MATHEMATIK I FÜR STUDIERENDE DER PHYSIK

Wir werden uns in dieser Vorlesung an das Buch
KONRAD KÖNIGSBERGER: Analysis 1, 6.Auflage. J.Springer, Berlin 2003
halten. Nur das, was nicht in diesem Buch steht, erhalten Sie als Skript, z.B. den Anfang von

§1 Grundbegriffe

1.0 Einiges über Aussagen und Mengen

Mengenlehre und Logik sind für uns nicht Selbstzweck, sondern man braucht sie, um mathematische Sachverhalte kurz und unmissverständlich zu formulieren. Wir werden uns auf das Notwendigste beschränken.

Definition 1.0.1 : Unter einer **Aussage** A verstehen wir ein sprachliches oder schriftliches Gebilde, das entweder **wahr** (w) ist oder **falsch** (f) . Man sagt auch, die Aussage A hat den **Wahrheitswert** w oder f .

Beispiel 1.0.2

Aussage	Wahrheitswert
Es gibt keinen Studierenden in diesem Hörsaal	f
$1 \cdot 2 = 2$	w
$1 \cdot 2 = 2$ und $3 \cdot 4 = 4$	f
$1 \cdot 2 = 2$ oder $3 \cdot 4 = 4$	w
Wenn Ptolemäus Recht hat , dann ist die Erde eine Scheibe	w

□

Wichtig ist für uns die **Verknüpfung von Aussagen** : Mathematische Sätze sind logisch verknüpfte Aussagen. Man definiert so eine Verknüpfung, indem man den Wahrheitswert der verknüpften Aussage in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussage festlegt:

Definition 1.0.3 : Seien A und B zwei gegebene Aussagen. Dann definieren wir die Wahrheitswerte von
a) A **und** B , in Zeichen: $A \wedge B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ ist also genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

b) A **oder** B , in Zeichen: $A \vee B$, durch folgende Tabelle:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \vee B$ ist also auch dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Man sieht hier, wie sinnvoll es ist, solche Verabredungen am Anfang zu treffen, um Missverständnisse oder sprachlich unschöne Formulierungen wie “und/oder”, die man in juristischen Texten häufig findet, zu vermeiden.

c) **Aus A folgt B** , in Zeichen: $A \implies B$, man sagt auch: **A impliziert B** oder : **Wenn A gilt, dann gilt B** , durch folgenden Tabelle:

A	B	$A \implies B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Man beachte: $A \implies B$ ist stets wahr, wenn A falsch ist. Das mag manchen erstaunen, ist aber eine sinnvolle Definition, die sich sogar mit dem umgangssprachlichen Gebrauch deckt, wie das Beispiel “Wenn Ptolemäus Recht hat, dann ist die Erde eine Scheibe” zeigt, das wahr ist , obwohl beide Teilaussagen falsch sind.

d) **A gleichbedeutend mit B** , in Zeichen : $A \iff B$, man sagt auch: **A gilt genau dann, wenn B gilt** , durch folgende Tabelle:

A	B	$A \iff B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

e) **nicht A** , in Zeichen : $\neg A$, auch non A , durch die Tabelle

A	$\neg A$
w	f
f	w

Solche Tabellen mit Wahrheitswerten wie diese fünf hier nennt man auch **Wahrheitstafeln**. □

Wahrheitstafeln verwendet man auch, um die Wahrheitswerte von weiteren verknüpften Aussagen wie

$$A \wedge (B \wedge C)$$
$$(\neg A) \vee B$$
$$\neg(A \vee B)$$

auszurechnen. Dabei muss man sämtliche möglichen Wahrheitswerte von A, B und C berücksichtigen, z.B. für $(\neg A) \vee B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

Wir sehen an diesem Beispiel, dass $(\neg A) \vee B$ dieselbe Wahrheitstafel hat wie $A \implies B$. Man wird die Aussagen "$A \implies B$ " und "$(\neg A) \vee B$" deshalb "logisch gleichwertig" nennen:

Definition 1.0.4 : Gegeben seien mehrere Aussagen $A, B, C, \ldots$ und zwei Aussagen X und Y , die beide durch Verknüpfung dieser Aussagen $A, B, C, \ldots$ entstanden sind. Wenn die Aussage

$$X \iff Y$$

für alle möglichen Wahrheitswerte der Aussagen $A, B, C, \ldots$ den Wahrheitswert w annimmt, so sagt man: X und Y sind **(logisch) gleichwertig** . Die Aussage "$X \iff Y$ " bezeichnet man dann als eine **Tautologie** .

Satz 1.0.5 : Wenn A, B, C Aussagen sind, dann gelten folgende Tautologien:

a) $\neg(\neg A) \iff A$
b) $A \wedge B \iff B \wedge A$
c) $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \wedge C)$
d) $A \vee B \iff B \vee A$
e) $(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$
f) $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
g) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
h) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$
i) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$
j) $(A \implies B) \iff ((\neg B) \implies (\neg A))$

Man **beweist** diesen Satz durch Wahrheitstafeln, z.B. für h) :

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	h)
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

$\square$

Zur Schreibweise : Bei den Formeln in Satz 1.0.5 haben wir Klammern weggelassen: Statt d) hätten wir genauer

$$(A \vee B) \iff (B \vee A)$$

schreiben müssen. Man kann die Klammern weglassen, wenn man vereinbart: Die Verknüpfungen sind in der Reihenfolge

erst $\neg$, dann $\wedge$, dann $\vee$, dann $\implies$ und dann $\iff$

auszuführen, soweit Klammern nichts Anderes festlegen.

Neben Aussagen hat man es in der Mathematik zu tun mit Zahlen oder Buchstaben, die man zusammenfassen möchte zu einer Menge. Es bereitet nun erhebliche Schwierigkeiten, exakt zu definieren, was eine Menge ist. Da wir uns hier nicht mit Grundlagen der Mathematik beschäftigen wollen, reicht für uns die folgende

Definition 1.0.6 : Unter einer **Menge** M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die **Elemente** der Menge M genannt werden, zu einem Ganzen. Ist x ein Element von M , so schreiben wir

$$x \in M \quad ;$$

ist diese Aussage falsch, so schreiben wir

$$x \notin M \quad .$$

Definition 1.0.7 (Schreibweise von Mengen) : Man kann eine Menge auf zwei Arten angeben: Entweder, man schreibt in geschweiften Klammern alle Elemente der Menge hin, etwa

$$\{1, 2, 5, x\} \quad ,$$

das soll bedeuten, dass die Menge aus den Elementen $1, 2, 5$ und x besteht, oder man schreibt in den geschweiften Klammern ein Symbol für die Elemente, einen senkrechten Strich und dann die Eigenschaft, die die Elemente haben sollen. Z.B. ist

$$\{\ x \mid x \,\text{ist ganze Zahl und}\, 2 \,\text{teilt}\, x\ \}$$

die Menge der geraden ganzen Zahlen.

Definition und Beispiel 1.0.8 : Mengen, die bei uns immer wieder vorkommen, sind

$$\mathbb{N}_0 \quad = \quad \{0, 1, 2, \ldots\}$$

(Pünktchen setzt man, wenn man nicht alle Elemente hinschreiben will oder kann, aber sich denken kann, wie es weitergeht), die Menge der **natürlichen Zahlen mit Null** ,

$$\mathbb{N} \quad = \quad \{1, 2, 3, \ldots\}$$

die Menge der **natürlichen Zahlen**, (in den meisten Büchern wird $\mathbb{N} \quad = \quad \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ definiert. Wir halten uns hier aber an die Bezeichnung bei Königsberger ,)

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$

die Menge der **ganzen Zahlen** ,

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ \frac{r}{s} \;\middle|\; r \in \mathbb{Z} \wedge s \in \mathbb{Z} \wedge s \neq 0 \right\}$$

die Menge der **rationalen Zahlen** , schließlich die Mengen $\mathbb{R}$ der **reellen** und $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** , die in der Analysis eingeführt werden. Wir wollen noch vereinbaren, dass es eine Menge gibt, die gar kein Element enthlt, die **leere Menge** $\emptyset$.

Definition 1.0.9 (Gleichheit zweier Mengen) : Zwei Mengen M und N heien **gleich** , man schreibt $M = N$, wenn jedes Element von M auch Element von N , und jedes Element von N auch Element von M ist. Wir wollen diese Definition etwas formaler aufschreiben und dabei auch gleich zwei neue Symbole kennenlernen :

$$M \quad = \quad N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x : \ (x \in M \quad \Longleftrightarrow \quad x \in N) \quad ,$$

das Zeichen $:\Longleftrightarrow$ bedeutet, dass die linke Aussage durch die rechte definiert wird, man liest es : "**nach Definition gleichbedeutend**". Das Zeichen $\forall$ heißt: "**für alle**" .

