MATHEMATIK II FÜR STUDIERENDE DER PHYSIK

§21 Vektorräume mit Skalarprodukt

Wir halten uns hier im Wesentlichen an das Buch
G.Fischer : Lineare Algebra, 14. Auflage, Kap. 5.

21.1 Definition und Beispiele

(21.1.1) Zur Motivation : Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kann man nicht nur addieren und mit Skalaren multiplizieren, man kann auch ihr "Skalarprodukt" bilden: Für $a = {}^t(a_1, a_2, a_3)\,,\; b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ setzt man

$$< a, b > \quad := \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad .$$

Das ist eine reelle Zahl. Man hat also eine Abbildung

$$< \;,\; > \; : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

d.h. zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ wird der Skalar $< a, b > \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man die Länge (Norm) eines Vektors $a \in \mathbb{R}^3$ definieren als

$$||\, a\, || \quad := \quad \sqrt{< a, a >} \quad .$$

Außerdem hängt das Skalarprodukt mit dem Winkel zwischen den Vektoren a und b zusammen : a und b stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $< a, b >= 0$ ist.Wir wollen das alles hier allgemeiner machen; man braucht in der Physik, z.B. in der Quantentheorie, "Skalarprodukte" auf unendlichdimensionalen $\mathbb{C}-$Vektorräumen, und auch in der Mathematik ist dieser Begriff nützlich, wie wir bei Fourierreihen sehen werden.

21.1.2 Vereinbarung : In §21 und §22 werden wir unter $\mathbb{K}$ stets den Körper $\mathbb{R}$ der reellen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen verstehen. Für $z \in \mathbb{K}$ sei $\overline{z}$ das Konjugiert-Komplexe von z , also

$$\overline{z} = a - bi \quad \text{für} \quad z = a + bi \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{bzw.}$$

$$\overline{z} = z \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{R} \quad .$$

Für $z \in \mathbb{K}$ ist $|z|$ der (reelle oder komplexe) Betrag von z . Für $z \in \mathbb{K}$ soll

$$z > 0 \quad \text{stets bedeuten:} \quad z \in \mathbb{R} \wedge z > 0 \quad .$$

Entsprechend: $z \geq 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad (z \in \mathbb{R} \wedge z \geq 0)$.

Definition 21.1.3 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum (also ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Abbildung

$$s \quad : \quad V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt eine **hermitesche Form** auf V , wenn für alle $u, v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(H1) $s(u, v+w) \quad = \quad s(u,v) + s(u,w) \quad ,$
$s(u, \lambda w) \quad = \quad \lambda s(u,w) \quad ,$
d.h. s ist “linear als Funktion des 2.Arguments”, und
(H2) $s(u,v) \quad = \quad \overline{s(v,u)} \quad ,$
d.h. wenn man die beiden Argumente vertauscht, erhält man das Konjugiert-Komplexe.

Folgerung 21.1.4 : Ist s eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{K}-$Vektorraum V , so gilt für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$s(u+v, w) \quad = \quad s(u,w) + s(v,w) \quad ,$$

$$s(\lambda u, v) \quad = \quad \overline{\lambda}\, s(u,v) \quad .$$

Beweis : $s(u+v,w) \stackrel{(H2)}{=} \overline{s(w,u+v)} \stackrel{(H1)}{=} \overline{s(w,u)+s(w,v)}$
$= \overline{s(w,u)} + \overline{s(w,v)} \stackrel{s}{=} (u,w) + s(v,w) \quad ,$
$s(\lambda u, v) \stackrel{(H2)}{=} \overline{s(v, \lambda u)} \stackrel{(H1)}{=} \overline{\lambda\, s(v,u)} \quad = \quad \overline{\lambda} \cdot \overline{s(v,u)}$
$\stackrel{(H2)}{=} \overline{\lambda}\, s(u,v).$ □

Als Funktion des 1.Arguments ist s also “nicht so ganz” linear. Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist aber $\overline{\lambda} = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, und man erhält

Folgerung 21.1.5 : Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und s eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{R}-$Vektorraum V , so ist s bilinear und symmetrisch, d.h. (H2) lautet in diesem Fall

$$\forall\, v, w \in V \quad : \quad s(v,w) \quad = \quad s(w,v) \quad .$$

Man spricht in diesem Fall von einer **symmetrischen Bilinearform** s .

Definition 21.1.6 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und s eine hermitesche Form auf V . Gilt

(H $3\frac{1}{2}$) $\quad \forall\, v \in V \quad : \quad s(v,v) \;\geq\; 0 \quad ,$ so heißt s **positiv semidefinit** .
Gilt

(H4) $\quad \forall\, v \in V \setminus \{0\} \quad : \quad s(v,v) \;>\; 0 \quad ,$ so heißt s **positiv definit** .

Jede positiv definite hermitesche Form ist positiv semidefinit, denn für $0 \in V$ und $0 \in K$ gilt

$$0 \;=\; 0 \cdot 0 \quad , \quad \text{also nach (H1) :}$$

$$s(0,0) \;=\; s(0, 0 \cdot 0) \;=\; 0 \cdot s(0,0) \;=\; 0 \quad .$$

Definition 21.1.7 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Eine positiv definite hermitesche Form

$$s \quad : \quad V \times V \;\longrightarrow\; \mathbb{K}$$

heißt ein **Skalarprodukt** auf V . Ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt heit auch **euklidischer** , ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Skalarprodukt **unitärer** Vektorraum.

Nun die wesentlichen Beispiele für hermitesche Formen :

Beispiel 21.1.8 : Sei $n \in \mathbb{N}$, dann definiert man

$$< \ , \ > \ : \quad \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K} \quad ,$$

$$< a, b > \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{a_j}\, b_j \quad \text{für} \quad a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \, , \, b = {}^t(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n \quad .$$

$< \ , \ >$ ist eine positiv definite hermitesche Form auf $\mathbb{K}^n$, denn die Axiome (H1) und (H2) kann man leicht nachrechnen, und für $a \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$< a, a > = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_j}\, a_j = \sum_{k=1}^{n} |a_j|^2 \geq 0 \quad ,$$

und wenn $a \neq 0$ ist, ist mindestens eins der $a_j \neq 0$, also

$$< a, a > \ > \ 0 \quad .$$

$< \ , \ >$ ist also ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Wir nennen $< \ , \ >$ das **kanonische Skalarprodukt** im $\mathbb{K}^n$.
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $n = 3$ erhält man

$$< a, b > \quad = \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad .$$

Beispiel 21.1.9 a : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $R[a,b]$ der $\mathbb{C}-$Vektorraum der Regelfunktionen

$$f \quad : \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad . \quad \text{Dann setzen wir}$$

$$s \quad : \quad R[a,b] \times R[a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad ,$$

$$s(f,g) \quad := \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)} \cdot g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{für} \quad f, g \in R[a,b] \quad .$$

s ist eine positiv semidefinite hermitesche Form, denn

$$s(f,f) \quad = \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \quad \geq \quad 0 \quad .$$

s ist aber nicht positiv definit, denn nehmen wir z.B.

$$f \quad : \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{fr } x = a \\ 0 & \text{für } x \neq a \end{cases} \quad ,$$

so ist $f \in R[a,b]$, denn f ist eine Treppenfunktion, $f \neq 0$, aber

$$\int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \quad = \quad 0 \quad , \qquad \text{also} \quad s(f,f) \quad = \quad 0 \quad .$$

Beispiel 21.1.9 b : Auf $\mathcal{C}[a,b]$ ist durch

$$s(f,g) \quad = \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{f(t)}\,g(t)\,\mathrm{d}\,t$$

sogar ein Skalarprodukt definiert, denn sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$, $f \neq 0$, dann gibt es ein $t_0 \in [a,b]$ mit $f(t_0) \neq 0$, also

$$h \quad := \quad |f(t_0)|^2 > 0 \quad .$$

Auch $t \longmapsto |f(t)|^2$ ist stetig, mit Werten in $\mathbb{R}$, und, wie wir in 7.2.1 und 11.3.6 gesehen haben, gibt es ein Intervall $[c,d]$, $c < d$, mit

$t_0 \in [c,d] \subset [a,b]$ und

$|f(t)|^2 \geq \dfrac{h}{2}$ für $t \in [c,d]$, also

$$s(f,f) \geq \frac{1}{b-a}\int_c^d \frac{h}{2}\,\mathrm{d}\,t \quad = \quad \frac{h}{2(b-a)}\cdot(d-c) > 0\,.$$

Definition 21.1.10 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit einer positiv semidefiniten hermiteschen Form s . Für $v \in V$ nennen wir

$$||\,v\,|| \quad := \quad \sqrt{s(v,v)}$$

die **Norm (Länge)** von v .

21.2 Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 21.2.1 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit positiv semidefiniter hermitescher Form s . Dann gilt für alle $v,w \in V$:

$$|\,s(v,w)\,| \quad \leq \quad ||\,v\,||\cdot||\,w\,|| \quad .$$

Ist die Familie (v,w) linear abhängig, so gilt sogar das Gleichheitszeichen.

Beweis : 1) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt, da s positiv semidefinit ist:

$$0 \leq s(v-\lambda w, v-\lambda w) \overset{\text{(H1)}}{=} s(v,v) - \overline{\lambda}\,s(w,v) - \lambda\,s(v,w) + \lambda\overline{\lambda}s(w,w)\,,$$

$$(*) \quad 0 \quad \leq \quad s(v,v) - \overline{\lambda}\,\overline{s(v,w)} - \lambda\,s(v,w) + \lambda\,\overline{\lambda}\,s(w,w) \quad .$$

a) Gilt $s(v,v) = s(w,w) = 0$, so setzen wir

$$\lambda \quad := \quad \overline{s(v,w)} \quad \text{in } (*) \text{ ein :}$$

$$0 \leq -s(v,w)\,\overline{s(v,w)} - \overline{s(v,w)}\,s(v,w) = -2\,|s(v,w)|^2 \quad ,$$

und wegen $|\,s(v,w)\,|^2 \geq 0$ folgt $|\,s(v,w)\,| = 0$. Da auch $||v|| = ||w|| = 0$ ist, gilt in diesem Fall die Ungleichung.

b) Sind $s(v,v)$ und $s(w,w)$ nicht beide Null, so ist eins von beiden positiv. Sei etwa $s(w,w) > 0$, dann setzen wir

$$\lambda \quad := \quad \frac{\overline{s(v,w)}}{s(w,w)} \quad \text{in } (*) \text{ ein, und multiplizieren mit } \quad s(w,w) \ :$$

$$0 \leq s(v,v)s(w,w) - s(v,w)\,\overline{s(v,w)} - \overline{s(v,w)}\,s(v,w) + s(v,w)\,\overline{s(v,w)}\,, \quad \text{also}$$

$$|\,s(v,w)\,|^2 \quad \leq \quad s(v,v)\,s(w,w) \quad ,$$

und da die Wurzelfunktion $\sqrt{} \ : \ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)\,,\ x \longmapsto \sqrt{x}$ monoton wachsend ist :

$$|s(v,w)| \quad \leq \quad ||v||\,||w|| \quad .$$

2) Ist (v,w) linear abhängig, so haben wir Œ $v = \lambda w$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$, also

$$||v||^2 \quad = \quad s(v,v) \quad = \quad \overline{\lambda}\lambda s(w,w) \quad = \quad |\lambda|^2 s(w,w) \quad = \quad |\lambda|^2 ||w||^2 \quad ,$$

$$|s(v,w)| \quad = \quad |\overline{\lambda} s(w,w)| \quad = \quad |\lambda|\,||w||^2 \quad , \qquad \text{also}$$

$$|\,s(v,w)\,| \quad = \quad (|\lambda|\,||\,w\,||\,) \cdot ||\,w\,|| \quad = \quad ||\,v\,||\,||\,w\,|| \quad . \qquad \square$$

Zusatz 21.2.2 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s , und seien $v\,,\,w \in V$ mit

$$|\,s(v,w)\,| \quad = \quad ||\,v\,|| \cdot ||\,w\,|| \quad ,$$

so ist die Familie (v,w) linear abhängig.

Beweis : Sei $\lambda := s(w,w)$ und $\mu := -\overline{s(v,w)}$, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$, und

$$s(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) \; = \; \overline{\lambda}\lambda s(v,v) + \overline{\mu}\mu s(w,w) + \overline{\lambda}\mu\, s(v,w) \; + \overline{\mu}\lambda s(w,v)$$

$$= \; ||\,w\,||^4\,||\,v\,||^2 + |\,s(v,w)\,|^2\,||\,w\,||^2 - \;||\,w\,||^2|\,s(v,w)\,|^2 - \;||\,w\,||^2|\,s(v,w)\,|^2$$
$$= \; ||\,w\,||^2\,(\;||\,w\,||^2\,||\,v\,||^2 + ||\,v\,||^2\,||\,w\,||^2 - ||\,v\,||^2\,||\,w\,||^2 - ||\,v\,||^2\,||\,w\,||^2\,) \; = \; 0\,,$$

also $\lambda v + \mu w \; = \; 0$, da s positiv definit ist. Also ist (v,w) linear abhängig, was für $w = 0$ trivial ist, und für $w \neq 0$ ist $\lambda \neq 0$. $\square$

Satz 21.2.3 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit positiv semidefiniter hermitescher Form s, und

$$||\,v\,|| \quad := \quad \sqrt{s(v,v)} \quad \text{für} \quad v \in V \quad .$$

Dann gilt für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$:

(N1') $\quad ||\,v\,|| \quad \geq \quad 0$
(N2) $\quad ||\,\lambda\,v\,|| \quad = \quad |\lambda|\;||\,v\,||$
(N3) $\quad ||\,v\,+\,w\,|| \quad \leq \quad ||\,v\,||\;+\;||\,w\,||$ (Dreiecksungleichung) .

