Form $(*'')$ - aber nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz auch schon aus der Matrix A aus $(*')$ - ablesen, zu welchem der folgenden Typen die DGl gehört: Die DGl heißt vom

elliptischen Typ, falls $d = 0$ und $t = 0$ oder $d = 0$ und $t = n$ ist,

hyperbolischen Typ, falls $d = 0$ und $t = 1$ oder $d = 0$ und $t = n - 1$ ist,

parabolischen Typ, falls $d > 0$ ist,

ultrahyperbolischen Typ, falls $d = 0$ und $1 < t < n - 1$ ist.

Demnach ist die Potentialgleichung vom elliptischen, die Wellengleichung vom hyperbolischen und die Wärmeleitungsgleichung vom parabolischen Typ.

(62.1.4) Existenz und Eindeutigkeit : Wir wissen schon aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen , dass es zu einer gegebenen Differentialgleichung sehr viele verschiedene Lösungen geben kann. Um eine eindeutige Lösung zu haben, muss man bei einer gewöhnlichen DGl $n-$ter Ordnung eine
Anfangsbedingung vorschreiben, etwa

$$u(x_0) \quad , \quad u'(x_0) \quad \text{bei} \quad n = 2 \quad , \quad \text{oder eine}$$

Randbedingung ; bei $n = 2$ etwa

$$u(x_0) \quad \text{und} \quad u(x_1) \quad \text{für} \quad x_0 \neq x_1 \quad .$$

Man wird auch bei partiellen Differentialgleichungen nur solche Probleme behandeln, bei denen folgende Forderungen erfüllt sind:

(1.) Eindeutigkeitsforderung : Es gibt höchstens eine Lösung u, die alle gestellten Bedingungen erfüllt.

(2.) Existenzforderung : Es gibt mindestens eine solche Lösung.

In der Physik kann man die Anfangs- und Randwerte durch Messungen nie ganz genau bestimmen. Man hofft aber, dass sich Messfehler “nicht allzu sehr” auswirken, das ist die
(3.) Forderung der “stetigen Abhängigkeit von den Parametern” : Wird etwa die Bedingung gestellt, dass die Lösungsfunktion u auf dem Rand $\mathrm{Rd}\, G$ des Gebietes G einen bestimmten Werteverlauf hat, so wird gefordert, dass sich die Lösungsfunktion nur wenig ändert, wenn sich die Randwerte wenig Ändern, also u stetig von den Randwerten abhängt. Dies wird später im einzelnen noch zu präzisieren sein.

62.2 Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$

Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ hat die Form

$$u_{xx} - c^2\, u_{\tilde t \tilde t} = 0 \quad .$$

Führt man statt $\tilde t$ die neue Variable $t := c\tilde t$ ein, so erhält man

$$u_{xx} - u_{tt} \quad = \quad 0 \quad .$$

oder

$$v_{\bar x \bar t} = 0\,,$$

wobei $\bar x = x + t$, $\bar t = x - t$, also $x = \frac{\bar x + \bar t}{2}$, $t = \frac{\bar x - \bar t}{2}$ und

$$v(\bar x, \bar t) := u\Big(\frac{\bar x + \bar t}{2}, \frac{\bar x - \bar t}{2}\Big)$$

gesetzt wird. Denn dann gilt

$$\begin{aligned}
u_x &= v_{\bar x}\, \bar x_x + v_{\bar t}\, \bar t_x = v_{\bar x} + v_{\bar t} \\
u_t &= v_{\bar x}\, \bar x_t + v_{\bar t}\, \bar t_t = v_{\bar x} - v_{\bar t} \\
u_{xx} &= v_{\bar x \bar x}\, \bar x_x + v_{\bar x \bar t}\, \bar t_x + v_{\bar t \bar x}\, \bar x_x + v_{\bar t \bar t}\, \bar t_x = v_{\bar x, \bar x} + 2\, v_{\bar x \bar t} + v_{\bar t \bar t} \\
u_{tt} &= v_{\bar x \bar x}\, \bar x_t + v_{\bar x \bar t}\, \bar t_t - v_{\bar t \bar x}\, \bar x_t - v_{\bar t \bar t}\, \bar t_t = v_{\bar x, \bar x} + v_{\bar t \bar t}
\end{aligned}$$

und daher

$$0 = u_{xx} - u_{tt} = 2 v_{\bar x \bar t}\,.$$

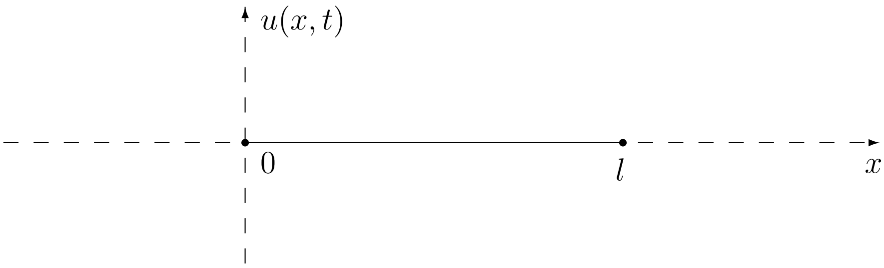
Daraus sieht man: $v_{\bar x}$ hängt nicht von $\bar t$ ab, also

$$v_{\bar x} \quad = \quad c_1(\bar x) \quad \text{und damit}$$

$$v \quad = \quad w_1(\bar x) + w_2(\bar t) \quad , \quad \text{also}$$

$$u(x,t) = w_1(\bar x) + w_2(\bar t) = w_1(x+t) + w_2(x-t)$$

mit willkürlichen Funktionen $w_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Dabei beschreibt w_2 eine "nach rechts mit der Geschwindigkeit 1 fortschreitende unverzerrte Welle", w_1 entsprechend eine nach links laufende Welle. Man kommt zu geeigneten Anfangs- und Randbedingungen, wenn man weiß, dass die Wellengleichung auch die Bewegung einer schwingenden Saite beschreibt: In Ruhelage füllt die Saite das Intervall $[0; t]$ auf der $x-$Achse aus:



Wird die Saite ausgelenkt und zur Zeit $t = 0$ losgelassen, und ihr noch eine geeignete Geschwindigkeit erteilt, so wird sie Schwingungen ausführen, die es zu bestimmen gilt: Bezeichnet $u(x,t)$ die Verschiebung des Saitenpunktes an der Stelle x zur Zeit t, so genügt u der Wellengleichung

(1) $\quad u_{xx} - u_{tt} \quad = \quad 0$

mit den Anfangsbedingungen

(2) $\quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad$ für $\quad x \in [0; l]$

mit willkürlich vorzuschreibenden Funktionen u_0 , u_1 , und den Randbedingungen

(3) $\quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad$ für $\quad t \in [0; \infty)$.

Die Forderung (3.) der stetigen Abhängigkeit von den Parametern lässt sich dann hier folgendermaßen ausformulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede weitere Lösung v der Wellengleichung (1), die noch

(4) $\quad v(0,t) \quad = \quad v(l,t) \quad = \quad 0$

erfüllt, und für deren Anfangswerte v_j gilt

$$|v_j(x) - u_j(x)| < \delta, \quad j = 0,1 \quad \text{folgt:}$$

$$|v(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in [0; l] \quad \text{und} \quad t \geq 0 \quad .$$

Wie sehen nun die Lösungen von (1) mit (2) und (3) konkret aus ?
Für den Idealfall der unendlich langen Saite entfällt die Randbedingung und hier gilt für das Anfangsproblem der

<u>Satz 62.2.2 :</u> Seien $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vorgegeben. Dann ist durch

$$u(x,t) = M(t)\, u_1 + \frac{\partial}{\partial t}\Big(M(t)\, u_0\Big)$$

mit

$$M(t)\, u_i(x) := \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} u_i(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ definiert, für die für alle x, $t \in \mathbb{R}$

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x)$$

gilt und dann die Forderungen (1.) - (3.) aus (62.1.4) .