Definition 1.0.10 (Teilmenge): Seien M und N Mengen. Man sagt, M ist **Teilmenge** von N , wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Formal :

$$M \subset N \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x : \ (x \in M \quad \Longrightarrow \quad x \in N).$$

Beispiel 1.0.11 : a) Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
b) Es gilt für jede Menge M : $\emptyset \subset M$.
Beweis: Es gilt $\forall x : \ (x \in \emptyset \quad \Longrightarrow \quad x \in M)$, denn die Aussage "$x \in \emptyset$ " ist für alle x falsch, nach Definition der leeren Menge.

Wir definieren drei Operationen zwischen Mengen:
Definition 1.0.12 : Seien M und N Mengen.
a) Den **Durchschnitt** der Mengen M und N definieren wir als

$$M \cap N \quad := \quad \{ \ x \ | \ x \in M \wedge x \in N \ \} \ .$$

Dabei bedeutet das Zeichen " $:=$ ", dass die linke Menge durch die rechte Menge definiert wird. Man liest es: "**nach Definition gleich**".
b) Als **Vereinigung** der Mengen M und N definieren wir

$$M \cup N \quad := \quad \{ \ x \ | \ x \in M \vee x \in N \ \} \ .$$

c) Als **Differenz** von M und N definieren wir

$$M \setminus N \quad := \quad \{ \ x \ | \ x \in M \wedge x \notin N \ \} \ .$$

Bemerkung 1.0.13 : Wir haben inzwischen einige Zeichen kennengelernt:

$$\wedge \ , \ \vee \ , \ \neg \ , \ \Longrightarrow \ , \ \Longleftrightarrow \ , \ :\Longleftrightarrow$$

stehen zwischen zwei **Aussagen** . Die Zeichen

$$\cap \ , \ \cup \ , \ \setminus \ , \ \subset \ , \ = \ , \ :=$$

stehen zwischen zwei **Mengen** . Das ist klar, wird aber von Anfängern häufig falsch gemacht. - In der Mathematik geht man davon aus , dass die Elemente von Mengen selbst wieder Mengen sind. Deshalb können die Zeichen

$$= \quad , \quad :=$$

auch zwischen Elementen einer Menge stehen.

Falls $N \subset M$ ist, hat man für $M \setminus N$ eine besondere Bezeichnung:
Definition 1.0.14 : Seien M und N Mengen, $N \subset M$. Dann heißt

$$\complement N \quad := \quad M \setminus N$$

das **Komplement** von N (bezüglich M , genauer kann man auch $\complement_M N$ schreiben).

Aus Satz 1.0.5 folgen einige Rechenregeln für $\cap, \cup, \complement$:

Satz 1.0.15 : Seien R, S, T Mengen, dann gilt
a) $R \cap S \quad = \quad S \cap R$
b) $(R \cap S) \cap T \quad = \quad R \cap (S \cap T)$
c) $R \cup S \quad = \quad S \cup R$
d) $(R \cup S) \cup T \quad = \quad R \cup (S \cup T)$
e) $R \cap (S \cup T) \quad = \quad (R \cap S) \cup (R \cap T)$
f) $R \cup (S \cap T) \quad = \quad (R \cup S) \cap (R \cup T)$
Sind S und T Teilmengen einer Menge M , so gilt für das Komplement bezüglich M :

g) $\complement(\complement S) \quad = \quad S$

h) $\complement(S \cup T) \quad = \quad \complement S \cap \complement T$

i) $\complement(S \cap T) \quad = \quad \complement S \cup \complement T$

Beweis mit den Regeln aus Satz 1.0.5 ; wir wollen das an einem Beispiel vorführen, etwa:
e) Nach Definition 1.0.9 muss man zeigen, dass jedes Element von $R \cap (S \cup T)$ auch Element von $(R \cap S) \cup (R \cap T)$ ist, und umgekehrt: Nun gilt für jedes Element x :

$$x \in R \cap (S \cup T) \quad \overset{1.0.12}{\longleftrightarrow}$$

$$x \in R \wedge x \in S \cup T \quad \overset{1.0.12}{\longleftrightarrow}$$

$$x \in R \wedge (x \in S \vee x \in T) \quad \overset{1.0.5}{\longleftrightarrow}$$

$$(x \in R \wedge x \in S) \vee (x \in R \wedge x \in T) \quad \overset{1.0.12}{\longleftrightarrow}$$

$$x \in R \cap S \vee x \in R \cap T \quad \overset{1.0.12}{\longleftrightarrow}$$

$$x \in (R \cap S) \cup (R \cap T) \quad .$$

$\square$

1.1 Vollständige Induktion, Funktionen

Definition 1.1.1 : Die ganzen Zahlen kann man anordnen, indem man für $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert:

$$a \leq b \quad :\Longleftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Statt $a \leq b$ schreibt man auch : $b \geq a$.

Bemerkung 1.1.2 : Wenn Ihnen die Schreibweise

$$1 + 2 + \ldots + n$$

für die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n zu unpräzis erscheint, müssen Sie **rekursiv** das **Summenzeichen** definieren, d.h. Sie müssen das Induktionsprinzip zur Definition benutzen. Das geht so:

Definition 1.1.3 : Sei M eine Menge, in der eine Addition $+$ definiert ist. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$. Für jede Zahl k in $\mathbb{Z}$ mit $m \leq k \leq n$ sei $a_k \in M$ gegeben. Dann setzen wir

(I) für $n = m$: $\sum\limits_{k=m}^{m} a_k \quad := \quad a_m$

(II) für $n \geq m$: $\sum\limits_{k=m}^{n+1} a_k \quad := \quad \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1} \quad ,$

wenn auch $a_{n+1} \in M$ ist.

Übrigens: wenn M ein Element 0 mit der Eigenschaft

$$\forall\, a \in M : \; a + 0 \quad = \quad a$$

besitzt, definiert man noch die **leere Summe**

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \quad \text{für} \quad n < m \quad . \qquad \square$$

Wir wollen zum Schluss dieses Abschnitts noch lernen, was eine Funktion ist:

Definition 1.1.4 : Seien M und N Mengen, dann heißt

$$M \times N \quad := \quad \{ \; (x, y) \mid x \in M \wedge y \in N \; \}$$

das **cartesische Produkt** der Mengen M und N . Die Elemente von $M \times N$ heißen **geordnete Paare** von Elementen von M und N . Wir wollen nicht definieren, was ein geordnetes Paar ist, man muss nur wissen, wann zwei geordnete Paare gleich sind: Seien (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in M \times N$, dann gilt

$$(x_1, y_1) \quad = \quad (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \quad .$$

Es kommt also auf die Reihenfolge an : $(2, 3) \neq (3, 2)$!

Definition 1.1.5 : Seien M und N Mengen, dann heißt eine Vorschrift f, die **jedem** Element $x \in M$ **genau ein** Element aus N zuordnet, das man mit $f(x)$ bezeichnet, eine **Funktion** (**Abbildung**) von M in N. Man schreibt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} f \, : \, M &\longrightarrow N \\ x &\longmapsto f(x) \quad . \end{aligned}$$

Die Menge M heißt der **Definitionsbereich** von f, die Menge N der **Wertebereich** von f, das Element $f(x)$ der **Funktionswert** von x. Für die Menge aller Funktionen von M in N schreiben wir: $\mathcal{F}(M,N)$.

Definition 1.1.7 : Seien M_1, M_2, N_1, N_2 Mengen. Zwei Funktionen

$$f \, : \, M_1 \longrightarrow N_1 \quad \text{und} \quad g \, : \, M_2 \longrightarrow N_2$$

heißen **gleich** , wenn gilt

$$M_1 = M_2 \quad \wedge \quad N_1 = N_2 \quad \wedge \quad \forall\, x \in M_1 \, : \, f(x) = g(x) \quad ,$$

also wenn Definitions- und Wertebereiche und für alle $x \in M_1$ die Funktionswerte übereinstimmen.

Definition 1.1.9 : Sei $f \, : \, M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Sei $A \subset M$ und $B \subset N$. Dann heißt

$$f(A) := \{ \; y \in N \mid \text{es gibt ein}\, x \in A \,\text{mit}\, y = f(x) \; \}$$

das **Bild** von A unter f und

$$\overset{-1}{f}(B) \quad := \quad \{ \; x \in M \mid f(x) \in B \; \}$$

das **Urbild** von B unter f. □

Für "es gibt ein" führt man eine Abkürzung ein:

Definition 1.1.10 : Statt "es existiert ein" schreiben wir : "$\exists$". Sei also M eine Menge und $A(x)$ eine Aussage, die für Elemente x der Menge M wahr oder falsch ist, dann ist die Aussage

$$\exists\, x \in M \, : \; A(x)$$

sinnvoll.