Ist s sogar positiv definit, so gilt statt (N1')

(N1) $\quad ||\,v\,|| \;\geq 0 \quad \wedge \quad (\;||\,v\,|| \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v \;=\; 0\,) \quad .$

Beweis : (N1') folgt daraus, dass $\sqrt{s(v,v)} \geq 0$ ist.

(N2) $\quad ||\,\lambda\,v\,|| \;=\; \sqrt{s(\lambda v, \lambda v)} \;=\; \sqrt{\overline{\lambda}\,\lambda\,s(v,v)} \;=\; \sqrt{|\lambda|^2}\,\sqrt{s(v,v)} \;=\; |\lambda|\;||\,v\,|| \quad .$

(N3) $\quad ||\,v + w\,||^2 \;=\; s(v{+}w, v{+}w) \;=\; s(v,v) + \; s(v,w) \;+ s(w,v) + s(w,w)$

$$= \quad ||\,v\,||^2 + ||\,w\,||^2 + \,s(v,w) \,+\, \overline{s(v,w)}$$

$$= \quad ||\,v\,||^2 + ||\,w\,||^2 + 2\;\mathrm{Re}\;s(v,w) \quad ,$$

und da für $z \in \mathbb{C}$ gilt : $\;\mathrm{Re}\;z \leq |z| \quad :$

$||\,v{+}w\,||^2 \;\leq\; ||\,v\,||^2 + ||\,w\,||^2 + 2\,|\;s(v,w)\;|$, und nach Cauchy-Schwarz:

$$\leq \; ||\,v\,||^2 + ||\,w\,||^2 + 2\,||\,v\,||\;||\,w\,|| \;=\; (\,||\,v\,|| + ||\,w\,||\,)^2\,, \quad \text{also}$$

$$||\,v+w\,|| \quad \leq \quad ||\,v\,|| + ||\,w\,|| \quad .$$

(N1) Ist s positiv definit, so gilt für $v \neq 0 \,:\, s(v,v) \,>\, 0\,,$ also

$$||\,v\,|| \,>\, 0\,.$$

□

Folgerung 21.2.4 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit positiv semidefiniter hermitescher Form s und $||\,v\,|| \;=\; \sqrt{s(v,v)}$ für $v \in V$. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

a) $\quad ||\,v+w\,||^2 \quad = \quad ||\,v\,||^2 \,+\, ||\,w\,||^2 \,+\, s(v,w) \,+\, s(w,v)$
(Satz des Pythagoras) , und

b) $\quad ||\,v+w\,||^2 \,+\, ||\,v-w\,||^2 \quad = \quad 2\,(\,||\,v\,||^2 \,+\, ||\,w\,||^2\,)$
(Parallelogrammgleichung).

Beweis durch Nachrechnen. □

Definition 21.2.5 : Ein $\mathbb{K}-$Vektorraum V mit einer Abbildung

$$||\quad|| \quad : \quad V \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad ,$$ die die Eigenschaften

(N1) $\quad \forall\, v \in V \setminus \{0\} \quad : \quad ||v|| \,>\, 0$

(N2) $\quad \forall\, v \in V \;\; \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \quad : \quad ||\lambda\, v|| \quad = \quad |\lambda|\,||v||$

(N3) $\quad \forall\, v, w \in V \quad : \quad ||v+w|| \;\leq\; ||v|| + ||w||$

hat, heißt ein **normierter $\mathbb{K}-$Vektorraum** . □

Den Satz 21.2.3 kann man daher formulieren als

Folgerung 21.2.6 : Jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum V mit Skalarprodukt s wird ein normierter $\mathbb{K}-$Vektorraum, wenn man die Norm durch

$$(*) \quad ||\,v\,|| \quad := \quad \sqrt{s(v,v)} \quad \text{für} \quad v \in V$$

definiert. □

Man kann nun umgekehrt fragen: Sei V ein normierter $\mathbb{K}-$Vektorraum, gibt es dann auf V ein Skalarprodukt s , so dass $(*)$ gilt ? Nach Folgerung 21.2.4 ist dann klar: Ist $||\quad||$ eine Norm auf V , die die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt, so gibt es so ein s nicht. Ein Beispiel für einen normierten $\mathbb{K}-$Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung nicht gilt, erhalten Sie als Übungsaufgabe.

Definition 21.2.7 : Sei V ein euklidischer Vektorraum, also ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s . Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$, dann gilt nach Cauchy-Schwarz:

$$\left| \frac{s(v,w)}{||\,v\,|| \cdot ||\,w\,||} \right| \quad \leq \quad 1 \quad ,$$

und wegen $s(v,w) \in \mathbb{R}$ sogar

$$\frac{s(v,w)}{||\,v\,|| \cdot ||\,w\,||} \quad \in \quad [-1,1] \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$\varphi \quad := \quad \arccos \frac{s(v,w)}{||\,v\,|| \cdot ||\,w\,||}$$

definiert, und es gilt $\varphi \in [0, \pi]$. φ heißt der **Winkel zwischen den Vektoren v und w.** Wir wollen hier keine analytische Geometrie treiben und uns deshalb nicht allgemein mit Winkeln beschäftigen. Wir sehen aber :

$$\varphi \quad = \quad \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad s(v, w) \quad = \quad 0 \quad ,$$

die Vektoren v und w stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. $s(v, w) = 0$ gibt natürlich auch für einen $\mathbb{C}-$Vektorraum Sinn:

Definition 21.2.8 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit hermitescher Form s . Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen zueinander **senkrecht** oder **orthogonal**, in Zeichen: $u \perp v$, wenn

$$s(u, v) \quad = \quad 0 \quad \text{ist.} \qquad \square$$

Wir kehren zurück zu unserem

Beispiel 21.1.9 a : Im $\mathbb{C}-$Vektorraum $R[a, b]$ der Regelfunktionen

$$f \quad : \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a < b \quad , \quad \text{mit}$$

$$s(f, g) \quad = \quad \frac{1}{b-a} \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{sei}$$

$$f_a \quad : \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f_a(t) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{fr } t = a \\ 0 & \text{für } t \neq a \end{cases} \quad ,$$

dann gilt für alle $g \in R[a, b]$:

$$\overline{f_a(t)} \cdot g(t) \quad = \quad \begin{cases} g(a) & \text{fr } t = a \\ 0 & \text{für } t \neq a \end{cases} \quad , \quad \text{also}$$

$$s(f_a, g) \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{also}$$

$$f_a \perp g \quad \text{für alle} \quad g \in R[a, b] \quad . \qquad \square$$

Definition 21.2.9 : Eine hermitesche Form s auf einem $\mathbb{K}-$ Vektorraum V heißt **nichtausgeartet**, wenn es außer 0 keinen Vektor aus V gibt, der auf allen $w \in V$ senkrecht steht, wenn also gilt

(H3) $\quad \forall\, v \in V \quad : \quad (\forall\, w \in V \quad : \quad s(v, w) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = 0)$.

Folgerung 21.2.10 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit hermitescher Form s . Dann gilt:

s positiv definit $\quad \Longleftrightarrow \quad s$ nichtausgeartet und positiv semidefinit.

Beweis : „ $\Longrightarrow$ " : Sei s positiv definit und $v \in V$ ein Vektor mit

$$\forall\, w \in V \quad : \quad s(v,w) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gilt insbesondere

$$s(v,v) \quad = \quad 0 \quad ,$$

also $v = 0$. Also ist s nichtausgeartet, und positiv semidefinit sowieso.
" $\Longleftarrow$ " : Ist s positiv semidefinit, so gilt für alle $v \in V$:

$$s(v,v) \geq 0 \quad \text{und falls} \quad v = 0 \quad \text{ist :} \quad s(v,v) = 0 \quad .$$

Ist nun $v \in V$ mit $s(v,v) = 0$, so gilt nach Cauchy-Schwarz für alle $w \in V$:

$$|\, s(v,w)\,|^2 \leq ||\, v\,||^2\, ||\, w\,||^2 = s(v,v)\, s(w,w) = 0 \quad , \quad \text{also}$$

$$|\, s(v,w)\,| \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{und damit}$$

$$s(v,w) \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{für alle} \quad w \in V \quad .$$

Ist nun s nichtausgeartet, so folgt daraus $v = 0$. □

Hermitesche Formen, die nicht positiv semidefinit, aber immerhin noch nichtausgeartet sind, kommen in der Physik (und zwar in der Relativitätstheorie) vor:

Beispiel 21.2.11 : Für $a = {}^t(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = {}^t(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ setzt man

$$s(a,b) \quad := \quad \sum_{j=1}^{3} a_j b_j - a_4 b_4 \quad ,$$

dann ist s eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^4$, die nicht positiv semidefinit ist.
Beweis : Dass (H1) und (H2) für s gelten, kann man leicht nachrechnen. Fr $a = (0,0,0,1)$ gilt

$$s(a,a) \quad = \quad -1 \quad < \quad 0 \quad ,$$

also gelten (H $3\frac{1}{2}$) und (H4) nicht. Es gilt aber (H3) , denn sei $a \in \mathbb{R}^4$ und

$$\forall\, b \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad s(a,b) \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann gilt insbesondere für die kanonischen Basisvektoren e_j , $j \in \underline{4}$, des $\mathbb{R}^4$:

$$s(a, e_j) \quad = \quad 0 \quad \text{und damit} \quad a_1 = a_2 = a_3 = -a_4 = 0 \quad ,$$

also $a = 0$. □
In der Relativitätstheorie interpretiert man hier die ersten drei Komponenten von a als Ort und a_4 als Zeit.

21.3 Orthonormalbasen

Definition 21.3.1 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt und $(v_j)_{j\in J}$ eine Familie von Vektoren aus V , J eine (nicht notwendig endliche) Menge. Dann heißt die Familie $(v_j)_{j\in J}$

a) ein **Orthogonalsystem**, wenn
$v_j \perp v_k$ für alle $j,k \in J$ mit $j \neq k$ ist,

b) ein **Orthonormalsystem**, wenn sie ein Orthogonalsystem ist und zusätzlich
$||v_j|| \quad = \quad 1$ für alle $j \in J$ gilt,

c) eine **Orthogonalbasis** , wenn sie ein Orthogonalsystem und eine Basis von V ist,

d) eine **Orthonormalbasis**, wenn sie ein Orthonormalsystem und eine Basis von V ist.

Beispiel 21.3.2 : Im $\mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $< \quad , \quad >$ ist die kanonische Basis $(e_j)_{j\in\underline{n}}$ eine Orthonormalbasis, denn es gilt für $j,l \in \underline{n} \quad : \quad e_j \ = \ (\delta_{kj})_{k\in\underline{n}}$, also

$$< e_j, e_l > \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{\delta_{kj}}\delta_{kl} \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = l \\ 0 & \text{für} \quad j \neq l \end{cases} \quad .$$

Beispiel 21.3.3 : Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ wird durch

$$s(f,g) \quad := \quad \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

ein Skalarprodukt definiert. Die in den Übungsaufgaben definierten Legendre-Polynome

$$P_n(x) \quad := \quad \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

sind Polynomfunktionen vom Grad n, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, und damit sieht man, dass sie eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ bilden. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist sogar eine Orthogonalbasis, denn als Übungsaufgabe zeigen Sie

$$s(P_n,P_m) \quad = \quad \int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad 0 \quad \text{für} \quad n \neq m \quad ,$$

allerdings keine Orthonormalbasis, denn

$$s(P_n,P_n) \quad = \quad \frac{2}{2n+1} \quad .$$

Nimmt man statt $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aber die Familie $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch

$$Q_n(x) \quad := \quad \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot P_n(x)$$

definiert ist, so ist $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sogar eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Wie kann man sich allgemein eine Orthonormalbasis verschaffen ?