Beweis : Der allgemeine Lösungsansatz

$$(*) \quad u(x,t) := w_1(x+t) + w_2(x-t)$$

bedeutet für $t = 0$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= w_1(x) + w_2(x) = u_0(x); \\ u_t(x,0) &= w_1'(x) - w_2'(x) = u_1(x). \end{aligned}$$

Integrieren wir die letzte Gleichung bezüglich x, so erhalten wir

$$w_1(x) - w_2(x) = \int_c^x u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

und damit durch Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned} 2w_1(x) &= u_0(x) + \int_c^x u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ 2w_2(x) &= u_0(x) - \int_c^x u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} (**) \;\; u(x,t) &= w_1(x+t) + w_2(x-t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+t) + u_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(M(t)\,u_0\Big) + M(t)\,u_1\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Existenzforderung (2.) bewiesen, aber auch die Eindeutigkeitsforderung (1.), denn die Differenz zweier Lösungen , die die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, ist eine Lösung der DGl, die die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = u_1(x) = 0$$

erfüllt, die nach $(**)$ also gleich Null ist. Auch die Forderung (3.) ist erfüllt, denn wird u_i im Intervall $[a;b]$ mit $b - a = L$ abgeändert zu

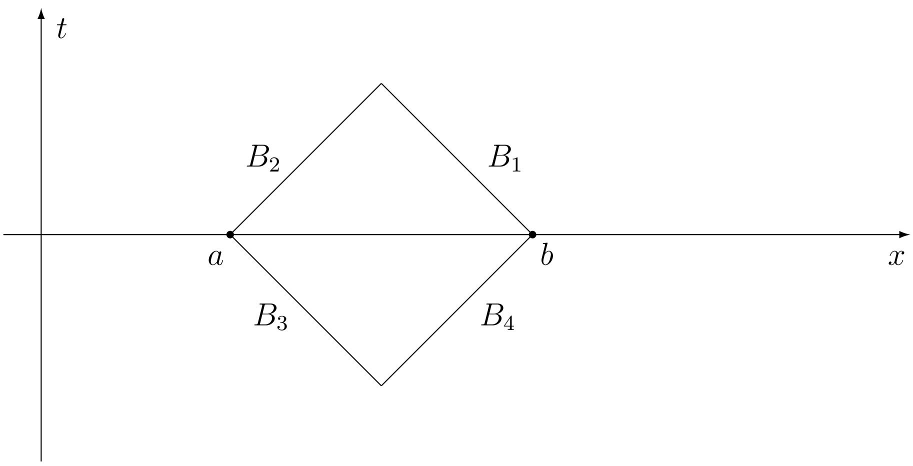
$$\bar{u}_j(x) - u_j(x) =: v_j(x) \quad \text{mit} \quad |v_j(x)| < \frac{\varepsilon}{1+L}$$

für $j = 1,\,2$, so folgt aus $(**)$:

$$\begin{aligned} |\bar{u}(x,t) - u(x,t)| &= \Big|\frac{1}{2}\Big(v_0(x+t) + v_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} v_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\Big| \\ &< \frac{1}{2}\Big(\frac{\varepsilon}{1+L} + \frac{\varepsilon}{1+L} + 2\,t\,\frac{\varepsilon}{1+L}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{1+L}\,(2 + 2\,L) = \varepsilon\,. \qquad \square \end{aligned}$$

An diesem Beispiel kann sehr gut die folgende Begriffsbildung vorgestellt werden, die dann in der allgemeinen Theorie eine wesentliche Rolle spielt, nämlich das

(62.2.3) Abhängigkeits- und Bestimmtheitsgebiet (1-dim. Fall)
Die Formel $(**)$ für die Lösung der Wellengleichung zeigt, dass u in einem speziellen Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ nicht vom Gesamtverlauf der Anfangswerte $u_j(x)$ abhängt, sondern nur von den Werten $u_j(x)$ mit $x \in [x_0 - t_0; x_0 + t_0]$. Dieses Intervall wird dann **Abhängigkeitsgebiet** $\bar{A}(x_0, t_0)$ genannt. Ändert man $u_j(x)$ außerhalb $\bar{A}(x_0, t_0)$ ab, so bleibt u im Punkt (x_0, t_0) unbeeinflusst. Wird andererseits auf der x-Achse ein Intervall $I = [a; b]$ fixiert, dann heißt die Menge $\bar{B}(I)$ der Punkte (x, t), in denen die Lösung $u(x, t)$ allein auf Grund der Kenntnis der Anfangswerte $u_j(x)$ in I ermittelt werden kann, das **Bestimmtheitsgebiet** von I.



Aus $(**)$ liest man ab, dass $\bar{B}(I)$ ein abgeschlossenes Quadrat ist.

(62.2.3) Saiten endlicher Länge : Wir untersuchen nun den Fall, dass die Saite eine endliche Länge hat, dann kommen zu den Anfangs- auch noch Randbedingungen: Wir haben das **Anfangs-Randwertproblem :**
Gesucht sind Lösungen u von

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad \text{mit}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{für} \quad x \in [0; l] \quad \text{und}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0 \quad .$$

Das Problem wird durch den Satz 62.2.2 mit erledigt, wenn sich u_0 vom Intervall $[0; l]$ zu einer Funktion $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und u_1 zu einer Funktion $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ fortsetzen lassen.

Das macht man so: Es seien $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit

$$u_j(0) = u_0''(0) = u_j(l) = u_0''(l) = 0$$

für $j = 0, 1$. Es werden dann die Funktionen u_j als ungerade periodische Funktionen mit der Periode $2\,l$ fortgesetzt, indem man definiert :

$$u_j(x) = -u_j(-x) \quad \text{für} \quad x \in [-l; 0) \quad ,$$

$$u_j(x + 2l) \quad := \quad u_j(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \quad ,$$

für $j = 0, 1$. Mit den so definierten Funktionen $u_0 = u_1$ berechnet man $u(x,t)$ mit Hilfe von Satz 62.2.2 . Dann ist natürlich die Anfangsbedingung erfüllt , aber auch die Randbedingung. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
2\,u(0,t) &= u_0(t) + u_0(-t) + \int\limits_0^t u_1(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-t}^0 u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int\limits_0^t (u_1(\tau) + u_1(-\tau))\,\mathrm{d}\tau = 0\,; \\
2\,u(l,t) &= u_0(l+t) + u_0(l-t) + \int\limits_0^{l+t} u_1(\tau)\,d\tau + \int\limits_{l-t}^0 u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= u_0(l+t) - u_0(-l+t) + \int\limits_0^{l+t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_0^{-l+t} u_1(-\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,. \;\square
\end{aligned}$$