(1.1.11) Beachten Sie: a) "$\exists\, x \in M \, : \, A(x)$" heißt, dass es **mindestens** ein Element x mit der Eigenschaft $A(x)$ gibt, es kann auch mehrere solche Elemente geben ! Will man ausdrücken, dass es **genau ein** Element x mit der Eigenschaft $A(x)$ gibt, so schreibt man:

$$\exists_1\, x \in M \, : \; A(x) \quad .$$

b) Es gibt einige logische Regeln für " $\exists$ " und "$\forall$ ": Seien M und N Mengen und $A(x), B(x), C(x,y)$ Aussagen, deren Wahrheitswert davon abhängt, welche $x \in M$ bzw. $y \in N$ man einsetzt. Dann gelten die Regeln:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & \neg(\forall x \in M : \; A(x)) & \Longleftrightarrow & \exists x \in M : \; (\neg A(x)) \\
(2) & \neg(\exists x \in M : \; A(x)) & \Longleftrightarrow & \forall x \in M : \; (\neg A(x)) \\
(3) & \forall x \in M : \; A(x) \wedge \forall x \in M : \; B(x) & \Longleftrightarrow & \forall x \in M : \; (A(x) \wedge B(x)) \\
(4) & \forall x \in M : \; A(x) \vee \forall x \in M : \; B(x) & \Longrightarrow & \forall x \in M : \; (A(x) \vee B(x)) \\
(5) & \exists x \in M : \; (A(x) \vee B(x)) & \Longleftrightarrow & \exists x \in M : \; A(x) \vee \exists x \in M : \; B(x) \\
(6) & \exists x \in M : \; (A(x) \wedge B(x)) & \Longrightarrow & \exists x \in M : \; A(x) \wedge \exists x \in M : \; B(x) \\
(7) & \forall x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) & \Longleftrightarrow & \forall y \in N \, \forall x \in M : \; C(x,y) \\
(8) & \exists x \in M \, \exists y \in N : \; C(x,y) & \Longleftrightarrow & \exists y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y) \\
(9) & \exists x \in M \, \forall y \in N : \; C(x,y) & \Longrightarrow & \forall y \in N \, \exists x \in M : \; C(x,y) \; .
\end{array}$$

Man mache sich an Beispielen klar, dass bei (4),(6) und (9) nicht “ $\Longleftrightarrow$ ” gilt ! □

Definition 1.1.12 : Sei $f \; : \; M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $A \subset M$. Dann heißt die durch

$$f|_A : \; A \longrightarrow N \quad , \quad f|_A(x) \; := \; f(x)$$

definierte Abbildung die **Restriktion (Einschränkung)** von f auf A. $f|_A$ hat also einen kleineren Definitionsbereich als f ; die Funktionswerte $f|_A(x)$ sind für $x \in A$ aber die gleichen wie die Funktionswerte $f(x)$. □

Zusätzliche Eigenschaften von Funktionen haben besondere Namen:

Definition 1.1.13 : Sei $f \; : \; M \longrightarrow N$ eine Abbildung. f heißt

a) **surjektiv** (Abbildung von M **auf** N) , wenn $f(M) \; = \; N$ ist, oder, was nach Definition 1.1.9 gleichbedeutend ist:

$$\forall y \in N \, \exists x \in M : \; f(x) \; = \; y \quad ,$$

b) **injektiv** (**eineindeutig**), wenn verschiedene Elemente von M verschiedene Funktionswerte haben, oder, was gleichbedeutend ist:

$$\forall x, x' \in M : \; (\, f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x' \,) \quad ,$$

c) **bijektiv** , wenn f surjektiv und injektiv ist.

Definition 1.1.14 : Sei $f \; : \; M \longrightarrow N$ bijektiv. Sei $y \in N$, dann gibt es dazu, da f surjektiv ist, ein, und da f injektiv ist, genau ein Element aus M , dessen Funktionswert gleich y ist, wir nennen es $f^{-1}(y)$. Die Funktion

$$f^{-1} : \; N \longrightarrow M \quad , \quad y \longmapsto f^{-1}(y)$$

heißt die **Umkehrfunktion** von f .

(1.1.15) Beachten Sie : Sei $f \; : \; M \longrightarrow N$, dann ist für $B \subset N$ das

Urbild $\overset{-1}{f}(B)$

definiert. Nur, wenn f bijektiv ist, ist die

Umkehrfunktion f^{-1}

definiert. Für $B \subset N$ ist dann allerdings

$$f^{-1}(B) \quad = \quad \overset{-1}{f}(B) \; ,$$

so dass es keine Missverständnisse gibt.

(1.1.16) Beispiele : 1) Ist M eine Menge, so heißt

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M : M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die **identische Abbildung** von M . Sie bildet jedes Element auf sich selbst ab und ist bijektiv.
2) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, so ist f nicht surjektiv, denn zu -1 gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$. f ist auch nicht injektiv, denn

$$f(2) = f(-2) = 4 \quad , \quad \text{aber} \quad 2 \neq -2 \quad .$$

Setzt man aber $\mathbb{R}_+^* := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ und betrachtet

$$g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad , \quad g(x) := x^2 \quad ,$$

so ist g bijektiv. Um das zu beweisen, muss man zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}_+^*$ ein $x \in \mathbb{R}_+^*$ mit $y = x^2$ gibt, also dass man aus positiven reellen Zahlen Quadratwurzeln ziehen kann. Wir werden das in §2 lernen.

Definition 1.1.17 : Seien $f : L \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen, dann kann man die **Hintereinanderausführung** von f und g bilden :

$$\begin{aligned} g \circ f : L &\longrightarrow N \quad , \\ x &\longmapsto g(f(x)) \quad . \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass man $(g \circ f)(x)$ erhält, indem man **zuerst** f auf x und **dann** g auf $f(x)$ anwendet. □

Bildet man die Hintereinanderausführung von drei oder mehr Funktionen, so kommt es nicht auf die Reihenfolge der Klammern an:
Satz 1.1.18 (Assoziativität der Hintereinanderausführung) : Seien

$$f : K \longrightarrow L \quad , \quad g : L \longrightarrow M \quad , \quad h : M \longrightarrow N$$

Abbildungen, dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad .$$

Beweis : $(h \circ g) \circ f$ und $h \circ (g \circ f)$ sind beides Abbildungen von K in N , und für alle $x \in K$ gilt

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \quad ,$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \quad .$$

Nach Definition 1.1.7 gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

Wir wollen noch ein Kriterium dafür beweisen, wann eine Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:
Satz 1.1.19 : Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Funktion und seien $M, N \neq \emptyset$. Dann gilt:
a) f ist injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{gibt.}$$

b) f ist surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{gibt.}$$

c) f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad \text{gibt.}$$

In diesem Fall ist $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f .

Beweis : a) 1.) Sei f injektiv. Sei $y \in N$, dann gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist $y \in f(M)$, dann gibt es, da f injektiv ist, genau ein x mit $y = f(x)$. Wir setzen $g(y) := x$. Oder es ist $y \notin f(M)$. Wegen $M \neq \emptyset$ gibt es ein Element $x_0 \in M$. Wir setzen dann $g(y) := x_0$. Dann ist

$$g \circ f = \mathrm{id}_M \quad ,$$

denn für alle $x \in M$ gilt $(g \circ f)(x) = x$.
2.) Es gebe ein $g : N \longrightarrow M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Seien $x, x' \in M$, dann gilt

$$f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies \mathrm{id}_M(x) = \mathrm{id}_M(x')$$

$$\implies x = x' \quad , \quad \text{also ist } f \text{ injektiv.}$$

b) 1.) Sei f surjektiv. Sei $y \in N$, dann gibt es mindestens ein $x \in M$ mit $y = f(x)$, es ist $\overset{-1}{f}(\{y\}) \neq \emptyset$.
$(*)$ Wir wählen ein $x \in \overset{-1}{f}(\{y\})$
und setzen

$$g(y) := x \quad ,$$

dann gilt

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad ,$$

denn für $y \in N$ gilt $g(y) = x$, wobei $f(x) = y$ ist, also $f(g(y)) = y$.
2.) Es gebe ein $g : N \longrightarrow M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Sei $y \in N$,dann ist $y = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, also gibt es ein $x \in M$ mit $y = f(x)$, nämlich $x := g(y)$. Also ist f surjektiv.
c) 1.) Wenn es ein $g : N \longrightarrow M$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_M$$

gibt, folgt aus a) und b) , dass f bijektiv ist.
2.) Wenn f bijektiv ist, haben wir die Umkehrfunktion $f^{-1} : N \longrightarrow M$, die die beiden Gleichungen

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N \quad , \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$$

erfüllt.
3.) Sei f bijektiv und es gebe $g : N \longrightarrow M$ mit

$$f \circ g = \mathrm{id}_N \quad , \quad g \circ f = \mathrm{id}_M \quad ,$$

dann folgt

$$f^{-1} = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = \mathrm{id}_N \circ g = g \quad .$$

Bei $(*)$ haben wir gebraucht, dass man aus (möglicherweise unendlich vielen) Mengen je ein Element auswählen kann; das "Auswahlaxiom" der Mengenlehre besagt, dass das geht. Wir wollen auf solche Fragen der Grundlagen der Mathematik hier nicht eingehen. $\square$

Definition 1.1.20 : a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\underline{n} \quad := \quad \{\ m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\ \} \quad , \qquad \text{also}$$

$$\underline{n} \quad := \quad \{1, 2, \ldots, n\} \quad , \quad \text{und zusätzlich}$$

$$\underline{0} \quad := \quad \emptyset \quad .$$

b) Sei M eine Menge. M heißt **endlich** , wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine bijektive Abbildung

$$f \,:\, \underline{n} \longrightarrow M$$

gibt. Man kann dann (mit Induktion) beweisen, dass das n eindeutig bestimmt ist. Es ist daher sinnvoll,

$$\#(M) \quad := \quad n$$

die **Mächtigkeit** von M zu nennen.
c) Ist die Menge M nicht endlich, so heißt M eine **unendliche** Menge.