<u>(21.3.3) Orthonormalisierungssatz von Erhard Schmidt :</u>
Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s und

$$\dim V \quad = \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

Dann lässt sich jedes Orthonormalsystem

$$(w_1, \dots, w_m) \quad \text{in} \quad V$$

mit $0 \leq m \leq n$ ergänzen zu einer Orthonormalbasis

$$(w_1, \dots, w_m, \dots, w_n) \quad \text{von} \quad V \quad .$$

<u>Beweis :</u> In diesem Fall ist es wichtig, den Beweis zu verstehen, da man auf diese Weise auch praktisch Orthonormalbasen konstruieren bzw. Orthonormalsysteme zu Orthonormalbasen ergänzen kann. Die für die Praxis wichtigen Schritte rahmen wir ein. - Wir machen Induktion nach $k := n - m$:
Induktionsanfang : Sei $k = 0$, dann ist $n = m$, und das Orthonormalsystem $(w_j)_{j \in \underline{n}}$ ist bereits eine Basis, denn es besteht aus n Vektoren, und diese sind linear unabhängig: Aus

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, w_j \, = \, 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_j \in \mathbb{K} \quad \text{folgt für} \quad k \in \underline{n} \quad :$$

$$0 \, = \, s\left(w_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, w_j\right) \, = \, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, s(w_k, w_j) \, = \, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \delta_{kj} \, = \, \alpha_k \quad .$$

Hier ist der Satz also richtig; wir brauchen nichts zu ergänzen.
Induktionsschluss : Sei $k \in \mathbb{N}_0$, und für $n - m \, = \, k$ sei der Satz richtig. Sei nun $n - m \, = \, k + 1 \in \mathbb{N}$, dann ist

$$m \quad = \quad n - (k+1) \quad < \quad n \quad ,$$

für $W \, := \, \operatorname{span}(w_j)_{j \in \underline{m}}$ gilt $\dim W \leq m < n$, es gibt also einen Vektor

$$v \in V \quad \text{mit} \quad v \notin \operatorname{span}(w_j)_{j \in \underline{m}} \quad . \quad \text{Wir bilden}$$

$$\tilde{v} \quad := \quad \sum_{j=1}^{m} s(w_j, v) \cdot w_j$$

(die “Projektion von v nach W ”). Dieser Vektor $\tilde{v}$ liegt in W, und

$$w \quad := \quad v - \tilde{v}$$

steht auf allen Vektoren aus W senkrecht, denn für $k \in \underline{m}$ gilt

$$\begin{aligned} s(w_k, w) \quad &= \quad s(w_k, v) - s\left(w_k, \sum_{j=1}^{m} s(w_j, v) w_j\right) \\ &= \quad s(w_k, v) - \sum_{j=1}^{m} s(w_j, v) \, s(w_k, w_j) \end{aligned}$$

$$= \quad s(w_k, v) - \sum_{j=1}^{m} s(w_j, v) \cdot \delta_{kj}$$

$$= \quad s(w_k, v) - s(w_k, v) \quad = \quad 0 \quad .$$

Wegen $\tilde{v} \in W$, $v \notin W$ ist $w \neq 0$. Wir können w daher "normieren": Wir setzen

$$w_{m+1} \quad := \quad \frac{1}{||w||} \cdot w \quad ,$$

dann haben wir ein Orthonormalsystem

$$(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1})$$

in V ; es ist $n - (m+1) = k$, und da der Satz für k richtig ist, kann man dieses Orthonormalsystem ergänzen zu einer Orthonormalbasis

$$(w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_n) \quad \text{von} \quad V \quad . \qquad \square$$

Insbesondere folgt, da die leere Familie $(w_j)_{j \in \underline{0}} = (w_j)_{j \in \emptyset}$ ein Orthonormalsystem ist :

Folgerung 21.3.4 : Jeder endlichdimensionale $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis . $\square$

Wir bleiben noch bei endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorräumen:

21.4 Matrizen hermitescher Formen

Definition 21.4.1 : Sei V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$,
$\mathfrak{B} \; = \; (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V,
dann gibt es zu $v, w \in V$ eindeutig bestimmte "Koordinatenvektoren"

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad , \quad \text{die definiert sind durch}$$

$$(*) \quad v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \quad , \quad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \quad .$$

Ist nun s eine hermitesche Form auf V , so gilt

$$s(v, w) \quad = \quad s\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \quad = \quad \sum_{k,j=1}^{n} \overline{x_k}\, s(v_k, v_j)\, y_j \quad .$$

Wir können also jedes $s(v, w)$ ausrechnen, wenn wir die Matrix

$$M_{\mathfrak{B}}(s) \quad := \quad (s(v_k, v_j))_{(k,j) \in \underline{n} \times \underline{n}} \in M(n \times n, \mathbb{K})$$

kennen. $M_{\mathfrak{B}}(s)$ heit die **darstellende Matrix** von s bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$. Mit den $n \times 1-$ Matrizen

$$\overline{x} \quad = \quad \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y \quad = \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{folgt dann}$$

$$s(v,w) \quad = \quad {}^t\overline{x} \cdot M_{\mathfrak{B}}(s) \cdot y \quad ,$$

wobei x und y die durch $(*)$ bestimmten Koordinatenvektoren von v bzw. w sind. Da s hermitesch ist, gilt nach (H2)

$$\overline{s(v_j,v_k)} \quad = \quad s(v_k,v_j) \quad , \qquad \text{also}$$

$${}^t\overline{M_{\mathfrak{B}}(s)} \quad = \quad M_{\mathfrak{B}}(s) \quad ,$$

wenn man fr eine Matrix $A = (a_{kj})$ definiert: $\overline{A} := (\overline{a_{kj}})$:

Definition 21.4.2 : Eine Matrix $A \in M(n\times n, \mathbb{K})$ heißt **hermitesch**, wenn $A = {}^t\overline{A}$ ist. Ist $\mathbb{K} \quad = \quad \mathbb{R}$, so bedeutet das

$$A \quad = \quad {}^tA \quad ,$$

eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt **symmetrisch** .

Folgerung 21.4.3 : Wir haben also bewiesen: Ist V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Basis $\mathfrak{B} = (v_1,\ldots,v_n)$, und s eine hermitesche Form auf V, so ist die darstellende Matrix

$$A \quad := \quad (s(v_k,v_j)) \quad \text{hermitesch.}$$

Man sieht sofort, dass umgekehrt jede hermitesche Matrix $A = (a_{kj})$ durch

$$s\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) \quad := \quad \sum_{k,j=1}^{n} \overline{x_k}\, a_{kj}\, y_j$$

eine hermitesche Form auf V definiert. □

Es wäre nun schön, wenn man der darstellenden Matrix $M_{\mathfrak{B}}(s)$ ansehen könnte, ob s nichtausgeartet oder sogar positiv definit ist. Leicht zu zeigen, aber nicht ganz so wichtig, ist

Satz 21.4.4 : Eine hermitesche Form auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorraum V ist genau dann nichtausgeartet, wenn für die darstellende Matrix $M_{\mathfrak{B}}(s)$ bezüglich einer festen Basis $\mathfrak{B}$ von V gilt

$$\det M_{\mathfrak{B}}(s) \neq 0 \quad .$$ □

Wichtig, auch demnächst für die Analysis, aber schwer zu beweisen, ist

(21.4.5) Hauptminoren- oder Hurwitz-Kriterium : Eine hermitesche Form s auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorraum V ist genau dann positiv definit, wenn für alle $k \in \underline{n}$ und für die darstellende Matrix $A = M_{\mathfrak{B}}(s)$ bezüglich einer festen Basis $\mathfrak{B}$ von V gilt

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad > \quad 0 \quad .$$

(21.4.6) Achtung: Hier muss man für **alle** $k \in \underline{n}$ die Unterdeterminanten bis zur $k-$ ten Zeile und Spalte von A bilden:

$$A \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \vert & \dots & \vert & & a_{1n} & \vert \\ \_ & \_\vert & & \vert & & & \vert \\ \dots & & a_{22} & \vert & & & \vert \\ \_ & \_ & \_ & \_\vert & & & \vert \\ & & & & \ddots & & \vert \\ a_{n1} & & & & & a_{nn} & \vert \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_\vert \end{array} \right) \quad ,$$

und diese müssen alle > 0 sein. Z.B. ist s mit

$$M_{\mathfrak{B}}(s) \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nicht positiv definit!

Wir fragen uns, wie sich die darstellende Matrix $M_{\mathfrak{B}}(s)$ von s bei einem Basiswechsel verändert :

21.4.7 Transformationssatz für darstellende Matrizen hermitescher Formen : Sei V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum mit hermitescher Form s , $n \in \mathbb{N}$, und seien

$$\mathfrak{A} \quad = \quad (a_1, \dots, a_n) \quad , \quad \mathfrak{A}' \quad = \quad (a'_1, \dots, a'_n)$$

zwei Basen von V , dann hat man nach der Formel in 19.4.16 (Skript S.45):

$$\forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad a_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\, a'_k \qquad \text{mit der Transformationsmatrix}$$

$$T^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'} \quad = \quad T \quad = \quad (t_{kj}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \quad , \quad \text{also gilt}$$

$$\begin{aligned} \forall\, j, l \in \underline{n} \quad : \quad s(a_j, a_l) \quad &= \quad s\left(\sum_{k=1}^{n} t_{kj}\, a'_k, \sum_{r=1}^{n} t_{rl}\, a'_r \right) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \overline{t_{kj}}\, t_{rl}\, s(a'_k, a'_r) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \overline{t_{kj}} \cdot s(a'_k, a'_r) \cdot t_{rl} \quad , \end{aligned}$$

und nach Definition des Matrizenprodukts heißt das

$$M_{\mathfrak{A}}(s) \quad = \quad {}^t\overline{T} \cdot M_{\mathfrak{A}'}(s) \cdot T \quad , \quad \text{genauer:}$$

$$\underline{M_{\mathfrak{A}}(s) \quad = \quad {}^t\overline{T^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}} \cdot M_{\mathfrak{A}'}(s) \cdot T^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}'}}$$

21.5 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Definition 21.5.1 : Seien $a = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, dann heißt der Vektor

$$a \times b \quad := \quad {}^t\left(\det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} , -\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} , \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right) \quad \in \quad \mathbb{R}^3$$

das **Vektorprodukt** von a und b .

Satz 21.5.2 : Sei $< \quad , \quad >$ das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, dann gilt für alle $a, b, w \in \mathbb{R}^3$:

$$< a \times b, w > \quad = \quad \det(a, b, w) \quad ,$$

wobei (a, b, w) die Matrix mit den Spaltenvektoren a, b, w ist.
Beweis : Entwicklung von

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & w_1 \\ a_2 & b_2 & w_2 \\ a_3 & b_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

nach der 3.Spalte ergibt die Behauptung. □

Wir wissen, dass die Determinante einer $2 \times 2-$Matrix bilinear und alternierend als Funktion der Spaltenvektoren ist. Deshalb folgt aus Definition 21.5.1 sofort:

Folgerung 21.5.3 : Fr alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt
(1) $a \times a \quad = \quad 0 \quad .$
(2) $a \times b \quad = \quad -b \times a$ (Antikommutativität)
(3) $(\lambda a) \times b \quad = \quad a \times (\lambda b) \quad = \quad \lambda(a \times b)$
(4) $(a + b) \times c \quad = \quad a \times c \, + \, b \times c$
(5) $a \times (b + c) \quad = \quad a \times b \, + \, a \times c \quad .$ □

Für das Vektorprodukt gilt also das Distributivgesetz (Regeln (4),(5)) und statt des Kommutativgesetzes die Regel (2). Statt des Assoziativgesetzes hat man die folgenden zwei Regeln für drei Faktoren:

(21.5.4) Grassmann-Identität : Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $< \quad , \quad >$ das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, dann ist

$$a \times (b \times c) \quad = \quad < a, c > b - < a, b > c \quad .$$

Beweis durch stumpfsinniges Nachrechnen:

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) \quad &= \quad a \times (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - c_1b_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \quad (a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3), \\ &\qquad -a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + a_3(b_2c_3 - b_3c_2), \\ &\qquad a_1(b_3c_2 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)) \\ &= \quad ((a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1, \\ &\qquad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2, \\ &\qquad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3) \\ &= \quad < a, c > b - < a, b > c \quad . \end{aligned}$$ □

(21.5.5) Jacobi-Identität : Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$a \times (b \times c) \, + \, b \times (c \times a) \, + \, c \times (a \times b) \quad = \quad 0 \quad .$$

Beweis : Nach (21.5.4) gilt

$$a \times (b \times c) \, + \, b \times (c \times a) \, + \, c \times (a \times b) \quad =$$

$$< a, c > b - < a, b > c + < b, a > c - < b, c > a + < c, b > a - < c, a > b$$

$$= \quad 0 \quad .$$ □

Bemerkung 21.5.6 : Allgemein bezeichnet man einen $K-$Vektorraum V, auf dem eine Multiplikation $\bullet$ definiert ist, so dass für alle $a, b, c \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} (\lambda a) \bullet b &= a \bullet (\lambda b) = \lambda(a \bullet b) \quad , \\ (a+b) \bullet c &= a \bullet c + b \bullet c \quad , \\ a \bullet (b+c) &= a \bullet b + a \bullet c \end{aligned}$$

als eine **$K-$Algebra** . Gilt zusätzlich das Assoziativgesetz

$$\forall a, b, c \in V \quad : \quad a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c \quad ,$$

so nennt man V eine **assoziative $K-$Algebra**. Beispiele dafür sind $\mathrm{Hom}_K(V,V)$ mit $+$ und $\circ$, oder $M(n \times n, K)$ mit Matrizen-Addition und -Multiplikation. Gilt statt des Assoziativgesetzes für alle $a, b, c \in V$:

$$\begin{aligned} &a \bullet a = 0 \quad \text{und} \\ &a \bullet (b \bullet c) + b \bullet (c \bullet a) + c \bullet (a \bullet b) = 0 \quad , \end{aligned}$$

so heißt V eine **Lie-Algebra**. $\mathbb{R}^3$ mit $+$ und Vektorprodukt $\times$ ist also eine Lie-Algebra.

Satz 21.5.7 : Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$< a \times b, c \times d > \;=\; < a, c >< b, d > - < b, c >< a, d > \quad .$$

Beweis : Nach der Grassmann-Identität (21.5.4) gilt

$$< a, c > b - < b, c > a \;=\; c \times (b \times a) \quad .$$

Wir bilden auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit d :

$$\begin{aligned} < a, c >< b, d > - < b, c >< a, d > &= < c \times (b \times a), d > \\ &\overset{(21.5.2)}{=} \det(c, b \times a, d) = -\det(c, d, b \times a) \\ &\overset{(21.5.2)}{=} - < c \times d, b \times a > = < a \times b, c \times d > \quad . \end{aligned}$$

□

Satz 21.5.8 : Für alle $a, b \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$< a, b >^2 + ||a \times b||^2 \;=\; ||a||^2 \, ||b||^2 \quad .$$

Das ist eine genauere Aussage als die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die nur
$< a, b >^2 \leq ||a||^2 \, ||b||^2$ aussagt !