(62.2.4) Anderer Lösungsansatz (Bernoulli) : Wird u als Produkt einer allein von x und einer allein von t abhängigen Funktion angesetzt, also

$$u(x,t) = \alpha(x)\cdot\beta(t)\,,$$

so ergibt sich aus der Wellengleichung

$$u_{xx} = \alpha''(x)\cdot\beta(t) \quad \text{und} \quad u_{tt} = \alpha(x)\cdot\beta''(t)$$

oder

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}\,.$$

Da diese Gleichung für alle x und t gelten soll, muss es ein $c \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\beta''}{\beta} = c \quad , \quad \text{also} \quad \alpha'' = c\alpha \quad , \quad \beta'' = c\beta \quad ,$$

also $c = -\lambda^2 < 0$, damit die Lösungen beschränkt bleiben. Dann erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= A\,\cos(\lambda\,x + a) \\
\beta(t) &= B\,\cos(\lambda\,t + b)\,.
\end{aligned}$$

für gewisse Konstanten a, b, A, $B \in \mathbb{R}$. Aus der Randbedingung (mit $l = \pi$)

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t \geq 0$$

folgt

$$\alpha(0) = \alpha(\pi) = 0,$$

d.h. $a = \pm\frac{\pi}{2}$, $\lambda = n \in \mathbb{N}$. Fassen wir zusammen, so erhalten wir für jede natürliche Zahl n Lösungen der Form

$$\alpha_n(x) = A\,\sin(n\,x), \quad \beta_n(t) = B\sin(n\,t) + B'\cos(n\,t)\,.$$

Ein solches Produkt $u = \alpha_n \cdot \beta_n$ heißt **reine Schwingung**, und zwar für $n = 1$ Grundton, für $n = 2$ Oktave und für $n = 3$ Quinte. Da mit zwei Lösungen u dieser Art auch ihre Summe wieder eine Lösung ist, die die Randbedingung erfüllt, kann eine Anfangsbedingung auf folgende Weise berücksichtigt werden: Es seien

$$u_0 \in \mathcal{C}^2([0;\pi]) \quad \text{und} \quad u_1 \in \mathcal{C}^1([0;\pi])$$

mit $u_j(0) = u_j(\pi) = 0$ vorgegeben, die dann als ungerade 2π-periodische Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, die sogar zweimal (bzw. einmal) stetig differenzierbar sind. Sie lassen sich nach Folgerung 16.5.3 in gleichmäßig konvergente Fourierreihen entwickeln:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\,x) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

bzw.

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\,b_n)\sin(n\,x) \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{1}{n\,\pi}\int_0^{2\pi} u_1(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dies in die allgemeine Lösung eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(u_0(x-t) + u_0(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{(\sin(n(x-t)) + \sin(n(x+t)))}_{2\,\sin(nx)\,\cos(nt)} + \int_{x-t}^{x+t} n\,b_n \sin(n\,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \sin(nx)\,\cos(nt) - \frac{1}{2}\,b_n\,\cos(n\,\tau)\Big|_{\tau=x-t}^{\tau=x+t}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\Big(b_n\,\sin(nt) + a_n\,\cos(nt)\Big)\,,
\end{aligned}$$

also eine Reihe in der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\,\beta_n(t)$, mit Koeffizienten, die man aus der Anfangsbedingung berechnen kann.

62.3 Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

(62.3.1) Problem : Wir wollen für die DGl

$$\Delta_3 u - u_{tt} = 0$$

das Anfangswertproblem behandeln: Es werden also für $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ Lösungen u gesucht mit

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Für den Beweis des Hilfssatzes 62.2.3 brauchen wir:

(62.3.2) Ein Transformationssatz für Hyperflächenintegrale : Sei

$n \in \mathbb{N}\,,\ R \in \mathbb{R}_+^* \quad , \quad K_R \quad := \quad \{\, x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x|| \,=\, R \,\} \quad ,$

und $f \ : \ K_R \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ sei integrierbar. Dann gilt

$$\int\limits_{K_R} f(x)\ \mathrm{d}S(x) \quad = \quad R^{n-1} \cdot \int\limits_{K_1} f(R\xi)\ \mathrm{d}S(\xi) \quad .$$

Beweis : Man erhält das, indem man K_1 und K_R durch Polarkoordinaten parametrisiert, so wie im Beweis von Satz 54.2.12 . □

Den Satz 54.2.12 werden wir auch brauchen:

Hilfssatz 62.3.3 : Für $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$M(t)[\varphi](x) := \frac{1}{4\,\pi} \int\limits_{S_2} \varphi(x + t\,\xi)\,\mathrm{d}S(\xi) \quad ,$$

wobei $S_2 \,=\, \{\, \xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, ||\xi|| \,=\, 1 \,\}$ ist. Dann ist die durch

$$v \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad v(x,t) \quad := \quad t\,M(t)[\varphi](x)$$

definierte Funktion eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta_3\, v - v_{tt} = 0\,.$$

Beweis : Da $\Delta\, v \,-\, v_{tt}$ in t stetig ist, braucht die Behauptung nur für $t \neq 0$ bewiesen zu werden. Dabei kann überdies $t > 0$ angenommen werden, denn der Fall $t < 0$ kann durch die Substitution $\tau \,:=\, -t$ auf diesen Fall zurückgeführt werden.

Differenzieren wir v nach t, so erhalten wir

$$v_t(x,t) = M(t)[\varphi](x) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\,M(t)[\varphi](x) \quad \text{und}$$

$$(*) \quad v_{tt}(x,t) = 2\,\frac{\partial}{\partial t}\,M(t)[\varphi](x) + t\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,M(t)[\varphi](x)\,.$$

Da φ zweimal stetig differenzierbar ist, kann die Differentiation mit der Integration vertauscht werden und es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\,M(t)[\varphi](x) \quad = \quad \frac{1}{4\,\pi} \int\limits_{S_2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,(x + t\,\xi)\,\mathrm{d}S(\xi)$$

$$= \quad \frac{1}{4\,\pi} \int\limits_{S_2} \Big(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,(x + t\,\xi)\,\xi_i \Big)\,\mathrm{d}S(\xi) \quad .$$

Nun ist der nach außen gerichtete Normalenvektor auf S_2 im Punkt ξ gleich ξ , also ist

$$\xi \cdot \mathrm{d}S(\xi) \quad = \quad \mathrm{d}\vec{S}(\xi)$$

das vektorielle Flächenelement von S_2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) \quad = \quad \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_2} \langle \nabla_x \varphi(x + t\xi), d\vec{S}(\xi) \rangle$$

Mit der Transformation $y := t\xi$ wird daraus nach (62.3.2) :

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) \quad = \quad \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \int\limits_{\|y\|=t} \left\langle \nabla_x \varphi(x+y),\, \mathrm{d}\vec{S}(y) \right\rangle \quad ,$$

wobei hier "$||y|| = t$" kurz für die nach außen orientierte Fläche $K_t \subset \mathbb{R}^3$ steht. Nach dem Satz von Gauß ist das gleich

$$\ldots \quad = \quad \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \int\limits_{\|y\|\le t} \underbrace{\mathrm{div}\nabla_x}_{\Delta} \varphi(x+y)\,\mathrm{d}^3 y \quad ,$$

und wenn wir Satz 54.2.12 anwenden auf

$$f \;:\; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(y) \quad := \quad \begin{cases} \Delta\varphi(x+y) & \text{für} \quad ||y|| \le t \\ 0 & \text{für} \quad ||y|| > t \; : \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) \quad = \quad \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \int\limits_0^t \Big(\int\limits_{\|y\|=\tau} \Delta\varphi(x+y)\,\mathrm{d}S(y) \Big)\,\mathrm{d}\tau$$

und daraus folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t)[\varphi](x) = \frac{-1}{2\,\pi\,t^3} \int\limits_{\|y\|\le t} \Delta\varphi(x+y)\,\mathrm{d}^3 y + \frac{1}{4\,\pi\,t^2} \int\limits_{\|y\|=t} \Delta\varphi(x+y)\,\mathrm{d}S(y) \quad ,$$

also, in $(*)$ eingesetzt:

$$v_{tt} \quad = \quad \frac{1}{4\,\pi\,t} \int\limits_{\|y\|=t} \Delta\varphi(x+y)\,\mathrm{d}S(y)$$

$$\overset{(62.2.3)}{=} \quad \frac{t}{4\,\pi} \int\limits_{\|\xi\|=1} \Delta\varphi(x+t\xi)\,\mathrm{d}S(\xi) \quad .$$