§2 Die Körperaxiome

Definition 2.1.1 : Sei A eine nichtleere Menge und τ eine **Verknüpfung** auf A , d.h. eine Abbildung

$$\tau \,:\, A \times A \longrightarrow A \quad , \quad (x, y) \longmapsto x\tau y \quad .$$

Wenn die Aussagen
(AG1) $\forall\, x, y, z \in A \,:\, x\tau(y\tau z) \,=\, (x\tau y)\tau z$ (Assoziativgesetz)
(AG2) $\forall\, x, y \in A \,:\, x\tau y \,=\, y\tau x$ (Kommutativgesetz)
(AG3) $\forall\, a, b \in A\, \exists\, x \in A \,:\, a\tau x \,=\, b$
richtig sind, dann heit A (genauer: das Paar (A, τ)) eine
abelsche (kommutative) Gruppe . $\square$

Man kann aus diesen Axiomen (AG1) - (AG3) gleich allgemein für abelsche Gruppen einige Folgerungen ziehen, die dann insbesondere für die Addition reeller Zahlen gelten (wobei man dann 0 statt e und $-x$ statt x^* zu schreiben hat) :

Folgerung 2.1.2 : Sei (A, τ) eine abelsche Gruppe. Dann gilt
(1) $\exists_1\, e \in A\, \forall\, x \in A \,:\, x\tau e \,=\, x$.
Dieses Element e heißt **das neutrale Element** von (A, τ) .
(2) $\forall\, x \in A\, \exists_1\, x^* \in A \,:\, x\tau x^* \,=\, e$.
Dieses x^* heißt **das Inverse** von x .
(3) $e^* \,=\, e$.
(4) $\forall\, a, b \in A\, \exists_1\, x \in A \,:\, a\tau x \,=\, b$.
(5) $\forall\, x \in A \,:\, (x^*)^* \,=\, x$.
(6) $\forall\, x, y \in A \,:\, (x\tau y)^* \,=\, y^*\tau x^*$.

<u>**Beweis :**</u> (1) Wir wählen ein festes $a \in A$, das geht wegen $A \neq \emptyset$. Wenn wir in (AG3) $b := a$ setzen, folgt

$$\exists\, e \in A : \; a\tau e = a \quad ,$$

dieses e könnte aber von a abhängen. Ist aber $x \in A$ beliebig, so gibt es nach (AG3) ein $y \in A$ mit $a\tau y = x$, also

$$x\tau e \overset{\text{AG2}}{=} (y\tau a)\tau e \overset{\text{AG1}}{=} y\tau(a\tau e) = y\tau a = x\,,$$

also gilt : $\forall\, x \in A : \; x\tau e = x$. Sei auch $f \in A$ mit

$$\forall\, x \in A : \; x\tau f = x \quad ,$$

dann gilt, wenn man e bzw. f für x einsetzt :

$$e = e\tau f \overset{\text{AG2}}{=} f\tau e = f \quad .$$

(2) Nach (AG3) folgt zunächst

$$\forall\, x \in A \;\exists\, x^* \in A : \; x\tau x^* = e \quad .$$

Sei auch $x' \in A$ mit $x\tau x' = e$, dann folgt

$$x' \overset{1}{=} x'\tau e = x'\tau(x\tau x^*) \overset{\text{AG1}}{=} (x'\tau x)\tau x^*$$

$$\overset{\text{AG2}}{=} (x\tau x')\tau x^* = e\tau x^* \overset{\text{AG2}}{=} x^*\tau e \overset{1}{=} x^* \quad .$$

Zu jedem Element x gibt es also ein **eindeutig bestimmtes** Inverses.
Damit beweist man (3) , (5) und (6) :
(3) $e\tau e = e$ nach (1) und $e\tau e^* = e$ nach (2) . Nach (2) folgt $e = e^*$.
(5) $e \overset{2}{=} x^*\tau(x^*)^*$ und $e \overset{2}{=} x\tau x^* \overset{\text{AG2}}{=} x^*\tau x$, also ist nach (2) : $x = (x^*)^*$ das Inverse von x^*
(6) $(x\tau y)\tau(y^*\tau x^*) \overset{\text{AG2}}{=} (x\tau(y\tau y^*))\tau x^*$
$\overset{2}{=} (x\tau e)\tau x^* \overset{1}{=} x\tau x^* \overset{2}{=} e$,
also ist $y^*\tau x^*$ das - nach (2) eindeutig bestimmte - Inverse von $x\tau y$,

$$y^*\tau x^* = (x\tau y)^* \quad .$$

(4) Die Existenz eines x mit $a\tau x = b$ folgt aus (AG3) . Aus (2) folgt: $\exists_1\, a^* \in A : a\tau a^* = e$, also

$$a^*\tau b = a^*\tau(a\tau x) \overset{\text{AG1}}{=} (a^*\tau a)\tau x \overset{\text{AG2}}{=} (a\tau a^*)\tau x$$

$$= e\tau x \overset{\text{AG2}}{=} x\tau e \overset{1}{=} x \quad .$$

x ist also eindeutig bestimmt: $x = a^*\tau b$. □

Bemerkung 2.1.3 : Die für die Addition reeller Zahlen aufgestellten Regeln können wir nun so formulieren:

(K1') $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Da $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist, und da für die ganzen Zahlen 5 und 0 gilt

$$5 + 0 \quad = \quad 5 \quad ,$$

andererseits $5 + e = 5$ für das neutrale Element e von $(\mathbb{R}, +)$, folgt aus 2.1.2 (4) :

$$e \quad = \quad 0 \quad ,$$

also ist die ganze Zahl 0 das neutrale Element von $(\mathbb{R}, +)$. Da

$$n + (-n) \quad = \quad 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, bezeichnen wir das Inverse der reellen Zahl x in der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ allgemein mit $-x$ und sprechen vom **Negativen** von x . Wir setzen noch

$$a - b \quad := \quad a + (-b) \quad \text{für} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad .$$

Genau so, wie man zeigt, dass die ganze Zahl 0 das neutrale Element von $(\mathbb{R}, +)$ ist, zeigt man, dass die ganze Zahl 1 das neutrale Element in $(\mathbb{R} \setminus \{0\}.\cdot)$ ist. Die Eigenschaften der Multiplikation können wir sehr kurz aufschreiben als Axiom

(K2') : Es gibt eine Verknüpfung

$$m \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

mit folgender Eigenschaft: Ist 0 das neutrale Element der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und

$$\mathbb{R}^* \quad := \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ,$$

so ist $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

Das neutrale Element von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist die ganze Zahl 1. Das Inverse von $x \in \mathbb{R}^*$ bezeichnen wir mit x^{-1}. Es gilt also

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \,:\, \left(x \cdot 1 \,=\, x \ \wedge\ \exists_1\, x^{-1} \in \mathbb{R}^* \,:\, x \cdot x^{-1} \,=\, 1\right) \quad .$$

Alles, was wir in Folgerung 2.1.2 für abelsche Gruppen bewiesen haben, gilt also insbesondere für $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, z.B.

$$(x^{-1})^{-1} \,=\, x \quad , \quad (x \cdot y)^{-1} \,=\, y^{-1} \cdot x^{-1} \quad .$$

Wir schreiben noch: $\dfrac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$ für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$. □

Es gibt noch eine Rechenregel, die etwas über Addition **und** Multiplikation reeller Zahlen aussagt, das ist das Axiom

(K4') **(Distributivgesetz :)**

$$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \,:\, \left(\, x \cdot (y + z) \,=\, x \cdot y + x \cdot z \wedge (x + y) \cdot z \,=\, x \cdot z + y \cdot z \,\right) \quad .$$

Hier müsste man rechts genauer: $(x \cdot z) + (y \cdot z)$ schreiben, man vereinbart aber wie üblich: "Punktrechnung geht vor Strichrechnung", dann kann man die Klammern weglassen.