Beweis : Setzen wir $c := a$, $d := b$ in Satz 21.5.7 ein, so erhalten wir

$$< a \times b, a \times b > \;=\; < a, a >< b, b > - < b, a >< a, b > \quad , \quad \text{also}$$

$$||a \times b||^2 + < a, b >^2 \;=\; ||a||^2 \, ||b||^2 \quad .$$

□

(21.5.9) Geometrische Deutung des Vektorprodukts : Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a, b \neq 0$. Dann gilt

(1) $||a \times b|| = ||a|| \, ||b|| \sin \varphi$, wobei
φ der Winkel zwischen a und b ist,

(2) $a \times b \perp a$ und $a \times b \perp b$,

(3) $\det(a, b, a \times b) \geq 0$ . .

Beweis : (1) $\quad ||a \times b||^2 \overset{(21.5.8)}{=} ||a||^2\,||b||^2 - <a,b>^2$

$$= \quad ||a||^2\,||b||^2\,(1-\cos^2\varphi) \quad = \quad ||a||^2\,||b||^2\,\sin^2\varphi \quad ,$$

$\varphi \in [0,\pi]$, also $\sin\varphi \in [0,1]$, und damit folgt die Behauptung.

(2) $\quad <a \times b, a> \overset{(21.5.2)}{=} \det(a,b,a) = 0$, entsprechend für b .

(3) $\quad \det(a,b,a\times b) \overset{(21.5.2)}{=} <a\times b, a\times b> \;=\; ||a\times b||^2 \geq 0$. □

Ist (a,b) linear unabhängig, so weiß man damit: $a \times b$ steht senkrecht auf der von a und b aufgespannten Ebene im $\mathbb{R}^3$ und hat die Norm $||a||\,||b||\,\sin\varphi$. (3) macht eine Aussage, in welche Richtung der Vektor $a \times b$ zeigt. Man braucht dazu den Begriff der Orientierung einer Basis des $\mathbb{R}^n$:

Definition 21.5.10 : Sei $(b_1,\ldots,b_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Sie heißt **positiv orientiert** , wenn für die Matrix mit den Spaltenvektoren $b_1,\ldots,b_n$ gilt :

$$\det(b_1,\ldots,b_n) \;>\; 0 \quad .$$

Sei T diese Matrix, also t_{kj} die $k-$te Komponente von b_j , so gilt

$$\forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad b_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\, e_k \quad ,$$

T ist also die in Bemerkung 19.4.16 definierte Transformationsmatrix von der kanonischen Basis $(e_k)_{k\in\underline{n}}$ zur Basis $(b_j)_{j\in\underline{n}}$. "$(b_j)_{j\in\underline{n}}$ positiv orientiert" bedeutet dann, dass $(b_j)_{j\in\underline{n}}$ "genauso orientiert" ist wie die kanonische Basis. Speziell im $\mathbb{R}^3$ kann man beweisen:

Satz 21.5.11 : Eine Basis (b_1,b_2,b_3) des $\mathbb{R}^3$ ist genau dann positiv orientiert, wenn sie die "Rechte-Hand-Regel" erfüllt : Zeigt b_1 in die Richtung des Daumens, b_2 in die des Zeigefingers, so zeigt b_3 in die Richtung des Mittelfingers der rechten Hand. □

Die Regel (21.5.9)(3) sagt dann: Ist (a,b) linear unabhängig, so ist $(a,b,a\times b)$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$, erfüllt also die Rechte-Hand-Regel . -

§22 Eigenwerte

22.1 Definition, diagonalisierbare Matrizen

(22.1.1) Zur Motivation : Die Bestimmung von Eigenwerten linearer Abbildungen spielt in allen Gebieten der Physik und Technik eine große Rolle. Z.B.ist

$$\underline{H}\,\psi \quad = \quad E\cdot\psi \quad ,$$

wobei $\underline{H}$ der Hamilton-Operator ist, der auf dem Raum der "Wellenfunktionen" ψ operiert, und man "Energie-Eigenwerte" E sucht, eine der grundlegenden Gleichungen der Quantentheorie. Wir können das Problem der Bestimmung von Eigenwerten in diesem Semester nur für endlichdimensionale Vektorräume behandeln. Der allgemeinere Fall (die mathematischen Grundlagen der Quantentheorie) kommt dann im 4.Semester.

Definition 22.1.2 : Sei K ein Körper und V ein $K-$ Vektorraum. Sei F ein Endomorphismus von V , also $F \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Ein $\lambda \in K$ heißt ein **Eigenwert** von F , wenn es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, so dass gilt

$$F(v) \quad = \quad \lambda v \quad .$$

Jedes von 0 verschiedene $v \in V$, das diese Gleichung erfüllt, heißt ein **Eigenvektor** von F zum Eigenwert λ .

(22.1.3) Beachten Sie, dass $0 \in K$ ein Eigenwert sein kann, dass aber $0 \in V$ definitionsgemäß kein Eigenvektor ist !

Hilfssatz und Definition 22.1.4 : Sei K ein Körper , V ein $K-$Vektorraum , $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:
(1) Es gibt eine Basis $(b_j)_{j\in\underline{n}}$ von V aus Eigenvektoren von F.
(2) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (b_j)_{j\in\underline{n}}$ von V , so dass die gemäß (19.4.3) bezüglich $\mathcal{B}$ definierte Matrix von F, also $M_B^B(F)$, eine Diagonalmatrix ist :

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \quad .$$

Wenn eine dieser Aussagen gilt, heißt F **diagonalisierbar** .
Beweis : (1) $\Longrightarrow$ (2) : Sei $(b_j)_{j\in\underline{n}}$ eine Basis aus Eigenvektoren von F, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad F(b_j) \quad = \quad \lambda_j\, b_j \quad ,$$

also hat $M_B^B(F)$ nach (19.4.3) die in (2) angegebene Form.
(2) $\Longrightarrow$ (1) : Sei $M_B^B(F)$ die in (2) angegebene Matrix, dann gilt

$$\forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad F(b_j) \quad = \quad \lambda_j\, b_j \quad ,$$

also sind die b_j Eigenvektoren von F. □

(22.1.5) Beachten Sie: Dass man eine Basis von Eigenvektoren hat, bedeutet nicht, dass jeder Vektor aus V ein Eigenvektor ist, denn die Linearkombination von Eigenvektoren ist i.A. kein Eigenvektor ! -
Die Frage ist nun: Wann ist ein $F \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$ diagonalisierbar ? Eine hinreichende Bedingung gibt der folgende Hilfssatz an :

Hilfssatz 22.1.6 : Sei K ein Körper und V ein $K-$Vektorraum . Sind $v_1, \dots, v_m$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $F \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, so ist $(v_j)_{j\in\underline{m}}$ linear unabhängig. Insbesondere: Ist $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und hat F n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist F diagonalisierbar.
Beweis durch Induktion nach m :
Induktionsanfang : Ist $m = 1$, so ist $(v_j)_{j\in\underline{1}}$ linear unabhängig wegen $v_1 \neq 0$.

Induktionsschluss : Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Sei

$$(*) \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \quad = \quad 0$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, dann gilt

$$\lambda_m \alpha_1 v_1 + \ldots \lambda_m \alpha_m v_m \quad = \quad 0 \quad ((*) \text{ mit } \lambda_m \text{ multipliziert}) \quad ,$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \alpha_m \lambda_m v_m \quad = \quad 0 \quad (F \text{ auf } (*) \text{ angewendet}) \text{ , also}$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m)\, v_j \quad = \quad 0$$

und wenn der Satz für $m-1$ richtig ist, folgt wegen $\lambda_j \neq \lambda_m$:

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} \quad = \quad 0 \quad ,$$

und aus $(*)$ und $v_m \neq 0$ dann noch nach Satz 19.1.10 :

$$\alpha_m \quad = \quad 0 \quad .$$

Ist $\dim V = n$ und hat F n paarweise verschiedene Eigenwerte, so hat man eine linear unabhängige Familie $(v_j)_{j \in \underline{n}}$ von Eigenvektoren von F, die dann auch eine Basis von V ist. Nach Hilfssatz 22.1.4 ist F diagonalisierbar.□

Eine etwas andere Formulierung von Definition 22.1.4 liefert der

<u>**Satz 22.1.7 :**</u> Sei V ein $K-$Vektorraum , $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. F ist genau dann diagonalisierbar, wenn es zur Matrix

$$A \quad = \quad M_A^A(F)$$

bezüglich einer beliebigen Basis $\mathfrak{A}$ von V eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix ist.
<u>**Beweis :**</u> " $\Longrightarrow$ " : Sei F diagonalisierbar. Dann gibt es nach Definition 22.1.4 eine Basis $\mathfrak{B}$ von V , so dass

$$B \quad := \quad M_B^B(F)$$

eine Diagonalmatrix ist. Sei $A = M_A^A(F)$ die Matrix von F bezüglich der Basis $\mathfrak{A}$, dann gibt es nach Bemerkung 19.4.16 (angewendet auf den Spezialfall $V = W$) eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit

$$M_B^B(F) \quad = \quad S^{-1} \cdot M_A^A(F) \cdot S \quad .$$

" $\Longleftarrow$ ": Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Diagonalmatrix, dann gehen wir von der Basis $\mathfrak{A} = (a_k)_{k \in \underline{n}}$ über zur Basis $\mathfrak{B} = (b_j)_{j \in \underline{n}}$, die durch

$$b_j \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} s_{kj}\, a_k \quad \text{mit} \quad (s_{kj}) = S$$

definiert ist. Nach Bemerkung 19.4.16 ist dann $S^{-1} \cdot A \cdot S$ die Matrix von F bezüglich $\mathfrak{B}$. Nach Definition 22.1.4 (2) ist nun F diagonalisierbar. $\square$

22.2 Das charakteristische Polynom

Bemerkung 22.2.1 : Die Frage ist nun, wie bekommt man die Eigenwerte eines gegebenen $F \in \mathrm{Hom}_K(V,V)$, wenn $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ ist. Dazu wählt man sich eine feste Basis $\mathfrak{A} = (a_k)_{k \in \underline{n}}$ von V , dann hat man

$$A \quad := \quad M_A^A(F)$$

und zu jedem $x \in V$ gibt es einen Vektor $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \, a_k \quad .$$

Dann gilt für $x \in V$ und $\lambda \in K$:

$$F(x) = \lambda x \quad \iff \quad A \cdot a = \lambda a \quad , \quad \text{denn}$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, F(a_k) = \sum_{k,l=1}^{n} x_k \, a_{lk} \, a_l = \sum_{l=1}^{n} \lambda \, x_l \, a_l \quad \iff$$

$$\forall \, l \in \underline{n} : \sum_{k=1}^{n} a_{lk} \, x_k = \lambda \, x_l \, ,$$

also : λ ist Eigenwert von $F \quad \iff$

$$\begin{aligned} \exists \, x \in V \setminus \{0\} \quad &: \quad F(x) \quad = \quad \lambda \, x \quad \iff \\ \exists \, a \in K^n \setminus \{0\} \quad &: \quad A \cdot a \quad = \quad \lambda \, a \quad \iff \\ \exists \, a \in K^n \setminus \{0\} \quad &: \quad (A - \lambda \, E_n) a \quad = \quad 0 \quad . \end{aligned}$$

Bei gegebener Matrix A ist $(A - \lambda E_n) \cdot a = 0$ ein lineares homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$, und λ ist genau dann ein Eigenwert von F , wenn dieses Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung hat. Nach Satz 19.6.5 gilt also:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } F \quad \iff \quad \mathrm{Rg}\,(A - \lambda E_n) < n$$

und nach Satz 19.6.12 und Folgerung 20.3.7 :

$$\ldots \quad \iff \quad \det(A - \lambda E_n) \quad = \quad 0 \quad .$$

Hier hat man nun eine Gleichung mit der einen Unbekannten λ. Hierbei ist $A - \lambda E_n$ die Matrix bezüglich der Basis $\mathfrak{A}$ von

$$F - \lambda \, \mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_K(V,V) \quad ,$$

und nach Definition 20.4.2 ist

$$\det(F - \lambda \, \mathrm{id}_V) \quad = \quad \det(A - \lambda \, E_n) \quad ,$$

wobei es nach Bemerkung 20.4.1 nicht darauf ankommt, welche Basis $\mathfrak{A}$ man gewählt hat. Rechnet man sich die Determinante

$$\det(A - \lambda E_n) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

aus, so sieht man, dass man eine Polynomfunktion der Form

$$\det(A - \lambda E_n) \quad = \quad (-1)^n \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \lambda^j$$

hat, von der man die Nullstellen sucht, was für $K = \mathbb{R}$ und $n > 2$ Schwierigkeiten macht.

Definition 22.2.2 : Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei V ein $K-$Vektorraum mit $\dim_K V = n$ und $F \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, so heißt

$$P_F(x) \quad := \quad \det(F - x \,\mathrm{id}_V)$$

das **charakteristische Polynom von F**.

b) Ist $A \in M(n \times n, K)$, so heißt λ ein **Eigenwert von A**, wenn es ein $a \in K^n \setminus \{0\}$ gibt mit $A \cdot a = \lambda a$, und

$$P_A(x) \quad := \quad \det(A - x E_n)$$

heißt das **charakteristische Polynom der Matrix A**. □

Im Fall $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (nur in diesem Fall hatten wir in 11.5.3 den Grad definiert) ist $\deg P_F = \deg P_A = n$. In Bemerkung 22.2.1 haben wir nun gezeigt:

Folgerung 22.2.3 : Die Eigenwerte von $F \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ bzw. von $A \in M(n \times n, K)$, $n \in \mathbb{N}$, sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_F bzw. P_A .