Andererseits gilt, da wir die Differentiation nach den x_i mit der Integration über ξ vertauschen können:

$$\Delta v(x,t) = \frac{t}{4\,\pi} \int\limits_{\|\xi\|=1} \Delta\varphi(x+t\xi)\,\mathrm{d}S(\xi) \quad ,$$

insgesamt also $\Delta v(x,t) = v_{tt}(x,t)$. □

<u>Hilfssatz 62.3.4 :</u> Sei $u \;:\; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung $\Delta u - u_{tt} = 0$, $a \in \mathbb{R}^3$ ein fester Punkt und

$$\widetilde{M}(r)[u](t) \quad := \quad \frac{1}{4\pi} \int\limits_{||\xi||=1} u(a+r\xi,t)\;\mathrm{d}S(\xi) \quad .$$

Dann genügt die Funktion

$$v(r,t) := r \cdot \widetilde{M}(r)[u](t)$$

der eindimensionalen Wellengleichung

$$v_{rr} - v_{tt} = 0\,.$$

Beweis : Wie im Beweis des vorigen Hilfssatzes genügt es, den Fall $r > 0$ zu betrachten. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\,\widetilde{M}(r)[u](t) &= \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|\xi\|=1} \frac{\partial}{\partial r}\,u(a + r\,\xi, t)\,\mathrm{d}S(\xi)\\
&= \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|\xi\|=1} \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,(a + r\,\xi, t)\,\xi_i\Big)\,\mathrm{d}S(\xi)}_{\langle \nabla_x u(a+r\xi,t),\ \mathrm{d}\vec{S}(\xi)\rangle}
\end{aligned}$$

und mit der Transformation $x \;:=\; a + r\xi$ folgt nach (62.3.2) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\widetilde{M}(r)[u](t) &= \frac{1}{4\,\pi\,r^2}\int\limits_{\|x-a\|=r} \Big\langle \nabla_x u(x,t),\ \mathrm{d}\vec{S}(x)\Big\rangle\\
&\overset{\text{Satz von Gauß}}{=} \frac{1}{4\,\pi\,r^2}\int\limits_{\|x-a\|\le r} \Delta u(x,t)\,\mathrm{d}^3x\\
&\overset{54.2.12}{=} \frac{1}{4\,\pi\,r^2}\int\limits_{0}^{r}\Big(\int\limits_{\|x-a\|=\zeta} \Delta u(x,t)\,\mathrm{d}S(x)\Big)d\zeta
\end{aligned}$$

und daraus weiter

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\,\widetilde{M}(r)[u](t)\Big) = \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|x-a\|=r} \Delta u(x,t)\,\mathrm{d}S(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|x-a\|=r} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\,\mathrm{d}S(x) \qquad (\text{wegen} \quad \Delta u \;=\; u_{tt}\,)\\
&\overset{(62.3.2)}{=} \frac{r^2}{4\,\pi}\int\limits_{\|\xi\|=1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(a + r\xi, t)\,\mathrm{d}S(\xi)\,, \quad \text{also}
\end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\,\widetilde{M}(r)[u](t)\Big) \;=\; r^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\widetilde{M}(r)[u](t)\Big)\,.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(r,t) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(r\,\widetilde{M}(r)[u](t)\Big)\\
&= 2\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\widetilde{M}(r)[u](t)\Big) + r\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(\widetilde{M}(r)[u](t)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r,t) &\overset{\text{Produktregel}}{=} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\widetilde{M}(r)[u](t)\Big) \\
&\overset{(*)}{=} r\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\widetilde{M}(r)[u](t)\Big) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(r,t)\,.
\end{aligned}$$

□

Mit diesen Hilfsmitteln beweisen wir nun den

Satz 62.3.5 : Seien $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$u : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \quad \text{mit}$$

$$\Delta_3\, u - u_{tt} = 0 \quad \text{und}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$, nämlich

$$u(x,t) := t\, M(t)[u_1](x) + \frac{\partial}{\partial t}(t\, M(t)[u_0](x)) \quad .$$

Diese Lösung erfüllt auch die anfangs genannte Forderung (3.).

Beweis : i) Nach Hilfssatz 62.3.3 erfüllen die Funktionen

$$v_j(x,t) \quad := \quad tM(t)[u_j](x) \quad \text{für} \quad j \ = \ 0,1$$

die Wellengleichung. Dabei ist v_0 dreimal stetig differenzierbar, und aus

$$\Delta v_0 + v_{0_{tt}} = 0$$

folgt durch Differentiation nach t :

$$\Delta v_{0_t} + v_{0_{ttt}} = 0\,;$$

also löst auch v_{0_t} und damit $u = v_1 + v_{0_t}$ die Wellengleichung.
ii) u erfüllt die Anfangsbedingungen, denn es ist nach Definition

$$v_1(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1(x,t) = M(t)[u_1](x) + t\,\frac{\partial}{\partial t} M(t)[u_1](x)\,, \text{ also}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1(x,0) = M(0)[u_1](x) = \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{||\xi||=1} u_1(x)\,\mathrm{d}S(\xi)$$

$$= \quad u_1(x)\cdot \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int\limits_{||\xi||=1} \mathrm{d}S(\xi)}_{=\ \text{Oberfläche der Einheitskugel}\ =\ 4\pi} \quad = \quad u_1(x)\,.$$

Damit kennen wir den ersten Summanden von $u \ = \ v_1 + v_{0_t}$ und dessen Ableitung bei $t \ = \ 0$. Nun zum 2.Summanden

$$v_2 := \frac{\partial}{\partial t} v_0 \quad : \quad \text{Es ist}$$

$$v_2(x,t) \quad = \quad M(t)[u_0](x) + t\frac{\partial}{\partial t}M(t)[u_0](x) \quad , \qquad \text{also}$$

$$v_2(x,0) \quad = \quad M(0)[u_0](x) \quad = \quad u_0(x) \quad (\text{ wie oben für } u_1) \quad ,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}(x,t) \quad = \quad 2\frac{\partial}{\partial t}M(t)[u_0](x) + \underbrace{t\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(t)[u_0](x)}_{= \, 0 \ \text{ für } \ t \, = \, 0}$$

Wie am Anfang des Beweises von Hilfssatz 62.3.3 vorgerechnet, ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\,M(t)[u_0](x) = \frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|\xi\|=1}\langle\nabla_x u_0(x+t\xi),\, \mathrm{d}\vec{S}(\xi)\rangle\,.$$

Für $t = 0$ ergibt das

$$\frac{1}{4\,\pi}\int\limits_{\|\xi\|=1}\langle\underbrace{\nabla_x u_0(x)}_{=:\,\vec{a}},\, \mathrm{d}\vec{S}(\xi)\rangle \quad = \quad 0$$

wieder nach dem Satz von Gauß, da der Vektor $\vec{a}$ von der Integrationsvariablen ξ nicht abhängt, seine Divergenz also 0 ist. Also