<u>(2.1.4) Folgerungen aus dem Distributivgesetz :</u> Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

(1) $x \cdot 0 \;=\; 0$
(2) $0 \cdot x \;=\; 0$
(3) $x \cdot (y \cdot z) \;=\; (x \cdot y) \cdot z$
(4) $x \cdot y \;=\; y \cdot x$
(5) $x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
(6) $(-x) \cdot y \;=\; -(x \cdot y)$
(7) $(-1) \cdot x \;=\; -x$.

<u>Beweis :</u> (1) Aus $0 + 0 = 0$ folgt $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) \overset{\text{K4'}}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$, andererseits gilt auch $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$, also nach 2.1.2 (4):

$$x \cdot 0 \;=\; 0 \quad .$$

(2) zeigt man analog zu (1) mit (K4').
(3) und (4) sind für $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ richtig nach den Axiomen der Multiplikation (Assoziativgesetz bzw. Kommutativgesetz). Ist x, y oder z gleich 0, so folgt nach (1) bzw. (2)

$$x \cdot (y \cdot z) = 0 \text{ und } (x \cdot y) \cdot z = 0 \quad ,$$

entsprechend bei (4) .
(5) "$\Longleftarrow$" folgt aus (1) und (2).
"$\Longrightarrow$" : Sei $x \cdot y = 0$. Ist $x = 0$, so sind wir fertig. Ist $x \neq 0$, so ist $x \in \mathbb{R}^*$, und da $(\mathbb{R}^*.\cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, haben wir $x^{-1} \in \mathbb{R}^*$ mit

$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1 \text{ , also}$$

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 \overset{1}{=} 0 .$$

(6) $x \cdot y + (-x) \cdot y \overset{\text{K4'}}{=} (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y \overset{2}{=} 0$,
also ist $(-x) \cdot y$ das eindeutig bestimmte Negative von $x \cdot y$,

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y) \quad .$$

(8) $(-1) \cdot x \overset{6}{=} -(1 \cdot x) = -x$.
(7) $(-x) \cdot (-y) \overset{6}{=} -(x \cdot (-y)) \overset{4}{=} -((-y) \cdot x) \overset{6}{=} -(-(y \cdot x))$
$\overset{4}{=} -(-(x \cdot y)) \overset{2.1.2(5)}{=} x \cdot y$. □

<u>Definition 2.1.5 :</u> Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \longrightarrow K \quad , \quad (x, y) \longmapsto x + y \quad , \quad \text{und}$$
$$\cdot : K \times K \longrightarrow K \quad , \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y \quad ,$$

die den drei Axiomen
(K1') $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe,
(K2') wenn 0 das neutrale Element der abelschen Gruppe $(K, +)$ bezeichnet und $K^* := K \backslash \{0\}$ ist, dann ist $(K^*, \cdot)$ eine abelsche Gruppe,
(K4') $\forall\, a, b, c \in K : (a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \wedge (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c)$
genügen, heißt ein <u>**Körper**</u> . □

Wir können also die Axiome für die Addition und Multiplikation reeller Zahlen zusammenfassen zu

Axiom (K) : $\mathbb{R}$ mit $+$ und $\cdot$ ist ein Körper. □

Durch dieses Axiom ist $\mathbb{R}$ aber noch nicht charakterisiert, es gibt auch andere Körper, z.B. den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, den wir bald kennen lernen werden.

In beliebigen Körpern kann man Potenzen definieren:

Definition 2.1.6 : Sei K ein Körper und $x \in K$. Dann definieren wir die Potenzen von x rekursiv durch

$$x^0 := 1 \quad , \quad \text{wobei } 1 \text{ das neutrale Element von } (K^*, \cdot) \text{ ist,}$$

$$(*) \qquad x^{n+1} := x^n \cdot x \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Ist $x \neq 0$, so ist x^{-1} definiert, und man setzt

$$(**) \quad x^{-n} := (x^{-1})^n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

Folgerung 2.1.7 : Sei K ein Körper und seien $x, y \in K$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(2) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(3) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

Sind $x, y \neq 0$, so gelten diese Regeln für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Beweis : (1) a) Ist $x = 0$ und $n > 0$ oder $m > 0$, so gilt

$$x^n \cdot x^m = 0 = x^{n+m} \quad ,$$

und wenn $n = m = 0$ ist: $x^n \cdot y^m = 1 = x^{n+m}$.

b) Sei im Folgenden also $x \neq 0$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Definition $(*)$: $x^{m+1} = x^m \cdot x$. Ist nun $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, so ist $-m \in \mathbb{N}$, $-m - 1 \in \mathbb{N}_0$, also nach $(*)$ für x^{-1} statt x :

$$(x^{-1})^{-m} = (x^{-1})^{-m-1} \cdot x^{-1} \quad .$$

Für $-m - 1 \in \mathbb{N}$ gilt $(x^{-1})^{-m-1} = x^{m+1}$ nach Definition $(**)$, für $-m - 1 = 0$ gilt $(x^{-1})^{-m-1} = 1 = x^{m+1}$ auch, also gilt nach $(**)$:

$$x^m = x^{m+1} \cdot x^{-1} \quad ,$$

und Multiplikation mit x ergibt $x^{m+1} = x^m \cdot x$. Also gilt

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} : \ x^{m+1} = x^m \cdot x \quad .$$

c) Durch Induktion nach m zeigen wir :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}_0 \forall\, n \in \mathbb{Z} : \ x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad .$$

Beweis: (I) Für $m = 0$ ist $x^m = 1$, und

$$x^n \cdot x^m = x^n \cdot 1 = x^n = x^{n+0} = x^{n+m} \text{ ist richtig.}$$

(II) Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ sei richtig. Dann folgt

$$x^n \cdot x^{m+1} \overset{*}{=} x^n \cdot x^m \cdot x = x^{n+m} \cdot x \overset{\text{a)}}{=} x^{n+m+1} \quad .$$

d) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach c) :

$$x^{-n} \cdot x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1 \quad ,$$

also ist x^{-n} das (eindeutig bestimmte) Inverse von x^n , also

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

e) Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{Z}$, dann ist $-m \in \mathbb{N}$, also nach c):

$$x^{n+m} \cdot x^{-m} \quad = \quad x^{(n+m)-m} \quad = \quad x^n \quad , \quad \text{also}$$

$$x^{n+m} \quad = \quad x^n \cdot (x^{-m})^{-1} \quad \overset{\text{d)}}{=} \quad x^n \cdot x^m \quad .$$

Also gilt $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.
(2) , (3) als Übungsaufgabe. $\square$

§19 Vektorräume

19.1 Definition und Beispiele

(19.1.1) Zur Motivation : Wenn man von "Vektoren" spricht , denkt man als Physiker meistens an "Vektoren im dreidimensionalen Raum" , das sind Tripel

$$a \quad = \quad (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad =: \quad \mathbb{R}^3 \quad .$$

Man kann sie durch Pfeile veranschaulichen.

Aus der Physik weiß man, welche Rechenoperationen man mit solchen Vektoren ausführen kann :
1.) Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ kann man addieren:

$$a + b := (\underset{\uparrow}{a_1 + b_1}, \underset{\uparrow}{a_2 + b_2}, \underset{\uparrow}{a_3 + b_3})$$

Addition reeller Zahlen

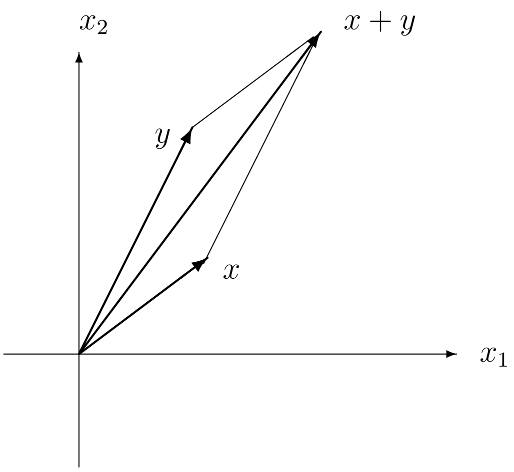
2.) Vektoren kann man mit "Skalaren", d.h. reellen Zahlen, multiplizieren : Seien

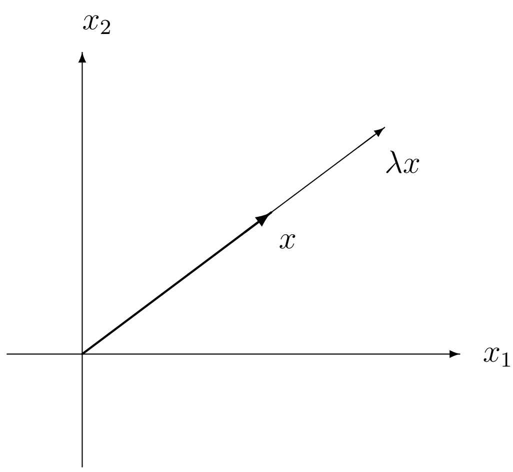
$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann setzt man

$$\lambda\, a := (\underset{\uparrow}{\lambda \cdot a_1}, \underset{\uparrow}{\lambda \cdot a_2}, \underset{\uparrow}{\lambda \cdot a_3})$$

Multiplikation reeller Zahlen .