Definition 22.2.4 : Sei V ein $K-$Vektorraum , $F \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ und $\lambda \in K$, dann heißt der Unterverktorraum

$$\mathrm{Eig}(F, \lambda) \quad := \quad \mathrm{Ker}(F - \lambda \,\mathrm{id}_V)$$

der **Eigenraum** von F bezüglich λ . □

Ein $\lambda \in K$ ist also genau dann ein Eigenwert von F , wenn $\mathrm{Eig}(F, \lambda) \neq \{0\}$ ist, und $\mathrm{Eig}(F, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der Eigenvektoren von F zum Eigenwert λ .

Folgerung 22.2.5 : Ist $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und A die Matrix von F bezüglich einer festen Basis $\mathfrak{A}$ von V , so ist

$$\dim \mathrm{Eig}(F, \lambda)$$

die Dimension des Lösungsraums des linearen homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n) \cdot x \quad = \quad 0 \quad .$$

Beispiel 22.2.6 : Sei

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \quad ,$$

so ist das charakteristische Polynom von A :

$$\det(A - x\,E_3) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} -x & -1 & 1 \\ -3 & -2-x & 3 \\ -2 & -2 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (-x)\cdot\det\begin{pmatrix} -2-x & 3 \\ -2 & 3-x \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 3-x \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & -2-x \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \quad x(2+x)(3-x) - 6x - 9 + 3x + 6 + 6 - 4 - 2x$$

$$= \quad -x^3 + x^2 + x - 1 \quad .$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms ist $\lambda_1 = 1$. Wenn man durch $x-1$ dividiert, erhält man

$$-x^3 + x^2 + x - 1 \quad = \quad (x-1)\cdot(-x^2+1) \quad ,$$

dadurch erhält man als weitere Nullstellen

$$\lambda_2 \quad = \quad 1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 \quad = \quad -1 \quad .$$

1 und -1 sind also die einzigen Eigenwerte von A. Wir wollen noch die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten bestimmen, also die Vektoren $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$A \cdot v \quad = \quad \pm 1\, v \quad .$$

Gesucht sind also die nichttrivialen Lösungen $v \in \mathbb{R}^3$ der linearen homogenen Gleichungssysteme

$$(A - (\pm 1)\,E_3)\cdot v \quad = \quad 0 \quad ,$$

was mit den Methoden aus §19 kein Problem ist:
a) Für $\lambda_{1,2} = 1$ haben wir

$$A - 1\,E_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Wenn wir das auf Zeilenstufenform bringen, sehen wir:

$$\operatorname{Rg}(A - 1E_3) = 1 \quad , \quad \text{also} \quad \dim \operatorname{Eig}(A,1) = 3 - 1 = 2 \quad ,$$

und Elemente aus $v \in \operatorname{Eig}(A,1)$ erhalten wir aus

$$-v_1 - v_2 + v_3 \quad = \quad 0 \quad ,$$

also $v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, $v_1 = v_2 - v_3$.

b) Für $\lambda_3 = -1$ haben wir

$$A + 1\,E_3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Wenn wir das auf Zeilenstufenform bringen, sehen wir :

$$\mathrm{Rg}\,(A + 1\,E_3) \ = \ 2 \quad , \quad \text{also} \quad \dim \mathrm{Eig}(A, -1) \ = \ 3 - 2 \ = \ 1 \quad ,$$

und Vektoren $v \in \mathrm{Eig}(A, -1)$ erhalten wir aus

$$v_1 - v_2 + v_3 \ = \ 0 \quad \wedge \quad -4v_2 + 6v_3 \ = \ 0 \quad ,$$

also $v_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, $\quad v_2 \ = \ \dfrac{3}{2} v_3 \quad , \quad v_1 \ = \ \dfrac{1}{2} v_3 \quad .$ □

Bemerkung 22.2.7 : Sei $\dim_K V \ = \ n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ sei diagonalisierbar. Nach Definition 22.1.4 gibt es dann eine Basis $\mathfrak{B}$ von V , so dass

$$B \quad := \quad M_B^B(F) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ist mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \quad ,$$

$$\text{also} \quad \det(F - x\,\mathrm{id}_V\,) \quad = \quad \det(B - x\,E_n) \quad = \quad \prod_{j=1}^{n} (x - \lambda_j) \quad ,$$

also ist $P_F(x)$ ein Produkt von Linearfaktoren. Wie wir in Beispiel 22.2.6 gesehen haben, kann ein Linearfaktor mehrfach auftreten:

Definition 22.2.8 : Sei $\mathbb{K} \ = \ \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $p \ : \ \mathbb{K} \ \longrightarrow \ \mathbb{K}$ eine Polynomfunktion, $p \neq 0$. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Es gibt ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}_0$ und ein $q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ mit

$$q(\lambda) \neq 0 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in \mathbb{K} \ : \ p(x) \ = \ (x - \lambda)^r \cdot q(x) \quad .$$

Dieses r heißt die **Vielfachheit der Nullstelle λ in p**, und wir schreiben

$$r \quad =: \quad \mu(p, \lambda) \quad .$$

Beispiel 22.2.9 : Ist $p \ : \ \mathbb{R} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$, $p(x) \ = \ (x - 3)^3 \cdot (x - 1)$, so ist

$$\mu(p, 1) \ = \ 1 \quad , \quad \mu(p, 3) \ = \ 3 \quad , \quad \mu(p, \lambda) \ = \ 0 \quad \text{für} \quad \lambda \notin \{1, 3\} \quad .$$

Hilfssatz 22.2.10 : Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum, $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt für das charakteristische Polynom $P_F(x)$:

$$\mu(P_F, \lambda) \quad \geq \quad \dim \mathrm{Eig}(F, \lambda) \quad .$$

Beweis : Sei $(v_j)_{j \in \underline{r}}$ mit $r \geq 0$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$, dann können wir diese Basis nach dem Basisergänzungssatz 19.2.14 ergänzen zu einer Basis

$$\mathfrak{B} \quad = \quad (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n) \quad \text{von} \quad V \quad .$$

Sei A die Matrix von F bezüglich $\mathfrak{B}$, so ist

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & | & \\ & \ddots & & | & * \\ 0 & & \lambda & | & \\ - & - & - & + & - \\ & 0 & & | & A' \end{pmatrix} \; r \text{ Zeilen}$$

r Spalten ,

da $F(v_j) = \lambda\, v_j$ für $j \in \underline{r}$ gilt. Dabei bedeutet $*$ irgendetwas. Das charakteristische Polynom kann man damit ausrechnen, etwa indem man nach der 1. Spalte entwickelt:

$$P_F(x) \quad = \quad \det(A - x\, E_n) \quad = \quad (\lambda - x)^r \cdot \det(A' - x\, E_{n-r}) \quad .$$

Daraus folgt

$$\mu(P_F, \lambda) \quad \geq \quad r \quad = \quad \dim \operatorname{Eig}(F, \lambda) \quad . \qquad \square$$

Beispiel 22.2.11 : Sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$F \quad : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad := \quad \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

dann ist $F \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2) des $\mathbb{R}^2$ hat F die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

also ist das charakteristische Polynom von F :

$$P_F(x) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \quad = \quad x^2 \quad = \quad (x - 0)^2 \quad .$$

Also ist $\mu(P_F, 0) = 2$ und $\mu(P_F, \lambda) = 0$ für $\lambda \neq 0$. Andererseits ist

$$\operatorname{Eig}(F, 0) \quad = \quad \operatorname{Ker} F \quad = \quad \mathbb{R}\, e_1 \quad , \quad \text{also} \quad \dim \operatorname{Eig}(F, 0) \quad = \quad 1 \quad ,$$

also gilt in diesem Fall

$$\mu(P_F, 0) \quad > \quad \dim \operatorname{Eig}(F, 0) \quad .$$

F ist nicht diagonalisierbar, denn da 0 der einzige Eigenwert von F ist, würde es sonst eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}^2$ geben, so dass F bezüglich $\mathfrak{B}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hätte, dann wäre aber $F = 0$. $\square$

Allgemein gilt das folgende Kriterium für Diagonalisierbarkeit:

Satz 22.2.12 : Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum und $F \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$. Dann sind gleichbedeutend die Aussagen :

(1) F ist diagonalisierbar ,

(2) a) das charakteristische Polynom P_F ist ein Produkt von Linearfaktoren , und

b) für alle Eigenwerte λ von F gilt $\dim \operatorname{Eig}\,(F, \lambda) = \mu(P_F, \lambda)$.

Beweis : Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von F , und für $j \in \underline{k}$ sei

$$(v_1^{(j)}, \ldots, v_{s_j}^{(j)}) \quad \text{eine Basis von} \quad \text{Eig}\,(F, \lambda_j) \quad ,$$

also $s_j = \dim \text{Eig}(F, \lambda_j)$. Dann ist

$$\mathfrak{B} \quad := \quad (v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \ldots, v_{s_2}^{(2)}, \ldots, v_1^{(k)}, \ldots, v_{s_k}^{(k)})$$

eine linear unabhängige Familie, denn sei

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_{ij}\, v_i^{(j)} \quad = \quad 0 \quad \text{mit} \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{K} \quad ,$$

dann gilt für

$$w_j \quad := \quad \sum_{i=1}^{s_j} \alpha_{ij}\, v_i^{(j)} \quad : \quad w_j = 0\,, \text{ oder } w_j \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_j \ .$$

Nach $(*)$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} 1 \cdot w_j \quad = \quad 0 \quad .$$

Nach Hilfssatz 22.1.6 sind nun Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig, also folgt aus dieser Gleichung

$$\forall\, j \in \underline{k} \quad : \quad w_j \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{und aus den Gleichungen}$$

$$\sum_{i=1}^{s_j} \alpha_{ij}\, v_i^{(j)} \quad = \quad 0 \quad \text{für} \quad j \in \underline{k} \quad \text{folgt dann}$$

$$\forall\, j \in \underline{k}\ \ \forall\, i \in \underline{s_j} \quad : \quad \alpha_{ij} \quad = \quad 0 \quad .$$

Sei nun $n := \dim V$.
$(1) \implies (2)$: Ist F diagonalisierbar, so gibt es eine Basis von V , die aus Eigenvektoren von F besteht. Ordnet man die Vektoren passend an, so ist es eine Basis der Form $\mathfrak{B}$. Dann ist

$$n \;=\; s_1 + \ldots + s_k \quad \overset{\text{Hilfssatz 22.2.10}}{\leq} \quad \mu(P_F, \lambda_1) + \ldots + \mu(P_F, \lambda_k) \;\leq\; n \quad ,$$

da P_F höchstens n Linearfaktoren hat wegen $\deg P_F = n$. Hier steht also überall das Gleichheitszeichen: P_F zerfällt in Linearfaktoren, und für alle $j \in \underline{k}$ gilt $s_j = \mu(P_F, \lambda_j)$.

$(2) \implies (1)$: Wenn a) und b) gelten, folgt

$$s_1 + \ldots + s_k \quad \overset{\text{b)}}{=} \quad \mu(P_F, \lambda_1) + \ldots + \mu(P_F, \lambda_k) \quad \overset{\text{a)}}{=} \quad n \quad ,$$

also ist $\mathfrak{B}$ nicht nur linear unabhängig, sondern sogar eine Basis von V , also F diagonalisierbar. $\square$

(22.2.13) Praktisches Verfahren zur Diagonalisierung eines $F \in$ Hom$_{\mathbb{K}}(V,V)$:

Sei V ein $K-$Vektorraum , $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{A}$ eine Basis von V . Sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$, und A die Matrix von F bezüglich $\mathfrak{A}$.

1.Schritt : Man bestimmt das charakteristische Polynom P_F von F und versucht, eine Linearfaktorzerlegung von P_F zu finden (was für $n \geq 3$ schwierig werden kann). Wenn man sicher ist, dass das nicht geht, ist F nicht diagonalisierbar, wegen Satz 22.2.12 (1). Wenn man eine Linearfaktorzerlegung angeben kann, kommt das zweite Hindernis :

2.Schritt : Man bestimmt für jeden Eigenwert λ von F die Dimension von $\mathrm{Eig}(F,\lambda)$, also die Dimension des Lösungsraums des linearen homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n) \cdot x \quad = \quad 0 \quad .$$

Wenn dann für alle Eigenwerte λ

$$\mu(P_F, \lambda) \quad = \quad \dim \mathrm{Eig}(F, \lambda)$$

gilt, ist F nach Satz 22.2.12 diagonalisierbar, und man bestimmt Basen aller $\mathrm{Eig}(F,\lambda)$. Diese Eigenvektoren bilden zusammen eine Basis $\mathfrak{B}$ von V , bezüglich der die Matrix $B := M_B^B(F)$ Diagonalform hat. Es gilt nach Bemerkung 19.4.16 :

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S \quad \text{mit} \quad S := T_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \quad .$$

S ist also die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$. Nach Formel (19.4.17) gilt , wenn

$$\mathfrak{A} = (a_l)_{l \in \underline{n}} \quad , \quad \mathfrak{B} = (b_j)_{j \in \underline{n}} \quad \text{ist :}$$

$$b_j = \sum_{l=1}^{n} s_{lj}\, a_l \quad \text{mit} \quad (s_{lj}) := S \quad .$$

Die Spaltenvektoren der Matrix S sind also die “Koordinatenvektoren” der neuen Basisvektoren b_j bezüglich der gegebenen alten Basis $\mathfrak{A}$.