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}\,(x,0) = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} u(x,0) \quad &= \quad v_1(x,0) + v_2(x,0) = u_0(x); \\ u_t(x,0) \quad &= \quad \frac{\partial v_1}{\partial t}\,(x,0) + \frac{\partial v_2}{\partial t}\,(x,0) = u_1(0)\,. \end{aligned}$$

iii) u ist eindeutig bestimmt. Hierfür genügt es zu zeigen, dass eine Lösung $u = u(x,t)$ der Wellengleichung, die die Gleichungen

$$u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$ erfüllt, identisch verschwinden muss, also $u(x,t) = 0$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ gilt. Um dies einzusehen, sei $v : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die in Hilfssatz 62.3.4 zu diesem u konstruierte Lösung

$$(**) \qquad\qquad v(r,t) \quad := \quad r\widetilde{M}(r)[u](t)$$

der eindimensionalen Wellengleichung. Dann gilt

$$v(r,0) \quad = \quad \frac{r}{4\pi}\int\limits_{||\xi||=1}\underbrace{u(a+r\xi,0)}_{0}\,\mathrm{d}S(\xi) \quad = \quad 0 \quad ,$$

$$v_t(r,t) \quad = \quad \frac{r}{4\pi}\int\limits_{||\xi||=1}u_t(a+r\xi,0)\,\mathrm{d}S(\xi) \quad = \quad 0$$

für alle $r \in \mathbb{R}$, und nach dem Eindeutigkeitssatz 62.2.2 für die eindimensionale Wellengleichung folgt daraus

$$\begin{aligned} v(r,t) &= 0 \quad \text{für alle } (r,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ und damit auch} \\ v_r(r,t) &= 0 \quad \text{für alle } (r,t) \in \mathbb{R}^2 . \end{aligned}$$

Also folgt aus $(**)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} v(0,t) = \widetilde{M}(0)[u](t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|\xi\|=1} u(a,t)\,\mathrm{d}S(\xi) = u(a,t)\,,$$

d.h. $u(a,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}^3$.
iv) u erfüllt auch die Forderung (3.) der stetigen Abhängigkeit von den Parametern; das wollen wir aber nicht zeigen. □

62.4 Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$

Das Anfangswertproblem ist auch hier eindeutig lösbar, weist aber einen bedeutungsvollen Unterschied zum dreidimensionalen Fall auf. Es gilt

Satz 62.4.1 : Seien $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dann gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

$$(x',t) \longmapsto u(x',t) \quad , \qquad \text{mit}$$

$$\Delta_2\, u - u_{tt} = 0 \quad \text{und}$$

$$u(x',0) = u_0(x'), \quad u_t(x',0) = u_1(x')$$

für alle $x' \in \mathbb{R}^2$, nämlich

$$u(x',t) = \overline{M}(t)[u_1](x') + \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{M}(t)[u_0](x')\right) ,$$

wobei

$$\overline{M}(t)[u_j](x') := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\|y'-x'\|\le|t|} \frac{u_i(y')}{\sqrt{t^2 - \|y'-x'\|^2}}\,\mathrm{d}^2 y' \quad \text{für} \quad j = 0,1.$$

Beweis : Die Behauptung wird auf Satz 62.3.5 zurückgeführt. Nimmt man dort an, dass die Anfangswertfunktionen u_i nur von x_1 und x_2 abhängen und nicht von x_3, so hängt auch die in Satz 62.3.5 angegebene Lösung

$$u(x,t) = tM(t)[u_1](x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)[u_0](x))$$

nur von x_1, x_2 und t ab und erfüllt dann wegen $u_{x_3x_3} = 0$ die zweidimensionale Wellengleichung. Wir rechnen $tM(t)[u_j](x)$ für diesen Fall aus:

$$tM(t)[u_j](x) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{\|\xi\|=1} u_j(x+t\xi)\,\mathrm{d}S(\xi)$$

und mit der Transformation $y \;:=\; x + t\xi$ nach (62.3.2) :

$$\ldots \quad = \quad \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{||y-x||=t} u_j(y)\,\mathrm{d}S(y) \quad .$$

Bei festem t und festem $x = (x_1, x_2, x_3) = (x', x_3)$ sind die Punkte

$$y = (y_1, y_2, x_3 \pm \sqrt{t^2 - \|y' - x'\|^2}) \quad \text{mit}$$

$$y' \quad := \quad (y_1, y_2) \quad \text{und} \quad ||y' - x'|| \le |t|$$

genau die Punkte $y \in \mathbb{R}^3$ mit $||y - x|| = |t|$. Betrachtet man davon zunächst die obere Halbkugel, also die $+\sqrt{}$, so ist

$$\varphi : \;\; \{\; y' \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; ||y' - x'|| \le |t| \;\} \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^3 \quad ,$$

$$\varphi(y_1, y_2) \quad := \quad (y_1, y_2, x_3 + \sqrt{t^2 - ||y' - x'||^2})$$

eine Parametrisierung der oberen Halbkugel, und das ergibt nach 54.2.9 b) das Flächenelement

$$\mathrm{d}S(y) \quad = \quad \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - ||y' - x'||^2}}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \quad ,$$

und wenn man noch berücksichtigt, dass u_j nur von y' , nicht von y_3, abhängt,

$$t\,M(t)[u_j](x) \quad = \quad \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{||y'-x'||\le|t|} \frac{t u_j(y')}{\sqrt{t^2 - ||y' - x'||^2}}\,\mathrm{d}^2 y'$$

$$+ \text{ Integral über die untere Halbkugel.}$$

Für die untere Halbkugel erhält man nochmal dasselbe, also

$$t\,M(t)[u_j](x) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{\|y'-x'\|\le|t|} \frac{u_j(y')}{\sqrt{t^2 - \|y' - x'\|^2}}\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \quad = \quad \overline{M}(t)[u_j](x')\,,$$

also die Behauptung. $\square$

62.5 Abhängigkeits- und Bestimmtheitsgebiete

(2- und 3-dimensionaler Fall)

(62.5.1) Für den **dreidimensionalen Fall** ist aus der Formel für die Lösung in einem Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

$$u(x_0, t_0) \;=\; \frac{t_0}{2\pi} \int\limits_{||\xi||=1} u_1(x_0{+}t_0\xi)\,\mathrm{d}S(\xi) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_{||\xi=1} u_0(x_0 + t\xi)\,\mathrm{d}S(\xi)\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

zu entnehmen, dass $u(x_0, t_0)$ nicht vom Gesamtverlauf der Anfangswerte u_i abhängt, sondern nur von den Werten von $u_1(x)$ auf der Oberfläche der

Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius $|t_0|$, also auf dem Abhängigkeitsgebiet

$$\overline{A}_3(x_0,t_0) \quad = \quad \{\ x \in \mathbb{R}^3 \ |\ ||x-x_0|| \,=\, |t_0|\ \} \quad ,$$

sowie von den Werten von u_0 in einer Umgebung dieser Menge.
Wird andererseits eine Kugel im $\mathbb{R}^3$

$$\overline{K} \quad = \quad \{\ x \in \mathbb{R}^3 \ |\ ||x-x_0|| \leq |t_0|\ \}$$

fixiert, so gilt für das Bestimmtheitsgebiet dieser Kugel, also für die Menge

$$\overline{B} \,=\, \overline{B}_3(\overline{K}) \,=\, \{\ (x,t)\ |\ u(x,t) \text{ durch } u_j\,(j=0,1) \text{ auf } \overline{K} \text{ bestimmt } \}$$

offenbar:

$$(x,t) \in \overline{B} \quad \Longleftrightarrow \quad x+\xi|t| \in \overline{K} \quad \text{für alle} \quad \xi \quad \text{mit} \quad ||\xi|| \,=\, 1$$
$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{||x+\xi|t|-x_0|| \leq |t_0|}_{(*)}$$

und überdies

$$\ldots \qquad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{||x-x_0|| \leq |t_0|-|t|}_{(**)} \quad ,$$

denn falls $x \neq x_0$ ist, kann für $\xi \,=\, (x-x_0)||x-x_0||^{-1}$ aus der Aussage $(*)$ geschlossen werden:

$$\left| x - \frac{x-x_0}{||x-x_0||}|t| - x_0 \right| = \left|\left| (x-x_0)\frac{||x-x_0||+|t|}{||x-x_0||} \right|\right| = ||x-x_0|| + |t| \leq |t_0|\,.$$