Für $n = 2$ und $n = 3$ kann man sich diese Rechenoperationen veranschaulichen, etwa im $\mathbb{R}^2$:





Beachten Sie, dass hier nicht Vektoren miteinander verknüpft werden, sondern ein Körperelement λ (ein "Skalar") mit einem Vektor. Man nennt so etwas eine "äußere Operation" von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^3$. Wir werden uns in diesem Paragraphen von dem konkreten Beispiel $\mathbb{R}^3$ lösen, denn es gibt gerade auch in der Physik genügend andere "Vektorräume", die bezüglich Addition und äußerer Operation denselben Axiomen wie der $\mathbb{R}^3$ genügen.
- Im $\mathbb{R}^3$ hat man noch zwei weitere Rechenoperationen :
3.) Vektoren des $\mathbb{R}^3$ kann man so verknüpfen, dass das "Produkt" ein Skalar ist: Man hat das "Skalarprodukt"

$$< a, b > \quad := \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad .$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man die Länge (Norm) eines Vektors definieren :

$$||\, a\, || \quad := \quad \sqrt{< a, a >} \quad .$$

4.) Am wenigsten verallgemeinern lässt sich das "Vektorprodukt"

$$a \times b \quad := \quad (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad ;$$

das ist eine Verknüpfung auf dem $\mathbb{R}^3$, für die allerdings das Assoziativgesetz nicht gilt. □

- Die Begriffe "abelsche Gruppe" und "Körper" sind uns aus §2 bekannt. Wir brauchen sie, um allgemein zu formulieren, was ein Vektorraum ist:
Definition 19.1.2 : V sei eine nichtleere Menge und K ein Körper, 1 das Einselement von K. Es gebe eine **Verknüpfung**

$$+ : \; V \times V \longrightarrow V \quad , \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

und eine **äußere Operation**

$$\omega : \; K \times V \longrightarrow V \quad , \quad (\alpha, a) \longmapsto \alpha a \quad ,$$

so dass gilt :
(V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(V2) Für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $a, b \in V$ gilt
(a) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$,
(b) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$,
(c) $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha(\beta a)$,
(d) $1\, a = a$.
Dann heißt V (genauer: Das Tripel $(V, +, \omega)$) ein **K-(Links-)Vektorraum**. Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**. □

- Bevor wir zu Beispielen kommen, noch die

Definition 19.1.3 : Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper, 0 das neutrale Element von $(L, +)$ und 1 das neutrale Element von $(L \setminus \{0\}, \cdot)$. Eine Teilmenge K von L heißt ein **Unterkörper** von L , wenn gilt

(UK1) $1 \in K$,
(UK2) $\forall a, b \in K : \ a - b \in K$,
(UK3) $\forall a, b \in K : \ a \cdot b \in K$,
(UK4) $\forall a \in K \setminus \{0\} : \ a^{-1} \in K$. □

Beispiel 19.1.4 : Sei L ein Körper und K ein Unterkörper von L. Dann ist $(L, +)$ eine abelsche Gruppe, es gilt also (V1) fr $(L, +)$. Als äußere Operation von K auf L nehmen wir die Multiplikation in L , eingeschränkt auf $K \times L$; wir setzen also

$$\omega : K \times L \longrightarrow L \quad , \quad \omega(\alpha, a) \quad := \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Multiplikation in } L}}{\alpha \cdot a} \quad ,$$

also $\alpha a \quad := \quad \alpha \cdot a$. Auf diese Weise wird L ein $K-$Vektorraum, denn die Rechenregeln

(V2) (a) und (b) folgen dann aus dem Distributivgesetz in L ,
(c) aus dem Assoziativgesetz für $(L, \cdot)$, und
(d) daraus, dass 1 das Einselement von L ist .

Wir erhalten damit gleich weitere Beispiele:

a.) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann ist K ein Unterkörper von sich selbst. K selbst ist also ein $K-$Vektorraum.

b.) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper mit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ ist Unterkörper von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$. Also sind

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jeweils $\mathbb{Q}-$Vektorräume ,
$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auch $\mathbb{R}-$Vektorräume , und
$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}-$Vektorraum.

Beispiel 19.1.5 : Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, A eine nichtleere Menge und V ein $K-$Vektorraum, den wir schon kennen (z.B. $V = K$). Dann wird $\mathcal{F}(A, V)$, die Menge der Funktionen von A nach V , wieder ein $K-$Vektorraum, wenn wir für $f, g \in \mathcal{F}(A, V)$ definieren:

$$(*) \qquad (f + g)(x) \quad := \quad f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Addition in } V \text{ ,}}}{+} g(x) \quad \text{fr alle} \quad x \in A$$

dann ist also $f + g \in \mathcal{F}(A, V)$ für alle $f, g \in \mathcal{F}(A, V)$, und wir definieren die äußere Operation von K auf $\mathcal{F}(A, V)$ durch

$$(**) \quad (\lambda f)(x) \quad := \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{äußere Operation von } K \text{ auf } V \text{ ,}}}{\lambda\, f(x)} \quad \text{fr alle} \quad \lambda \in K \quad \text{und} \quad f \in \mathcal{F}(A, V)$$

dann ist also $\lambda f \in \mathcal{F}(A, V)$. Wir prüfen nach, ob die Axiome (V1) , (V2) gelten:

(V1) $+$ ist eine Verknüpfung auf $\mathcal{F}(A,V)$. Es gilt
(AG1) $\forall\, f,g,h \in \mathcal{F}(A,V)\ :\ \ (f+g)+h \quad = \quad f+(g+h)$,
denn $(V,+)$ ist eine Gruppe, und damit gilt nach $(*)$:

$$\begin{aligned}\forall\, x \in A\ :\ ((f+g)+h)(x) \quad &= \quad (f+g)(x)+h(x)\\ = \quad (f(x)+g(x))+h(x) \quad &= \quad f(x)+(g(x)+h(x))\\ = \quad f(x)+(g+h)(x) \quad &= \quad (f+(g+h))(x) \quad ,\end{aligned}$$

(AG2) $\forall\, f,g \in \mathcal{F}(A,V)\ :\ \ f+g \quad = \quad g+f \quad ,$
denn $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe, also gilt

$$\forall\, x \in A :\ (f{+}g)(x) \quad = \quad f(x){+}g(x) \quad = \quad g(x){+}f(x) \quad = \quad (g{+}f)(x) \quad ,$$

(AG3) Seien $f,g \in \mathcal{F}(A,V)$ gegeben, dann ist $h \in \mathcal{F}(A,V)$ fr

$$h(x) \quad := \quad g(x)-f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in A \quad ,$$

und es gilt

$$\forall\, x \in A\ :\ \ (f{+}h)(x) \quad = \quad f(x){+}h(x) \quad = \quad f(x){+}(g(x){-}f(x)) \quad = \quad g(x) \quad ,$$

also $f+h\,=\,g$. Also ist $(\mathcal{F}(A,V),+)$ eine abelsche Gruppe.
(V2) Für beliebige $\alpha,\beta \in K, f,g \in \mathcal{F}(A,V), x \in A$ gilt nun nach $(**)$:

$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)f)(x) \quad &= \quad (\alpha+\beta)f(x)\\ &= \quad \alpha f(x)+\beta f(x) \quad \text{wegen (V2)(b) für}\, V\\ = \quad (\alpha f)(x)+(\beta f)(x) \quad &= \quad (\alpha f+\beta f)(x), \quad \text{also}\\ (\alpha+\beta)f \quad &= \quad \alpha f+\beta f \quad ,\end{aligned}$$

also gilt (V2)(b) für $\mathcal{F}(A,V)$,

$$\begin{aligned}(\alpha(f+g))(x) \quad = \quad \alpha(f+g)(x) \quad &= \quad \alpha(f(x)+g(x))\\ &= \quad \alpha f(x)+\alpha g(x) \quad \text{wegen (V2)(a) fr}\, V\\ = \quad (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x) \quad &= \quad (\alpha f+\alpha g)(x) \quad , \qquad \text{also}\\ \alpha(f+g) \quad &= \quad \alpha f+\alpha g \quad ,\end{aligned}$$

also gilt (V2)(a) für $\mathcal{F}(A,V)$,

$$\begin{aligned}(\alpha(\beta f))(x) \quad = \quad \alpha(\beta f)(x) \quad &= \quad \alpha(\beta(f(x)))\\ &= \quad (\alpha\cdot\beta)f(x) \quad \text{wegen (V2)(c) für}\ \ V \quad ,\\ &= \quad ((\alpha\cdot\beta)f)(x) \quad , \qquad \text{also}\\ \alpha(\beta f) \quad &= \quad (\alpha\cdot\beta)f \quad ,\end{aligned}$$

also gilt (V2)(c) für $\mathcal{F}(A,V)$, und

$$(1f)(x) \quad = \quad 1f(x) \quad = \quad f(x) \quad \text{wegen (V2)(d) für } V \quad , \qquad \text{also}$$

$$1f \quad = \quad f \quad ,$$

also gilt (V2)(d) für $\mathcal{F}(A,V)$. Insgesamt haben wir gezeigt: $\mathcal{F}(A,V)$ ist ein $K-$Vektorraum. □