Beispiel 22.2.14 : Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -y+z \\ -3x-2y+3z \\ -2x-2y+3z \end{pmatrix} \quad ,$$

dann ist F linear, und die Matrix von F bezüglich der kanonischen Basis $\mathfrak{K} = (e_1, e_2, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{also} \quad \text{(siehe Beispiel 22.2.6)}$$

$$P_F(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x-1)^2(x+1) \quad .$$

Also ist P_F ein Produkt von Linearfaktoren. 1 und -1 sind die einzigen Eigenwerte von F . Wie wir in Beispiel 22.2.6 gesehen haben, ist

$\dim \mathrm{Eig}(F,1) = 2$, und $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F,1)$,

$\dim \mathrm{Eig}(F,-1) = 1$, und $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F,-1)$.

Also ist

$$\mathfrak{B} \quad := \quad \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von F besteht. Mit der Transformationsmatrix

$$S \quad := \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$B \quad = \quad M_B^B(F) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt dann $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$, was man zur Kontrolle nachrechnen sollte !

22.3 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit einem Skalarprodukt s, dann ist also $||a||$ für $a \in V$ definiert. Unter den Elementen $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ interessiert man sich besonders für solche, die an der Norm nichts ändern, für die also

$$\forall\, a \in V \quad : \quad ||F(a)|| = ||a|| \quad \text{gilt:}$$

Definition 22.3.1 : Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s. Eine lineare Abbildung $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ heißt eine **Isometrie** (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch **orthogonale** , für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch **unitäre** lineare Abbildung), wenn

$$\forall\, v, w \in V \quad : \quad s(F(v), F(w)) \quad = \quad s(v,w) \quad \text{gilt.}$$

Folgerung 22.3.2 : Ist V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s , $||\ \ ||$ die durch s definierte Norm und $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ eine Isometrie, so gilt

a) $\forall\, v \in V \quad : \quad ||F(v)|| = ||v||$.

b) Ist λ ein Eigenwert von F , so ist $|\lambda| = 1$.

c) $\forall\, v, w \in V \quad : \quad (v \perp w \iff F(v) \perp F(w))$.

d) F ist injektiv.

e) Ist V endlichdimensional, so ist F sogar bijektiv, und F^{-1} ist wieder eine Isometrie.

Beweis : a) und c) sind triviale Folgerungen aus Definition 22.3.1.
b) Sei $v \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, und es gelte

$$F(v) \quad = \quad \lambda\, v \quad , \quad \text{dann folgt nach a) :}$$

$$||v|| \quad = \quad ||F(v)|| \quad = \quad ||\lambda\, v|| \quad = \quad |\lambda| \cdot ||v||$$

und wegen $||v|| \neq 0 \quad : \quad |\lambda| \,=\, 1$.
d) Sei $v \in \ \mathrm{Ker}F$, dann ist $F(v) \,=\, 0$, also

$$0 \quad = \quad ||F(v)|| \quad \overset{\text{a)}}{=} \quad ||v|| \quad , \quad \text{also} \quad v \,=\, 0 \quad .$$

Nach Satz 19.3.4 ist F injektiv.
e) Nach der Dimensionsformel (Satz 19.3.5) gilt

$$\dim F(V) \quad = \quad \dim V - \dim\, \mathrm{Ker}F \quad \overset{\text{d)}}{=} \quad \dim V \quad ,$$

also $F(V) \,=\, V$, und damit ist F sogar surjektiv. Also hat man die - ebenfalls lineare - Umkehrfunktion

$$F^{-1} \quad : \quad V \longrightarrow V \quad , \quad \text{und es gilt}$$

$$\forall\, v, w \in V \,:\, s(F^{-1}(v), F^{-1}(w)) \,=\, s(F(F^{-1}(v)), F(F^{-1}(w))) \,=\, s(v,w)\,,$$

also ist auch F^{-1} eine Isometrie. $\square$

Definition 22.3.3 : Sei $n \in \mathbb{N}$ Eine Matrix
a) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ heißt **orthogonal** , falls $A^{-1} \,=\, {}^t A$,
b) $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ heißt **unitär** , falls $A^{-1} \,=\, {}^t\overline{A}$ ist.
Für jede orthogonale und jede unitäre Matrix A gilt dann

$$A \cdot {}^t\, \overline{A} \quad = \quad E_n \quad , \quad \text{also}$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} \quad = \quad 1 \quad ,$$

$$|\det A|^2 \quad = \quad 1 \quad , \quad \text{also} \quad |\det A| \,=\, 1 \quad .$$

Fr orthogonale Matrizen gibt es also nur die beiden Möglichkeiten
$\det A \,=\, 1$ oder $\det A \,=\, -1$.

Satz und Definition 22.3.4 : Die Mengen

$$O(n) \quad := \quad \{\ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \ |\ A^{-1} \,=\, {}^t A\ \} \quad ,$$
$$SO(n) \quad := \quad \{\ A \in O(n) \ |\ \det A \,=\, 1\ \} \quad \text{und}$$
$$U(n) \quad := \quad \{\ A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \ |\ A^{-1} \,=\, {}^t\overline{A}\ \}$$

sind bezüglich der Matrizenmultiplikation Gruppen. Sie heißen **orthogonale**, **spezielle orthogonale** bzw. **unitäre** Gruppe.

Beweis : a) Für $U(n)$: Für $A, B \in U(n)$ ist

$${}^t\overline{(A \cdot B)} \,=\, {}^t(\overline{A} \cdot \overline{B}) \,=\, {}^t\overline{B} \cdot {}^t\, \overline{A} \,=\, B^{-1} \cdot A^{-1} \,=\, (A \cdot B)^{-1} \quad ,$$

also $A \cdot B \in U(n)$, und $\cdot$ ist eine Verknüpfung auf $U(n)$. Das Assoziativgesetz gilt, da es in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gilt. Wegen

$$^t\overline{E_n} \quad = \quad E_n$$

ist $E_n \in U(n)$. Für $A \in U(n)$ gilt auch

$$^t(\overline{A^{-1}}) \quad = \quad ^t((\overline{A})^{-1}) \quad = \quad (^t(\overline{A}))^{-1} \quad = \quad (A^{-1})^{-1} \quad ,$$

also $A^{-1} \in U(n)$. Also ist $U(n)$ eine Gruppe.

b) Für $O(n)$ geht das wie unter a), nur ohne $\overline{}$.

c) Aus dem Determinanten-Multiplikationssatz folgt, dass auch $SO(n)$ eine Gruppe ist. □

Satz 22.3.5 : Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s und sei $\mathcal{B} = (v_j)_{j\in\underline{n}}$ eine **Orthonormal**basis von V . Sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ und $M_B^B(F)$ die Matrix von F bezüglich $\mathcal{B}$. Dann gilt

für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: F ist orthogonal $\iff$ $M_B^B(F)$ ist orthogonal ,

für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: F ist unitär $\iff$ $M_B^B(F)$ ist unitär.

Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lasse man die $\overline{}-$ Striche weg) : Da $(v_j)_{j\in\underline{n}}$ eine Orthonormalbasis von V ist, gilt für $k, j \in \underline{n}$:

$$s(v_k, v_j) \quad = \quad \delta_{kj} = \quad \begin{cases} 0 & \text{fr } k \neq j \\ 1 & \text{für } k = j \end{cases} \quad ,$$

also wenn $F(v_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}\, v_k$ ist mit $A := M_B^B(F)$:

$$\begin{aligned} F \quad \text{unitär} \quad &\overset{(*)}{\iff} \quad \forall\, r, j \in \underline{n} \quad : \quad s(v_r, v_j) \;=\; s(F(v_r), F(v_j)) \\ &\iff \quad \forall\, r, j \in \underline{n} \quad : \quad \delta_{rj} \quad = \quad \sum_{k,l=1}^{n} \overline{a_{kr}}\, a_{lj}\, s(v_k, v_l) \\ &\qquad\qquad = \quad \sum_{k,l=1}^{n} \overline{a_{kr}}\, a_{lj}\, \delta_{kl} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kr}}\, a_{kj} \\ &\iff \quad E_n \quad = \quad ^t\overline{A} \cdot A \quad \wedge \quad E_n \quad = \quad A \cdot ^t\overline{A} \\ &\iff \quad A^{-1} \quad = \quad ^t\overline{A} \quad \iff \quad A \quad \text{unitär} \quad . \end{aligned}$$

Dabei muss höchstens noch $\overset{(*)}{\iff}$ genauer begründet werden: “ $\Longrightarrow$ ” ist trivial, und “ $\Longleftarrow$ ” folgt aus der Linearität von F und daraus, dass s ein Skalarprodukt ist. □

Satz 22.3.6 : Ist F eine Isometrie eines endlichdimensionalen $\mathbb{C}-$Vektorraums V mit Skalarprodukt, so besitzt V eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von F besteht.

Beweis durch Induktion nach $n := \dim V$: Für $n = 0$ können wir die leere Familie als Basis nehmen; dafr ist der Satz richtig. Für $n-1$ sei der Satz richtig. Sei nun $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. Für das charakteristische Polynom P_F von F gilt $P_F \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ und $\deg P_F = n$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 11.5.7) zerfällt P_F in Linearfaktoren, d.h. es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

$$P_F(x) \quad = \quad \pm(x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n) \quad .$$

Sei v_1 ein Eigenvektor zu λ_1 . Dann ist $v_1 \neq 0$, und da auch $\frac{1}{||v_1||}v_1$ ein Eigenvektor zu λ_1 ist , können wir $||v_1|| = 1$ annehmen. Sei

$$W \quad := \quad \{ \ w \in V \ | \ s(v_1, w) \quad = \quad 0 \ \} \quad ,$$

dann ist W ein Untervektorraum von V . Es gilt

$$F(W) \quad \subset \quad W \quad ,$$

denn sei $w \in W$, dann gilt

$$\lambda_1 \cdot s(F(w), v_1) \ = \ s(F(w), \lambda_1 v_1) \ = \ s(F(w), F(v_1)) \ = \ s(w, v_1) \quad = \quad 0$$

und nach Folgerung 22.3.2 b) ist $|\lambda_1| = 1$, also $\lambda_1 \neq 0$, also

$$s(F(w), v_1) \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{also} \quad F(w) \in W \quad .$$

Also haben wir die lineare Abbildung

$$F|_W \quad : \quad W \longrightarrow W \quad ,$$

die wieder eine Isometrie ist, denn für $w, w' \in W$ gilt

$$s(F|_W(w), F|_W(w')) \quad = \quad s(F(w), F(w')) \quad = \quad s(w, w') \quad .$$

Nun ist

$$\dim_{\mathbb{C}} W \quad = \quad n - 1 \quad ,$$

denn nach dem Orthonormalisierungssatz 21.3.3 können wir (v_1) zu einer Orthonormalbasis

$$(v_1, w_2, \dots, w_n)$$

von V ergänzen, und $(w_2, \dots, w_n)$ ist dann eine Basis von W . W besitzt nach Induktionsannahme eine Orthonormalbasis $(v_2, \dots, v_n)$, die aus Eigenvektoren von $F|_W$, also aus Eigenvektoren von F, besteht. Wegen $\mathbb{C}v_1 \perp W$ ist dann $(v_1, \dots, v_n)$ die gewünschte Basis von V . □

Folgerung 22.3.7 : Jede Isometrie eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V ist diagonalisierbar.
Beweis : Das gilt nach Satz 22.3.6 und Definition 22.1.2 . □

Folgerung 22.3.8 : Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $A \in U(n)$ gibt es ein $S \in U(n)$ mit

$$^t\overline{S} \cdot A \cdot S \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei die $\lambda_j \in \mathbb{C}$ sind mit $|\lambda_j| = 1$ für $j \in \underline{n}$.
Beweis : Sei $F \ : \ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \ , \ F(x) \ := \ A \cdot x \ ,$ dann ist

$$A \quad = \quad M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}(F) \quad ,$$

wobei $\mathfrak{K}$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^n$ ist. $\mathfrak{K}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $< \ , \ >$ also ist F ein unitärer Endomorphismus des $\mathbb{C}^n$ nach Satz 22.3.5. Nach Satz 22.3.6 gibt es nun eine Orthonormalbasis

$$\mathfrak{B} \quad = \quad (v_1, \ldots, v_n) \quad \text{des} \quad \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad < \, , \, > \quad ,$$

die aus Eigenvektoren von F besteht :

$$\exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \quad \forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad (F(v_j) \ = \ \lambda_j v_j \ \wedge \ |\lambda_j| \ = \ 1\,) \quad ,$$

letzteres nach Folgerung 22.3.2 b). Also ist

$$B \quad := \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad ,$$

und nach der Formel für die Koordinatentransformation in 19.4.17 gilt

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad S^{-1} \cdot M^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}(F) \cdot S \quad , \quad \text{also} \quad B \quad = \quad S^{-1} \cdot A \cdot S \quad , \quad \text{mit}$$

$$S \quad := \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{K}}(\mathrm{id}_V) \quad = \quad T^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{K}} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \quad ,$$

also nach (19.4.16) : $S \quad = \quad (s_{kj})$ mit

$$v_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} s_{kj} e_k \quad .$$

Da sowohl $\mathfrak{B}$ als auch $\mathfrak{K}$ Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^n$ sind, gilt für $r, j \in \underline{n}$:

$$\delta_{rj} \quad = \quad < v_r, v_j > \quad = \quad < \sum_{l=1}^{n} s_{lr} e_l, \sum_{k=1}^{n} s_{kj} e_k >$$

$$= \quad \sum_{k,l=1}^{n} \overline{s_{lr}}\, s_{kj} < e_l, e_k > \quad = \quad \sum_{k,l=1}^{n} \overline{s_{lr}}\, s_{kj} \delta_{lk} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{s_{kr}}\, s_{kj} \quad , \qquad \text{also}$$

$$^t\overline{S} \cdot S \quad = \quad E_n \quad , \qquad \text{also} \quad S^{-1} \quad = \quad {}^t\overline{S} \quad , \quad S \in U(n) \quad ,$$

$$B \quad = \quad {}^t\overline{S} \cdot A \cdot S \quad . \qquad \square$$

22.4 Selbstadjungierte Endomorphismen

Definition 22.4.1 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s . Ein $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ heißt **selbstadjungiert** , wenn

$$\forall\, v, w \in V \quad : \quad s(F(v), w) \quad = \quad s(v, F(w)) \quad \text{gilt.}$$

Satz 22.4.2 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt s , $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$ und

$\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis von V . Dann gilt:

F selbstadjungiert $\iff$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ ist symmetrisch (für $\mathbb{K} \ = \ \mathbb{R}$)
bzw. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ ist hermitesch (für $\mathbb{K} \ = \ \mathbb{C}$) .