Andererseits kann für einen beliebigen Vektor ξ mit der Norm 1 aus der Aussage $(**)$ geschlossen werden:

$$|t_0| \geq ||x-x_0|| + |t| \,=\, ||x-x_0|| + ||\xi||\,|t| \geq ||x-x_0+\xi|t|\,|| \quad .$$

Das bedeutet also:

$$\overline{B}_3(\overline{K}) \quad = \quad \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \ |\ ||x-x_0|| \leq |t_0|-|t|]\ \}$$

ist ein abgeschlossener Doppelkegel, symmetrisch zur Ebene $t \,=\, 0$, mit den Spitzen $(x_0,|t_0|)$ und $(x_0,-|t_0|)$.

(62.5.2) Im **zweidimensionalen Fall** ergibt sich ebenso für $(x_0',t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ das Abhängigkeitsgebiet

$$\overline{A}_2(x_0',t) \quad = \quad \{\ x' \in \mathbb{R}^2 \ |\ ||x'-x_0'|| \leq |t_0|\ \}$$

sowie für den Kreis $\overline{K}' \,=\, \{\ x' \in \mathbb{R}^2 \ |\ ||x'-x_0'|| \leq |t_0|\ \}$ das Bestimmtheitsgebiet

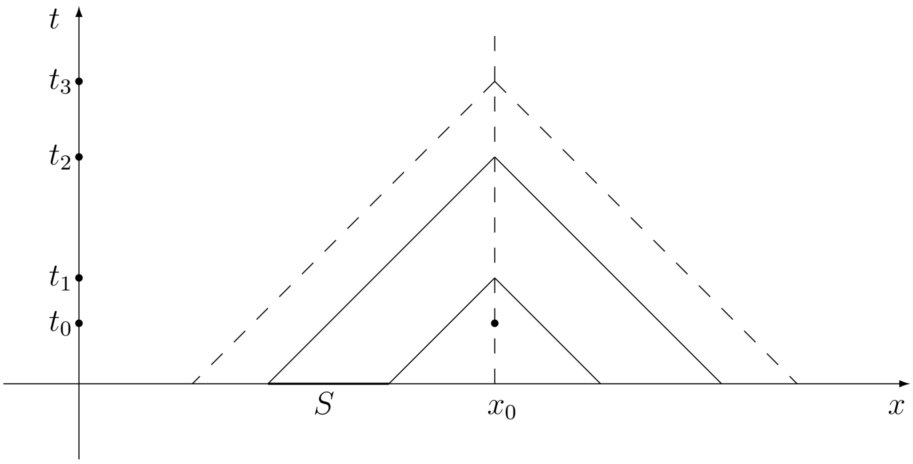
$$\overline{B}_2(\overline{K}) \quad = \quad \{ \ (x', t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ | \ ||x' - x'_0|| \leq |t_0| - |t| \ \} \quad ,$$

das man sich als Doppelkegel im $\mathbb{R}^3$ vorstellen kann.

Bemerkung 62.5.3 : Hier ist im Vergleich des ein- sowie zweidimensionalen Falles einerseits und des dreidimensionalen Falles andererseits eine wichtige **Dimensionsabhängigkeit** festzustellen:
Im 1- bzw. 2-dimensionalen Fall ist jeweils auch das Abhängigkeitsgebiet $\overline{A}_i$ 1- bzw. 2-dimensional, während es im 3-dimensionalen Fall nur 2-dimensional ist. Das unterschiedliche Verhalten im 2- und 3-dimensionalen Fall kann so verfolgt werden: Es wird das Anfangswertproblem für eine in einem beschränkten Störgebiet S lokalisierte Störung betrachtet, also

$$u_j(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \notin S \quad (j = 0, 1)$$

$$u_j(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \in S$$



Im Punkt $x_0 \notin S$ herrscht dann etwa zur Zeit t_0 Ruhe, es ist $u(x_0, t_0) = 0$, denn in den entsprechenden Abhängigkeitsgebieten $\overline{A}_n$, $n = 2, 3$ ist $u_i(x) = 0$. Im Punkt (x_0, t_1) ist $u \neq 0$; die Störung setzt ein, denn die ersten Teile von S liegen in den Abhängigkeitsgebieten. Im Punkt (x_0, t_3) herrscht im 3-dimensionale Fall wieder Ruhe ($u = 0$) , denn das zugehörige Abhängigkeitsgebiet $\overline{A}_3$ besteht nur aus der Kugeloberfläche, auf der bereits wieder $u_i(x) = 0$ gilt. Im 2-dimensionalen Fall dagegen ist $u \neq 0$ in (x_0, t_3) denn $\overline{A}_2$ besteht aus einer Kreisfläche, in der aber S enthalten ist; die Störung verschwindet also hier nicht wieder wie im 3-dimensionalen Fall.

§64 Die Wärmeleitungsgleichung

(nach einer Ausarbeitung von D.Buchholz)

Problemstellung

(64.1) Die Gleichung

$$\Delta_n u \quad = \quad \frac{\partial}{\partial t} u$$

bietet ein schönes Beispiel dafür, wie die Suche nach einer "geeigneten" Lösung

$$u \quad = \quad u(x,t) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \, , \, t \in \mathbb{R}$$

von den dieser Gleichung zugrundeliegenden physikalischen Gegebenheiten beeinflusst wird.

Es sei vorweggenommen, dass hier (im Unterschied zur Wellengleichung) keine entscheidende Dimensionsabhängigkeit auftritt. Es wird deshalb der Einfachheit halber der Fall $n = 1$ betrachtet, also der Fall eines unendlich langen Stabes mit der Koordinate x. Es gilt dann, $u = u(x,t)$ als Temperatur am Ort x zum Zeitpunkt t so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

erfüllt ist. Dabei betrachten wir das folgende Anfangswertproblem:
Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei an allen Orten $x \in \mathbb{R}$ die Temperatur

$$u(x,0) \quad = \quad u_0(x)$$

vorgegeben, wobei u_0 eine gegebene reelle Funktion ist. Aus physikalischen Gründen betrachtet man nur solche Funktionen u_0, die eine "Störung der Gleichgewichtslage" des Stabes bedeuten. "Gleichgewichtslage" bedeutet, dass der Stab eine konstante Temperatur c_0 hat, man nimmt also an, dass gilt

$$u_0(x) = c_0 + f(x) \, ,$$

wobei c_0 eine Konstante ist und f eine "schnell fallende" Funktion,

$$f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}) \quad .$$

Nun ist die DGl $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ linear und homogen, und $u = c_0$ ist eine Lösung, also müssen wir nur das

(64.2) Anfangswertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad = \quad \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{mit} \quad u(x,0) \; = \; f(x) \, , \, f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$$

lösen.