Beispiel 19.1.6 : Sei K ein Körper. Nach Beispiel 19.1.4 a.) ist K selbst ein $K-$Vektorraum, wenn man die Multiplikation von K als "äußere" Operation von K auf K nimmt. Nach Beispiel 19.1.5 ist dann für eine beliebige nichtleere Menge A auch $\mathcal{F}(A,K)$ ein $K-$Vektorraum, wenn man für

$$f,g \in \mathcal{F}(A,K) \quad \text{und} \quad \alpha \in K$$

$$f+g \quad \text{und} \quad \alpha f \quad \text{definiert durch}$$

$$(*)\,(f+g)(x) \quad := \quad f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (**) \quad (\alpha f)(x) \quad := \quad \alpha \cdot f(x)$$

für $x \in A$. Einen wichtigen Spezialfall betrachten wir gleich.

Definition 19.1.7 : Seien J und M Mengen. Für

$$a : \ J \longrightarrow M \quad , \quad j \longmapsto a(j)$$

schreiben wir auch

$$(a_j)_{j\in J} \quad \text{statt} \quad a \quad \text{und} \quad a_j \quad \text{statt} \quad a(j) \quad ,$$

und sprechen von der **Familie** $(a_j)_{j\in J}$ in M mit der **Indexmenge** J statt von der Funktion a . - Familien sind also einfach Funktionen, etwas anders geschrieben. Familien mit Indexmenge $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ hatten wir in §5 , das waren Folgen.
Die Familie $(a_j)_{j\in J}$ heißt **endlich** , wenn J eine endliche Menge ist. Ist $I \subset J$, so heißt

$$a|_I \quad = \quad (a_j)_{j\in I}$$

eine **Teilfamilie** von $(a_j)_{j\in J}$. □

Beispiel 19.1.8: Der $K-$Vektorraum K^n

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir hatten definiert:

$$\underline{n} \quad = \quad \{1,\ldots,n\} \quad .$$

Nach Beispiel 19.1.6 ist dann

$$\mathcal{F}(\underline{n},K) \quad = \quad \{ \ (a_j)_{j\in\underline{n}} \ | \ \forall\, j \in \underline{n} : a_j \in K \ \}$$

ein Vektorraum, mit den durch $(*)$ und $(**)$ definierten Rechenoperationen, die sich in der Schreibweise mit Familien schreiben lassen als

$$(*) \quad (a_j)_{j\in\underline{n}}\,,\,(b_j)_{j\in\underline{n}} \quad := \quad (a_j+b_j)_{j\in\underline{n}} \quad ,$$

$$(**) \quad \lambda\,(a_j)_{j\in\underline{n}} \quad := \quad (\lambda\cdot a_j)_{j\in\underline{n}} \quad \text{für} \quad (a_j)_{j\in\underline{n}}\,,\,(b_j)_{j\in\underline{n}} \in \mathcal{F}(\underline{n},K)\,,\,\lambda \in K \quad .$$

Schreibt man nun

$$(a_1, \ldots, a_n) \quad := \quad (a_j)_{j \in \underline{n}} \quad ,$$

so sieht man , dass $\mathcal{F}(\underline{n}, K)$ die Menge der $\overline{n-\textbf{tupel}}$ von Elementen aus K ist. Man schreibt $K^n := \mathcal{F}(\underline{n}, K)$, und K^n wird also ein $K-$Vektorraum, wenn man

$$(*) \quad (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) \quad := \quad (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \quad ,$$

$$(**) \quad \lambda(a_1, \ldots, a_n) \quad := \quad (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

definiert. Insbesondere erhalten wir damit für $K := \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}-$Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als Beispiele. □

Einige Rechenregeln für Vektorräume folgen direkt aus den Axiomen:

Satz 19.1.9 : Sei K ein Körper, 1 das Einselement von K, und V ein $K-$Vektorraum. Dann gilt für alle $a \in V$ und alle $\alpha \in K$:

(1) $\underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ in } K}}{0}\, a = \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ in } V}}{0}$, (2) $\alpha\, \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ in } V}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \text{ in } V}}{0}$,

(3) $(-\alpha)a = -(\alpha\, a) = \alpha(-a)$,
man kann daher für alle drei Elemente $-\alpha a$ schreiben,

(4) $(-1)a = -a$.

Beweis : (1) $0\, a = (0+0)a \overset{\text{(V2)(b)}}{=} 0a + 0a$, also
$0a + (-(0a)) = 0a + 0a + (-0a)$, also
$0 = 0a$.

(2) $\alpha 0 \overset{\text{(V1)}}{=} \alpha\,(0+0) \overset{\text{(V2)(a)}}{=} \alpha 0 + \alpha 0$,
und Subtraktion von $\alpha\, 0$ ergibt $0 = \alpha\, 0$.

(3) $0 \overset{(1)}{=} 0\, a = (\alpha + (-\alpha))a \overset{\text{(V2)(b)}}{=} \alpha\, a + (-\alpha)a$, also
$(-\alpha)a = -(\alpha a)$, und
$0 \overset{(2)}{=} \alpha\, 0 \overset{\text{(V1)}}{=} \alpha(a + (-a)) \overset{\text{(V2)(a)}}{=} \alpha a + \alpha(-a)$, also
$\alpha(-a) = -(\alpha a)$.

(4) $(-1)a \overset{(3)}{=} -(1\, a) \overset{\text{(V2)(d)}}{=} -a$. □

Satz 19.1.10 : Sei V ein $K-$Vektorraum. Dann gilt

$$\forall\, \alpha \in K\, \forall\, a \in V \; : \; (\alpha a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = 0 \;\vee\; a = 0) \quad .$$

Beweis : " $\Longleftarrow$ " gilt nach Satz 19.1.9 (1) und (2) .
" $\Longrightarrow$ " : Sei $\alpha a = 0$. Es kann $\alpha = 0$ sein, dann sind wir fertig, oder $\alpha \neq 0$, also $\alpha \in K^*$. Dann existiert $\alpha^{-1} \in K^*$, und es folgt

$$0 = \alpha^{-1}\, 0 = \alpha^{-1}(\alpha\, a) \overset{\text{(V2)(c)}}{=} (\alpha^{-1}\, \alpha)a = 1a \overset{\text{(V2)(d)}}{=} a \quad .$$

In jedem Fall gilt $\alpha = 0 \vee a = 0$. □

<u>Definition 19.1.11 :</u> Sei K ein Körper und V ein $K-$Vektorraum. W heißt ein **<u>Untervektorraum</u>** (**<u>Unterraum</u>**, **<u>Teilraum</u>**) von V , falls gilt
(UV1) $W \subset V \quad \wedge \quad W \neq \emptyset$
(UV2) $\forall\, v, w \in W \ : \ v + w \in W$
(UV3) $\forall\, v \in W \,\forall\, \lambda \in K \ : \ \lambda\, v \in W$. □

Die Definition des Untervektorraums ist sinnvoll wegen

<u>Satz 19.1.12 :</u> Ist V ein $K-$Vektorraum und W ein Untervektorraum von V, so ist W mit der auf $W \times W$ eingeschränkten Verknpfung $+$ und der auf $K \times W$ eingeschränkten äußeren Operation selbst ein $K-$Vektorraum.
<u>Beweis :</u> Die Axiome (UV2) und (UV3) sagen, dass die Restriktionen

$$+|_{W \times W} \ : \ W \times W \longrightarrow V \quad , \quad (v, w) \longmapsto v + w \quad , \quad \text{und}$$

$$\omega|_{K \times W} \ : \ K \times W \longrightarrow V \quad , \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

tatsächlich Abbildungen <u>nach W</u> sind. Man hat also eine Addition und eine äußere Operation auf W. Die Rechenregeln

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (u + v) + w \\ u + v &= v + u \\ \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v \\ (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u \\ (\lambda \cdot \mu)u &= \lambda(\mu\, u) \\ 1\, u &= u \end{aligned}$$

für alle $u, v, w \in W$ und alle $\lambda, \mu \in K$ gelten, da sie sogar für alle $u, v, w \in V$ gelten. Damit hat man (V2), und einen Teil von (V1). Sei $v \in W$, dann ist nach (UV3) auch

$$-v \quad = \quad (-1)\, v \,\in\, W \quad .$$

Damit hat man zu $v, u \in W$ ein <u>$x \in W$</u> mit $v + x \,=\, u$, nämlich $x \,:=\, (-v) + u \in W$ nach (UV2) . Auch ist $W \neq \emptyset$. Also gilt auch (V1) für W . □

<u>Beispiele 19.1.13 :</u> a.) Sei V ein beliebiger Vektorraum, dann sind $\{0\}$ und V Untervektorräume von V.
b.) Sei $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$ und

$$\mathbb{R}\, v \quad := \quad \{ \ \lambda\, v \ | \ \lambda \in \mathbb{R} \ \} \quad ,$$

dann ist $\mathbb{R}\, v$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}-$Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Man kann sich $\mathbb{R}\, v$ vorstellen als Gerade durch den Nullpunkt, wobei v die “Richtung” angibt.