Beweis : Sei $\mathfrak{B} \quad = \quad (v_1, \ldots, v_n)$ und

$$A \quad := \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) \quad , \quad \text{dann gilt}$$

$$\forall\, k \in \underline{n} \quad : \quad F(v_k) \quad = \quad \sum_{r=1}^{n} a_{jk} v_j \quad , \qquad \text{also} \quad :$$

F selbstadjungiert $\iff$

$$\forall\, l,k \in \underline{n} \quad : \quad s(F(v_l), v_k) \quad = \quad s(v_l, F(v_k)) \quad \iff$$

$$\forall\, l,k \in \underline{n} \quad : \quad \sum_{r=1}^{n} \overline{a_{jl}} s(v_j, v_k) \quad = \quad \sum_{r=1}^{n} a_{jk} s(v_l, v_j) \quad \iff$$

$$\forall\, l,k \in \underline{n} \quad : \quad \sum_{r=1}^{n} \overline{a_{jl}} \delta_{jk} \quad = \quad \sum_{r=1}^{n} a_{jk} \delta_{lj} \quad \iff$$

$$\forall\, l,k \in \underline{n} \quad : \quad \overline{a_{kl}} \quad = \quad a_{lk} \quad \iff$$

$\overline{A} \;=\; {}^{t}A \iff A$ ist symmetrisch bzw. hermitesch. □

Hilfssatz 22.4.3 : Ist $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ symmetrisch bzw. hermitesch, so sind alle Eigenwerte von A reell.

Beweis : Wir nehmen den $\mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Allgemein gilt für $v \,=\, {}^{t}(v_1, \ldots, v_n) \quad , \quad w \,=\, {}^{t}(w_1, \ldots, w_n) \,\in\, \mathbb{K}^n$:

$$< A \cdot v, w > \quad = \quad \left\langle \left(\sum_{r=1}^{n} a_{kj} v_j \right)_{k \in \underline{n}} , w \right\rangle \quad = \quad \sum_{k,j=1}^{n} \overline{a_{kj}}\, \overline{v_j}\, w_k$$

$$= \quad \left\langle v, \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}} w_k \right)_{j \in \underline{n}} \right\rangle \quad = \quad < v, {}^{t}\overline{A} \cdot w > \quad ,$$

und wenn A symmetrisch bzw. hermitesch ist:

$$< A \cdot v, w > \quad = \quad < v, A \cdot w > \quad ,$$

und wenn $A \cdot v \,=\, \lambda v$ ist, mit $v \neq 0$, dann folgt

$$\overline{\lambda} < v, v > = < \lambda v, v > = < Av, v > = < v, Av > = < v, \lambda v > = \lambda < v, v > ,$$

also $\lambda \,=\, \overline{\lambda}$. □

Satz 22.4.4 : Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt, $\dim_{\mathbb{K}} V \,=\, n \in \mathbb{N}$, und sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$ selbstadjungiert. Dann gilt für das charakteristische Polynom von F:

$$\exists\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \quad : \quad P_F(x) \,=\, (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k) \quad .$$

Beweis : Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wissen wir, dass das charakteristische Polynom ein Produkt von Linearfaktoren ist, und die Nullstellen von P_F sind die Eigenwerte von F. Nach Hilfssatz 22.4.3 sind die λ_k , $k \in \underline{n}$, reell.

Also ist die Behauptung richtig.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann wählen wir eine bezüglich s orthonormale Basis $\mathfrak{B}$ von V . Dafür ist nach Satz 22.4.2

$$A \quad := \quad M_B^B(F)$$

eine symmetrische Matrix aus $M(n \times n, \mathbb{R})$. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist A auch Element von $M(n \times n, \mathbb{C})$, und als solche ist A hermitesch. A beschreibt also bezüglich der kanonischen Basis $\mathfrak{K}$ des $\mathbb{C}^n$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung

$$F_{\mathbb{C}} \quad : \quad \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad M_K^K(F_{\mathbb{C}}) = A \quad .$$

Nach dem eben für $\mathbb{C}$ Bewiesenen gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$P_{F_{\mathbb{C}}}(x) \quad = \quad (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k) \quad .$$

Nun ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{F_{\mathbb{C}}}(x) \quad = \quad \underset{\in M(n \times n, \mathbb{C})}{\det(A - xE_n)} \quad = \quad \underset{\in M(n \times n, \mathbb{R})}{\det(A - xE_n)} \quad = \quad P_F(x) \quad ,$$

also haben wir

$$P_F(x) \quad = \quad (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (x - \lambda_k) \quad ,$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, wie behauptet. □

Bemerkung 22.4.5 : Der Kunstgriff bei Teil b) des Beweises von Satz 22.4.4 besteht, wenn man es genau betrachtet, darin, dass man die Matrix

$$A \quad = \quad (a_{kj}) \quad = \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$$

des Endomorphismus F des $\mathbb{R}-$Vektorraums
V mit der Basis $\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$
auch auffassen kann als Matrix eines Endomorphismus der **Komplexifizierung** $V_{\mathbb{C}}$ von V . Wir definieren $V_{\mathbb{C}}$ als

$$V_{\mathbb{C}} \quad := \quad \mathbb{C}^n \quad , \quad \text{mit der kanonischen Basis } (e_1, \ldots, e_n) \; .$$

Dann ist aber λv auch für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ definiert, und $V_{\mathbb{C}}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, mit der Basis
$(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$; also ist $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$.
Dann ist

$$\varphi \quad : \quad V \longrightarrow V_{\mathbb{C}} \quad , \quad \varphi(\sum_{r=1}^{n} \alpha_j v_j) \quad := \quad \sum_{r=1}^{n} \alpha_j e_j$$

ein injektiver $\mathbb{R}-$Vektorraum-Homomorphismus. Wir können daher

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_j v_j \in V \quad \text{mit} \quad \sum_{r=1}^{n} \alpha_j e_j \in V_{\mathbb{C}}$$

identifizieren, dann wird $V \subset V_{\mathbb{C}}$, $v_j = e_j \in V_{\mathbb{C}}$ und

$$V_{\mathbb{C}} \quad = \quad \left\{ \sum_{r=1}^{n} \alpha_j v_j \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{C} \right\} \quad .$$

Es ist dann $(v_1, \ldots, v_n)$ eine $\mathbb{C}-$Basis von $V_{\mathbb{C}}$, und man kann das Skalarprodukt s von V fortsetzen zu einem Skalarprodukt $s_{\mathbb{C}}$ auf $V_{\mathbb{C}}$ durch

$$s_{\mathbb{C}}\left(\sum_{r=1}^{n}\alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n}\beta_k v_k\right) \quad := \quad \sum_{j,k=1}^{n}\overline{\alpha_j}\beta_k\, s(v_j,v_k) \quad .$$

Zu $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}V$ hat man das durch

$$F_{\mathbb{C}} \quad : \quad V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}} \quad , \quad F_{\mathbb{C}}(v_j) \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, v_k$$

definierte $F_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\, V_{\mathbb{C}}$, und es ist offenbar

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_{\mathbb{C}}) \quad = \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad A \quad . \quad \text{Wegen}$$

$$A \quad = \quad {}^tA \quad = \quad {}^t\overline{A}$$

ist $F_{\mathbb{C}}$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von $V_{\mathbb{C}}$.

<u>**Satz 22.4.6 :**</u> Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum mit Skalarprodukt, und sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V)$ selbstadjungiert. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, bestehend aus Eigenvektoren von F.
<u>**Beweis**</u> durch Induktion nach $n := \dim V$:
Induktionsanfang : Für $n = 0$ ist der Satz trivial.
Induktionsschluss : Sei $n \in \mathbb{N}$, und für kleinere Dimension als n sei der Satz wahr.Sei nun $\dim V = n$. Nach Satz 22.4.4 haben wir eine Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms von F:

$$P_F(x) \quad = \quad (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k) \quad \text{mit} \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \quad .$$

Sei $v_1 \in V$ mit $||v_1|| = 1$ ein Eigenvektor zu λ_1 , dann setzen wir

$$W \quad := \quad \{\ w \in V \ |\ s(v_1,w) = 0\ \} \quad .$$

Wie im Beweis von Satz 22.3.6 zeigt man: $\dim_{\mathbb{K}} W = n-1$. Entscheidend ist nun, dass auch noch

$$(*) \qquad F(W) \subset W$$

gilt, denn dann können wir auf

$$F|_W \quad : \quad W \longrightarrow W$$

die Induktionsannahme anwenden: Es gibt eine Orthonormalbasis $(v_2,\ldots,v_n)$ von W , die aus Eigenvektoren von $F|_W$, also aus Eigenvektoren von F, besteht, und $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ ist dann die gewünschte Orthonormalbasis von V .
Beweis von $(*)$: Ist $w \in W$, so gilt

$$s(v_1,F(w)) \quad = \quad s(F(v_1),w) \quad = \quad s(\lambda_1 v_1,w) \quad = \quad \overline{\lambda_1}\, s(v_1,w) \quad = \quad 0 \quad ,$$

also $F(w) \in W$. $\square$

Folgerung 22.4.7 : Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitären Vektorraums ist diagonalisierbar.
Beweis : Das folgt aus Satz 22.4.6 und Definition 22.1.2. □

Folgerung 22.4.8 : Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix, so gibt es eine orthogonale bzw. unitäre Matrix S , so dass

$$ {}^t\overline{S} \cdot A \cdot S \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{ist.} $$

Der **Beweis** geht ähnlich wie der von Folgerung 22.3.9: Satz 22.4.6 sagt zunächst nur, dass es ein $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ mit

$$ S^{-1} \cdot A \cdot S \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

gibt, aber S ist die Transformationsmatrix von der kanonischen Basis $\mathfrak{K}$ des $\mathbb{K}^n$ zu der nach Satz 22.4.6 existierenden Orthonormalbasis
$\mathfrak{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{K}^n$; es gilt also

$$ v_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} s_{kj} e_k \quad , $$

die Spaltenvektoren s^j von S sind die v_j . Sie bilden also eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ mit $< \ , \ >$, es gilt

$$ \forall\, j, l \in \underline{n} \quad : \quad \sum_{k=1}^{n} \overline{s_{kj}}\, s_{kl} \quad = \quad \delta_{jl} \quad , \quad \text{also} $$

$$ {}^t\overline{S} \cdot S \quad = \quad E_n \quad , $$

also gilt $S^{-1} = {}^t\overline{S}$, d.h. S ist orthogonal bzw. unitär. □

22.5 Sylvesterscher Trägheitssatz

Bemerkung 22.5.1 : Wir wollen das Ergebnis von Folgerung 22.4.8 über hermitesche Matrizen anwenden, um zu beweisen, dass man die in 21.4.1 definierte "darstellende Matrix einer hermiteschen Form" s , also

$$ M_{\mathcal{B}}(s) \quad = \quad (s(v_k, v_j))_{(k,j) \in \underline{n} \times \underline{n}} \quad \text{für} \quad \mathcal{B} = (v_j)_{j \in \underline{n}} $$

durch Übergang zu einer anderen Basis $\mathfrak{A}$ auf Diagonalform bringen kann.

Satz 22.5.2 : Sei s eine symmetrische Bilinearform (bzw. hermitesche Form) auf dem $\mathbb{K}-$Vektorraum V mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$, und $A := M_{\mathcal{A}}(s)$ die darstellende Matrix von s bezüglich einer Basis $\mathfrak{A}$. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit den Eigenschaften:
(1) $M_{\mathcal{B}}(s)$ ist eine Diagonalmatrix, d.h.

$$M_{\mathcal{B}}(s) \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad .$$

(2) Die Transformationsmatrix S des Basiswechsels von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist orthogonal (bzw. unitär).

(3) Die Diagonalelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $M_{\mathcal{B}}(s)$ sind die Eigenwerte von A.

Beweis : A ist eine symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix, also gibt es nach nach Folgerung 22.4.8 eine orthogonale (bzw. unitäre) Matrix S , so dass

$$B \quad := \quad {}^t\overline{S} \cdot A \cdot S$$

eine Diagonalmatrix ist. Sei $\mathfrak{A} = (a_k)_{k \in \underline{n}}$, dann setzen wir

$$b_j \quad := \quad \sum_{k=1}^{n} s_{kj} a_k \quad \text{für} \quad j \in \underline{n} \quad ,$$

dann ist S die Transformationsmatrix $T_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}$, und nach dem Transformationssatz 21.4.7 gilt

$$M_{\mathcal{B}}(s) \quad = \quad {}^t\overline{S} \cdot \, M_{\mathcal{A}}(s) \cdot S \quad ,$$

also wegen ${}^t\overline{S} = S^{-1}$:

$$B \quad = \quad S^{-1} \cdot A \cdot S \quad ,$$

also haben A und B die gleichen Eigenwerte, womit auch (3) bewiesen ist. □

Folgerung 22.5.3 : Eine symmetrische Bilinearform bzw. hermitesche Form s auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorraum V ist genau dann positiv definit, wenn für eine Basis $\mathcal{B}$ von V alle Eigenwerte von $M_{\mathcal{B}}(s)$ positiv sind.