Die Lösung des Anfangswertproblems erfolgt in mehreren Schritten:

i) Auch hier bietet sich der Produktansatz an, so dass wir nach Lösungen suchen, die sich in der Form

$$u(x,t) = a(t)\, b(x)$$

schreiben lassen. Ein solches u erfüllt die Wärmeleitungsgleichung jedenfalls dann nichttrivial ($a(x)\, ,\, b(t) \neq 0$), wenn gilt

$$a(t)\frac{\mathrm{d}^2 b(x)}{\mathrm{d}x^2} \quad = \quad b(x)\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\frac{1}{a(t)}\,\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \quad = \quad \frac{1}{b(x)}\,\frac{\mathrm{d}^2 b(x)}{\mathrm{d}x^2} \quad = \quad c \; = \; \text{const.}\, ,$$

denn die linke Seite hängt nicht von x und die rechte Seite nicht von t ab. Lösungen, die für $|x| \to \infty$ beschränkt bleiben, erhält man für $c = -k^2 < 0$, $k \in \mathbb{R}$, und zwar

$$a(t) = A_1 e^{-k^2 t} \quad , \quad b(x) = A_2 e^{ikx}$$

mit reellen Konstanten A_1, A_2, insgesamt also

$$u(x,t) = A e^{-k^2 t + ikx} \quad .$$

mit einer Konstanten $0 \neq A \in \mathbb{R}$.

ii) Wegen der Linearität der DGl ist auch jede Summe solcher unter i) gefundenen Lösungen (zu verschiedenen Konstanten k) wieder eine Lösung, oder unter passend gewählten Voraussetzungen (die wir noch formulieren werden) auch das Integral über unendlich viele solcher Lösungen :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-k^2 t + ikx} \, \mathrm{d}k .$$

Die Funktion A muss natürlich so beschaffen sein, dass das Integral existiert, und dass man die Differentiation mit der Integration vertauschen kann.

iii) Damit u das Anfangswertproblem löst, muss A so bestimmt werden, dass

$$f(x) = u(x,0) = \lim_{t \to 0} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} \, \mathrm{d}k$$

gilt, d.h. $\check{f}$ soll die Fouriertransformierte von A sein $(\check{f}(x) = f(-x))$. Da wir $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ vorausgesetzt haben, können wir die Fourier-Inversionsformel 52.2.9 c) anwenden und erhalten

$$A(k) = \widehat{f}(k) .$$

A ist also die Fourier-Transformierte von $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, also auch $A \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ und A erfüllt damit die oben angegebenen Voraussetzungen. Wir erhalten also

$$(*) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-k^2 t + ikx} \, \mathrm{d}k .$$

iv) Unter Verwendung unserer Rechenregeln für Fourier-Transformierte kann man das noch in eine Form bringen, mit der man u aus f statt aus $\widehat{f}$ berechnen kann: Es ist (bei festem t):

$$u(-x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-k^2 t} \cdot e^{-ikx} \, \mathrm{d}k$$

$$= \widehat{(\widehat{f} \cdot g)}(x) \quad \text{mit} \quad g(k) := e^{-k^2 t}$$

$$u(-x,t) \overset{52.2.9\text{ c)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{(\sqrt{2\pi}\widehat{f}\,\widehat{\check{g}})}(x)$$

$$\overset{52.1.6\text{ b)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\widehat{(f * \check{g})}}(x) \quad , \quad \text{wobei } * \text{ die Faltung war,}$$

$$\overset{52.2.9\text{ c)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\check{\ }((f * \check{g}))(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\check{f} * \widehat{g})(x)$$

(Die Regeln $\check{\ }(f+g) = \check{f} + \check{g}$ und $\check{\widehat{g}} = \widehat{\check{g}}$ prüfe man nach !) Nun ist $g(k) = \exp\left(-\dfrac{k^2}{2a^2}\right)$ mit $a := \dfrac{1}{\sqrt{2t}}$, also nach Beispiel (52.1.4) :

$$\widehat{g}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad ,$$

$$u(-x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\check{f} * \widehat{g})(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(v)\widehat{g}(x-v)\,\mathrm{d}v \quad ,$$

und Substitution $y := -v$ ergibt

$$u(-x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(-y)\widehat{g}(x+y)\,\mathrm{d}y \quad ,$$

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\widehat{g}(y-x)\,\mathrm{d}y \quad ,$$

$$(**) \quad u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y \quad .$$

(Hier haben Sie hoffentlich mal gesehen, dass die "Faltung" eine nützlliche Rechenoperation ist !)

Bemerkung 64.3 : Aus der Formel $(**)$ sieht man: Ist $f \geq 0$, so gilt auch für alle $t > 0$ stets $u(x,t) \geq 0$. Dies bringt zum Ausdruck, dass die Temperaturen nicht unter die hier gewählte Gleichgewichtstemperatur $c_0 = 0$ fallen können.

Bemerkung 64.4 : Allgemein kann man für $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass für festes $y \in \mathbb{R}^n$

$$u_y(x,t) = (4\,\pi\,t)^{-n/2}\,e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4\,t}}$$

eine "singuläre" Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_n u \quad = \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

ist; Beweis als Übungsaufgabe.

Wir werden uns mit dieser Funktion u_y noch im Zusammenhang mit Distributionen beschäftigen.

Bemerkung 64.5 : Aus der Formel $(*)$ sieht man, dass $u(x,t)$ für festes $t>0$, also als Funktion von x , die Fourier-Transformierte von h mit

$$h(k) \quad := \quad \widehat{f}(k)\, e^{-k^2 t}$$

ist, wegen $\widehat{f} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ also auch $u(.,t) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ ist, und dass u nach x und t beliebig oft differenzierbar ist.
Insgesamt erhalten wir
Satz 64.6 : Eine Lösung

$$u \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R}*_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{der DGl} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{mit} \quad :$$

a) $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(x,t) = f(x)$, wobei $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ gegeben ist,
b) $u(\,.\,,t) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ für festes $t \in \mathbb{R}_+^*$,
c) u ist nach x und t beliebig oft differenzierbar,
ist gegeben durch

$$u(x,t) \quad := \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, \mathrm{d}y \quad . \qquad \Box$$

Es gilt sogar
Satz 64.7 : Die in Satz 64.6 angegebene Lösung $u(x,t)$ ist eindeutig bestimmt.
Beweis : Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die a),b),c) aus Satz 64.1.6 erfüllt, dann ist

$$g \;:\; \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g(t) \quad := \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2\, \mathrm{d}x$$

monoton fallend, denn es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(t) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2\, \mathrm{d}x \quad = \quad 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, \mathrm{d}x$$

$$= \quad 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\, \mathrm{d}x \quad = \quad -2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \;\leq\; 0 \quad .$$

partielle Integration und $u(\,.\,,t) \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$
Also gilt für $0 < t_1 \leq t_2$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t_1)^2\, \mathrm{d}x \geq \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t_2)^2\, \mathrm{d}x \,.$$

Ist also $u(x,t_1) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (etwa bei $t_1 = 0$), so folgt auch $u(x,t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \geq t_1$. Also ist

$$u(x,t) \quad = \quad 0 \quad \text{für alle} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

die einzige Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) \quad = \quad 0$$

erfüllt. Wegen der Linearität der DGl ist dann die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt. $\square$

(64.8) Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten : Seien f_1 und $f_2 \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ zwei Anfangs-Temperaturverteilungen und u_1, u_2 die zugehörigen Lösungen. Dann folgt aus Formel $(**)$:

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\,t}} \, |f_1(y) - f_2(y)| \, \mathrm{d}y$$

$$\le \sup_{y\in\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,t}} \, e^{-\frac{(x-k)^2}{4\,t}} \, \mathrm{d}k$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}} |f_1(y - f_2(y)| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u}_{=\,1} \quad .$$

Sei $\|f\| \quad := \quad \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |f(y)|$ die Supremumsnorm von f, dann gilt also

$$\|f_1 - f_2\| < \varepsilon \implies |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad .$$

(64.9) Lösungen zu negativen Zeiten : Die Formel $(**)$ kann man für die Berechnung von $u(x,t)$ für $t < 0$ nicht verwenden, da wir bei den Umrechnungen von $(*)$ zu $(**)$ $t > 0$ vorausgesetzt hatten. Die Formel

$$(*) \qquad u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \, e^{-k^2 t + ikx} \, \mathrm{d}k$$

kann man zwar auch für $t < 0$ hinschreiben, aber für

$$h(k) \quad := \quad \widehat{f}(k) \, e^{-k^2\,t}$$

wird dann i.A. nicht $h \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ gelten, so dass dann die Fouriertransformierte von h nicht existiert; das uneigentliche Integral konvergiert nicht mehr.

Beispiel (64.10) : Seien $c, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ und

$$\widehat{f}(k) := c \, e^{-\tau\,k^2} \,,$$

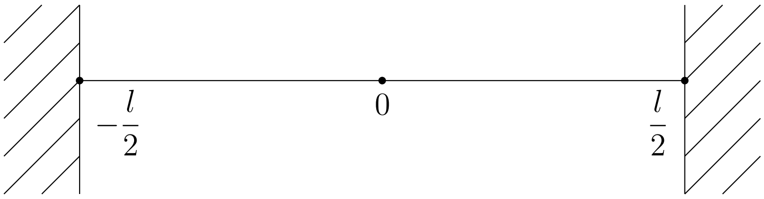
dann ist $\widehat{f} \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$, und

$$u(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \, c \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau+t)\,k^2} \, e^{ikx} \, \mathrm{d}k$$

$$= \quad \frac{c_1}{\sqrt{\tau + t}} \, e^{-\dfrac{x^2}{4\,(\tau+t)}} \quad ,$$

mit einer geeigneten Konstanten c_1. Das geht aber nur für $t > -\tau$. Für $t \to -\tau$, $t > -\tau$ geht die reguläre Distribution $T_{u(\,.\,,t)}$ gegen δ_0. Das würde physikalisch bedeuten, dass der Punkt $x = 0$ unendlich stark erhitzt ist. Bei Rückrechnung zu noch früheren Zeiten würden zudem imaginäre Temperaturen auftreten.
Interpretieren lassen sich die bisher erzielten Ergebnisse so, dass man sagt, dass die Wärmeleitungsgleichung Ausgleichsvorgänge beschreibt, d.h. Übergänge von (im Experiment hergestellten) unwahrscheinlichen Anfangsverteilungen zu wahrscheinlicheren Endzuständen ("Thermisches Gleichgewicht").

(64.11) Anfangs-Randwertproblem : Statt eines unendlich langen Stabes kann man auch einen Stab der endlichen Länge l betrachten,



(der an seinen Enden so isoliert ist, dass sich Punkte am Stabende in ihrer Temperatur kaum unterscheiden, präziser: Für alle Zeiten $t \geq 0$ soll

$$\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t)\Big|_{x=\pm\frac{l}{2}} \quad = \quad 0$$

sein.) Gesucht ist also eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, die diese Randbedingung erfüllt, und für $t = 0$ die Anfangsbedingung

$$u(x,0) \quad = \quad f(x) \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{-l}{2}; \frac{l}{2}\right] \quad , \quad \text{wobei noch}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\Big|_{x=\pm\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{ist.}$$

Zur Lösung macht man wieder einen der Produktansatz und erhält

$$A\, e^{-k^2\, t + ikx} \,,$$

im Komplexen bzw. die reellen Lösungen

$$A \cdot e^{-k^2} \sin k\, x \quad \text{und} \quad B \cdot e^{-k^2} \cos k\, x \quad .$$

Die Randbedingung $\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\Big|_{x=\pm\frac{l}{2}} = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$k \;=\; \frac{(2n+1)\,\pi}{l}, \quad \text{bei den Sinus- bzw.}$$

$$k \;=\; \frac{2n\,\pi}{l} \quad \text{bei den Cosinus-Funktionen ist, mit } n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Damit erhält man für die Lösung eine Fourierreihe

$$u(x,t) \quad = \quad \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ ungerade}}} A_n e^{-k_n^2 t} \sin k_n x + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ n \text{ gerade}}} B_n e^{-k_n^2 t} \cos k_n x$$

mit $k_n = \dfrac{n\,\pi}{l}$. Diese Reihen konvergieren, falls

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ ungerade}}} |A_n| + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ n \text{ gerade}}} |B_n| \quad < \quad \infty$$

ist. Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss dann

$$f(x) \quad = \quad \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ ungerade}}} A_n \sin k_n x + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0 \\ n \text{ gerade}}} B_n \cos k_n x \quad \text{für} \quad x \in \left[\frac{-l}{2}; \frac{l}{2}\right]$$

sein, d.h. man entwickelt $f(x)$ in eine Fourierreihe (die Sätze aus §16 geben Bedingungen dafür an, dass sie gegen $f(x)$ konvergiert) und ermittelt dann durch Koeffizientenvergleich die A_n und die B_n .

Literatur zu den partiellen Differentialgleichungen (§62 - §64) :

(1) S.G.Michlin : Partielle Differentialgleichungen in der Mathematischen Physik. Akademie Verlag Berlin / Harri Deutsch Verlag Thun, Frankfurt/Main 1978
(2) F.John : Partial differential equations, 4th edition. J.Springer Verlag New York , Berlin 1982
(3) Walter S. Strauss : Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, Wiesbaden 1995
(4) J. Jost : Partielle Differentialgleichungen.J.Springer Berlin 1998.
(5) L.C.Evans : Partial Differential Equations. AMS Graduate Studies in Mathematics Vol. 19. American Mathematical Society, Providence R.I., 1998
(6) R.Ansorge, H.J.Oberle : Mathematik für Ingenieure, Band 2, 2., überarbeitete Auflage. Wiley - VCH Berlin 2000
(7) H.J.Oberle, K.Rothe, Th.Sonar : Mathematik für Ingenieure, Aufgaben und Lösungen, Band 3. Wiley - VCH Berlin 2000.
(8) D.Gilbarg, N.S.Trudinger : Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Classics in Mathematics, New York 2001.
(9) S.Larsson, V. Thome : Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden. Springer, Berlin 2005.
(10) A.Meister, J.Struckmeier : Hyperbolic Partial Differential Equations. Vieweg, Wiesbaden 2002.

Die Bücher (6), (7) und (10) stehen in mehreren Exemplaren in der Zentralbibliothek des Departments Mathematik.

Für die Vorlesung verwendete Literatur

L : KONRAD KÖNIGSBERGER : Analysis 2, 5.,korrigierte Auflage. Springer-Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2003.
F : OTTO FORSTER : Analysis 2, 6.Auflage . Vieweg Taschenbuch , Wiesbaden 2005.
G : OTTO FORSTER : Analysis 3, 3.Auflage. Vieweg Studium 52 , Wiesbaden 1981 .
S : ERNST BÖNECKE Skript zur Mathematik III für Studierende der Physik, Hamburg 2006.

Inhalt der "Mathematik III für Studierende der Physik"