Beweis : Nach Satz 22.5.2 gibt es zur Basis $\mathfrak{B}$ eine Basis $\mathfrak{A} = (a_k)_{k \in \underline{n}}$, so dass $M_{\mathcal{A}}(s)$ und $M_{\mathcal{B}}(s)$ gleiche Eigenwerte haben, und

$$M_{\mathcal{A}} \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad = \quad (s(a_k, a_j))_{(k,j) \in \underline{n} \times \underline{n}}$$

ist, mit $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} s \text{ positiv definit} \quad & \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, k \in \underline{n} \quad : \quad s(a_k, a_k) \, > \, 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \underline{n} \quad : \quad \lambda_k \, > \, 0 \quad . \end{aligned}$$

Bei $(*)$ ist " $\Longrightarrow$ " klar. " $\Longleftarrow$" folgt so: Sei $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \in V \setminus \{0\}$ beliebig, dann ist

$$s(v,v) \, = \, \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\alpha_k} \, \alpha_l \, s(a_k, a_l) \, = \, \sum_{k,l=1}^{n} \overline{\alpha_k} \, \alpha_l \, \delta_{kl} \, \lambda_k \, = \, \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \, \lambda_k \, > \, 0 \quad . \quad \square$$

Bemerkung 22.5.4 : Hat man einen $n-$ dimensionalen $\mathbb{K}-$Vektorraum mit zwei Basen

$$\mathfrak{A} \quad = \quad (a_k)_{k\in\underline{n}} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \quad = \quad (b_j)_{j\in\underline{n}} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$\forall\, j \in \underline{n} \quad : \quad b_j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} s_{kj}\, a_k \quad \text{mit} \quad S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \quad \text{ist, und}$$

a) eine **lineare Abbildung** $F \ : \ V \longrightarrow V$, so gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \quad = \quad S^{-1} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) \cdot S \quad .$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ haben die gleichen Eigenwerte, da

$P_A \quad = \quad P_{S^{-1}\cdot A\cdot S}$ fr beliebiges $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$ gilt.

b) eine **hermitesche Form** $s \ : \ V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$, so gilt nach Satz 21.4.7:

$$M_{\mathcal{B}} \quad = \quad {}^t\overline{S} \cdot M_{\mathcal{A}} \cdot S \quad .$$

$M_{\mathcal{A}}$ und $M_{\mathcal{B}}$ haben im Allgemeinen nicht die gleichen Eigenwerte (es sei denn, S ist orthogonal bzw. unitär, also ${}^t\overline{S} = S^{-1}$) , die Matrizen A und ${}^t\overline{S}\cdot A\cdot S$ haben für $S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ und $A \in M(n\times n,\mathbb{K})$ i.A. verschiedene Eigenwerte. Aber immerhin ändern sich die Vorzeichen bei der Transformation $A \longmapsto {}^t\overline{S}\cdot A\cdot S$ nicht, genauer :

(22.5.5) Sylvestersches Trägheitsgesetz : Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum und s eine hermitesche Form auf V . Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ Basen von V und fr $j \in \{1,2\}$

$$A_j \quad := \quad M_{\mathfrak{A}_j}(s) \quad ,$$

k_j die Anzahl der positiven Eigenwerte von A_j und
l_j die Anzahl der negativen Eigenwerte von A_j . Dann gilt

a) $k_1 \quad = \quad k_2$,
b) $l_1 \quad = \quad l_2$ und
c) $\mathrm{Rg}\ A_1 \quad = \quad \mathrm{Rg}\, A_2$.

Den **Beweis** finden Sie etwa bei G.Fischer , Lineare Algebra, Kap. 5.7 . □

22.6 Lorentz-Transformation

(22.6.1) Wir kennen aus (21.2.11) den $\mathbb{R}^4$ mit der nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform

$$s(a,b) \quad = \quad \sum_{k=1}^{3} a_k b_k \ - \ a_4 b_4$$

$$\text{für} \quad a \ = \ {}^t(a_1,a_2,a_3,a_4) \quad , \quad b \ = \ {}^t(b_1,b_2,b_3,b_4) \ \in \ \mathbb{R}^4 \quad :$$

Definition 22.6.2 : Den $\mathbb{R}^4$ mit der in (21.2.11) definierten symmetrischen Bilinearform s bezeichnet man als den **Minkowski-Raum** V_4 . Die $\mathbb{R}-$linearen Abbildungen

$$F \quad : \quad \mathbb{R}^4 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad s(F(a),F(b)) \ = \ s(a,b)$$

heißen **Lorentz-Transformationen** von V_4 . Sie zeigen als Übungsaufgabe, dass

$$G \quad := \quad \left\{ \ F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \ \middle| \ F \ \text{ ist Lorentz-Transformation } \right\}$$

eine Gruppe ist, die **Lorentz-Gruppe** . Zu G gehören (was Sie auch als Übungsaufgabe beweisen) die linearen Abbildungen F_β , die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ beschrieben werden durch die Matrix

$$L_\beta \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}$$

für alle $\beta \in (-1, 1)$. Die F_β heißen **spezielle Lorentz-Transformationen**.

In der Relativitätstheorie beschreiben die F_β den Übergang von einem "Inertialsystem" zu einem anderen, das sich bezüglich des ersten geradlinig gleichförmig bewegt, mit der Geschwindigkeit

$$(0, 0, \beta \cdot c) \quad , \quad \text{wobei} \quad c \quad \text{die Lichtgeschwindigkeit ist.} \qquad \square$$

§19 Vektorräume

19.7 Quotientenvektorräume

Definition 19.7.1 : Sei K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum und W ein Untervektorraum von V . Dann setzt man

$$V/_W \quad := \quad \{ \ v + W \ | \ v \in V \ \} \quad , \quad \text{wobei}$$

$$v + W \quad := \quad \{ \ v + w \ | \ w \in W \ \} \quad \text{ist} ,$$

und sagt dafür: **V modulo W** .

Die Elemente von $V/_W$ sind dann Teilmengen von V . Nehmen wir als Beispiel

$$V \quad := \quad \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad W \quad := \quad \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

dann sind die Elemente von $V/_W$ Geraden, die zu $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel sind.

- Wann sind zwei Elemente aus $V/_W$ gleich ?

Folgerung 19.7.2 : Für zwei Elemente $u + W$, $v + W \in V/_W$ gilt

$$u + W \ = \ v + W \quad \Longleftrightarrow \quad u - v \in W \quad .$$

Beweis : " $\Longrightarrow$ " : Sei $u + W = v + W$. Der Nullvektor 0 liegt in W , also

$$u + 0 \in u + W \;=\; v + W \;=\; \{\; v + w \;|\; w \in W \;\} \quad ,$$

also gibt es ein $w_1 \in W$ mit

$$u \;=\; v + w_1 \quad , \qquad \text{also} \quad u - v \;=\; w_1 \in W \quad .$$

" $\Longleftarrow$ " : Sei $u - v \in W$ und $w_1 := u - v$. Ist $x \in u + W$, dann gibt es ein $w_2 \in W$ mit $x = u + w_2$, also

$$x \;=\; u - (u - v) + w_1 + w_2 \;=\; v + (w_1 + w_2) \in v + W \quad ,$$

denn W ist ein Untervektorraum. Also gilt $u + W \subset v + W$, und analog : $v + W \subset u + W$. $\square$

$V/_W$ lässt sich selbst wieder zu einem $K-$Vektorraum machen :

Satz und Definition 19.7.3 : Definiert man für

$$u + W \quad , \quad v + W \;\in\; V/_W \quad \text{und} \quad \lambda \in K \quad :$$

(1) $(u + W) + (v + W) \;:=\; (u + v) + W$ und
(2) $\lambda\,(u + W) \;:=\; (\lambda u) + W$,
so wird $V/_W$ ein $K-$Vektorraum. $V/_W$ heißt der **Quotientenvektorraum** von V modulo W .

Beweis : Das einzige Problem liegt darin, zu zeigen, dass durch (1) und (2) überhaupt in eindeutiger Weise Abbildungen

$$V/_W \times V/_W \;\longrightarrow\; V/_W \quad \text{und} \quad K \times V/_W \;\longrightarrow\; V/_W$$

definiert sind; es kann ja

$$u + W \;=\; u' + W \quad \text{und} \quad v + W \;=\; v' + W$$

gelten, ohne dass $u = u'$ und $v = v'$ gilt. Dann hat man aber nach Folgerung 19.7.2 :

$u - u' \in W$ und $v - v' \in W$,

und da W ein Untervektorraum ist, auch

$u - u' + v - v' \in W$, also $(u + v) - (u' + v') \in W$, und
$\lambda\,(u - u') \in W$, also $\lambda u - \lambda u' \in W$,

und wiederum nach Folgerung 19.7.2 :

$(u + v) + W \;=\; (u' + v') + W$ und
$(\lambda u) + W \;=\; (\lambda u') + W$.

Also sind durch (1) und (2) in eindeutiger Weise Addition und Multiplikation mit Skalaren auf $V/_W$ definiert. Die Vektorraumaxiome nachzurechnen, ist ganz einfach, z.B. z.B.

(V2)(d) Seien $\alpha, \beta \in K$ und $v + W \in V/_W$, dann gilt

$$\alpha(\beta(v + W)) \overset{(2)}{=} \alpha(\beta v + W) \overset{(2)}{=}$$

$$\alpha(\beta v) + W \overset{\text{(V2)(d) für } V}{=} (\alpha \cdot \beta)v + W \overset{(2)}{=} (\alpha \cdot \beta)(v + W) \;. \;\square$$

Damit Sie lernen, mit $V/_W$ umzugehen, vielleicht noch ein Satz, der aber für unsere Anwendungen in der Analysis nichts nützt, da wir dort unendlich-dimensionale Vektorräume haben:

Satz 19.7.4 : Sei V ein endlichdimensionaler $K-$Vektorraum und W ein Untervektorraum von V , dann ist

$$\dim V/_W \quad = \quad \dim V - \dim W \quad .$$

Beweis : Nach Satz 19.2.24 ist auch W endlichdimensional. Sei

$$(w_1, \ldots, w_k) \quad \text{eine Basis von } W \quad ,$$

dann können wir diese Basis nach Satz 19.2.14 ergänzen zu einer Basis

$$(w_1, \ldots, w_k, v_1, \ldots, v_r) \quad \text{von} \quad V$$

und behaupten:

$$(*) \qquad (v_1 + W, \ldots, v_r + W) \quad \text{ist eine Basis von} \quad V/_W \quad .$$

Wenn wir das gezeigt haben, folgt

$$\dim V/_W \quad = \quad r \quad = \quad (r+k) - k \quad = \quad \dim V - \dim W \quad .$$

Beweis von $(*)$: Ist $v + W \in V/_W$, so gibt es
$\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_k \in K$ mit

$$v \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j + \sum_{l=1}^{k} \mu_l w_l \quad , \quad \sum_{l=1}^{k} \mu_l w_l \in W \quad , \quad \text{also}$$

$$v + W \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j + W \quad \text{nach Folgerung 19.7.2} \quad ,$$

$$v + W \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j (v_j + W) \quad \text{nach Definition 19.7.3} \quad ,$$

also ist $(v_j + W)_{j \in \underline{r}}$ ein Erzeugendensystem von $V/_W$. Diese Familie ist auch linear unabhängig, denn es gilt

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j (v_j + W) \quad = \quad 0 \in V/_W$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j + W \quad = \quad 0 + W$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \quad \in \quad W \quad \text{nach Folgerung 19.7.2}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in K^k \quad : \quad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j \quad = \quad \sum_{l=1}^{k} \mu_l w_l$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \mu_1 = \ldots = \mu_k = 0 \quad .$$

□

Für die Vorlesung verwendete Literatur

zur Analysis:

K : KONRAD KÖNIGSBERGER : Analysis 1, 6.Auflage. Springer-Lehrbuch, J. Springer Verlag, Berlin 2003.

F : OTTO FORSTER : Analysis 2, 6.Auflage. Vieweg studium , Wiesbaden 2005,

zur Linearen Algebra:

GERD FISCHER : Lineare Algebra, 14.Auflage. Vieweg Studium 17, Braunschweig 2003,

außerdem dieses Skript :

S : ERNST BÖNECKE : Skript zur Mathrematik I , II für Studierende der Physik. Hamburg 2005 - 2006 .

Inhalt der "Mathematik II für Studierende der Physik"

§	Überschrift	nachzulesen in
20	Determinanten	S 72 - 85
11	Integralrechnung	K 191 - 222
21	Vektorräume mit Skalarprodukt	S 87 -102
14	Taylorreihen	K 282 - 288
16	Fourierreihen	K 321 - 341
31	Topologie metrischer Räume	F 1 - 13
32	Grenzwerte, Stetigkeit	F 14 - 25
33	Kompaktheit	F 26 - 35
22	Eigenwerte	S 102 - 123
34	Kurven im $\mathbb{R}^n$	F 36 - 46
35	Partielle Ableitungen	F 47 - 61
36	Totale Differenzierbarkeit	F 62 - 72
37	Taylorformel, lokale Extrema	F 73 - 85
38	Implizite Funktionen	F 86 - 99
40	Parameterabhängige Integrale	F 113 - 127
41	Elementare Lösungsmethoden	F 128 - 141