(19.1.14) Sei K ein Körper. Im $K-$Vektorraum $\mathcal{F}(K,K)$ aller Funktionen von K nach K sei

$$\mathcal{P}(K) \quad := \quad \{f \in \mathcal{F}(K,K) \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,\forall\, j \in \underline{n} \cup \{0\} \exists\, a_j \in K \,\forall\, x \in K \;: \quad f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\}\,.$$

$\mathcal{P}(K)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(K,K)$, denn $\mathcal{P}(K) \subset \mathcal{F}(K,K)$ nach Definition, $\mathcal{P}(K) \neq \emptyset$, denn für

$$\mathcal{O} : \; K \longrightarrow K \quad , \quad \mathcal{O}(x) := 0 \quad \text{für alle} \quad x \in K \quad \text{gilt}$$

$$\mathcal{O}(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{0} 0 \cdot x^j \quad ,$$

also $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(K)$. Seien $f, g \in \mathcal{P}(K)$ und $\lambda \in K$, dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots a_n, b_0, \dots b_m \in K$ mit

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad \text{und} \quad g(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad \text{für alle} \quad x \in K\,.$$

Sei Œ $n \leq m$, dann setzen wir $a_j := 0$ für $j \in \underline{m} \setminus \underline{n}$, und haben dann für alle $x \in K$:

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \quad , \quad g(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad , \qquad \text{also}$$

$$f(x) + g(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} (a_j + b_j) x^j \quad ,$$

$$(\lambda f)(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{m} (\lambda a_j) x^j \quad ,$$

also $f + g\,,\, \lambda f \in \mathcal{P}(K)$. $\mathcal{P}(K)$ heißt der **Vektorraum der Polynomfunktionen auf K** . □

19.2 Basis und Dimension

Grundlegend für die Lineare Algebra sind die Begriffe "lineare Unabhängigkeit" und "Erzeugendensystem":

Definition und Satz 19.2.1 : Sei K ein Körper , V ein $K-$Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(v_j)_{j \in \underline{n}}$ eine Familie von Vektoren aus V . Sei

$$\mathrm{span}(v_j)_{j\in\underline{n}} \quad := \quad \left\{ \; a \in V \;\; | \;\; \exists\,(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \; : \; a \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \; \right\}\,.$$

Dann ist $\mathrm{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$ ein Untervektorraum von V . Er heißt der von der Familie $(v_j)_{j\in\underline{n}}$ **aufgespannte Untervektorraum** von V . Die Elemente von $\mathrm{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$ heißen **Linearkombinationen** von $(v_j)_{j\in\underline{n}}$. Es gilt :

(1) $v_1, \ldots, v_n \in \text{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$.
(2) Für jeden Untervektorraum U von V mit
$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset U$ gilt : $\text{span}(v_j)_{j\in\underline{n}} \subset U$,
d.h. $\text{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$ ist der "kleinste" Untervektorraum von V , der die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ enthält. - Man setzt noch :

$$\text{Span}(v_j)_{j\in\underline{0}} \quad := \quad \{0\} \quad .$$

Beweis : Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $T := \text{span}(v_j)_{j\in\underline{n}}$.
(0) Wir zeigen zunächst, dass T ein Untervektorraum von V ist:
Für $n = 0$ ist das klar. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $T \subset V$ nach Definition, und
(UV1) $T \neq \emptyset$, da $\underset{\substack{\uparrow \\ \in V}}{0} = \sum\limits_{j=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \in K}}{0}\, v_j \in T$.

(UV2,3) Seien $a, b \in T$ und $\lambda \in K$, dann gibt es
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K^n$ mit

$$a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{und} \quad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \quad , \quad \text{also}$$

$$a + b = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) v_j \quad , \quad \lambda\, a = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, \alpha_j) v_j \quad , \quad \text{also}$$

$a + b \in T$, $\lambda\, a \in T$ wegen
$(\alpha_j + \beta_j)_{j\in\underline{n}}$, $(\lambda\, \alpha_j)_{j\in\underline{n}} \in K^n$.

(1) Für $n = 0$ ist bei (1) und (2) nichts zu zeigen. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $k \in \underline{n}$:

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk}\, v_j \quad \text{mit } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \quad ,$$

also $v_k \in T$.
(2) Sei U ein Untervektorraum von V mit
$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset U$,
dann sind alle $v_j \in U$ für $j \in \underline{n}$, und für beliebiges $\alpha_j \in K$ ist nach (UV3) auch $\alpha_j v_j \in U$. Nach (UV2), und mit Induktion nach n , folgt auch

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \in U \quad .$$

Also gilt $T \subset U$. □

Definition 19.2.2 : Sei V ein $K-$Vektorraum. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Familie $(v_j)_{j\in\underline{n}}$ mit $v_j \in V$ und

$$V \quad = \quad \text{span}(v_j)_{j\in\underline{n}} \quad ,$$

dann heißt V **endlich erzeugt** und die Familie $(v_j)_{j\in\underline{n}}$ ein **Erzeugendensystem** von V . □

Formal etwas komplizierter ist der Begriff "linear unabhängig":

Definition 19.2.3 : Sei K ein Körper und V ein $K-$Vektorraum.
Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \ldots, a_n \in V$. Die Familie

$$(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad (a_j)_{j \in \underline{n}}$$

heißt **linear unabhängig** , wenn gilt

$$\forall\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \; : \; \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \, = \, 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, j \in \underline{n} \, : \, \alpha_j \, = \, 0 \right) .$$

Die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ heißt **linear abhängig** , wenn sie nicht linear unabhängig ist, d.h. wenn gilt

$$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \; : \; \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \, = \, 0 \wedge \exists\, j \in \underline{n} \, : \, \alpha_j \neq 0 \right) .$$

Die "leere Familie" $(a_j)_{j \in \underline{0}}$ nennen wir linear unabhängig. □

Bemerkung 19.2.4 : Nach Definition 19.2.1 heißt der Vektor $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, v_k$ eine Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_n)$. Man nennt nun eine Linearkombination $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, v_k$, in der nicht alle $\alpha_k \, = \, 0$ sind, eine **nichttriviale Linearkombination** von $(v_1, \ldots, v_n)$, und die Linearkombination

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, v_k \quad \text{mit} \quad \forall\, k \in \underline{n} \, : \, \alpha_k \, = \, 0$$

die **triviale Linearkombination**. Also besagt Definition 19.2.3 :
Eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist

- linear unabhängig genau dann, wenn nur die triviale Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_n)$ Null ist, und
- linear abhängig, wenn es eine nichttriviale Linearkombination von $(v_1, \ldots, v_n)$ gibt, die Null ist. □

Beispiel 19.2.5 : Für eine beliebige Teilmenge A von $\mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ist nach Beispiel 19.1.6

$$\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad = \quad \{\, f \, : \, A \; \longrightarrow \; \mathbb{R} \,\}$$

ein $\mathbb{R}-$Vektorraum, mit den dort durch $(*)$ und $(**)$ definierten Rechenoperationen. Für $x \in A$ sei

$$f_1(x) \, := \, |x| \quad , \quad f_2(x) \, := \, x^2 + x \quad , \quad f_3(x) \, := \, x^2 - x \quad .$$

a) Sei $A := \mathbb{R}$ und $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha_1\, f_1 + \alpha_2\, f_2 + \alpha_3\, f_3 \, = \, \mathcal{O} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \quad ,$$

dann gilt für alle $x \in A \, = \, \mathbb{R}$:

$$\alpha_1\, f_1(x) + \alpha_2\, f_2(x) + \alpha_3\, f_3(x) \, = \, \mathcal{O}(x) \, = \, 0 \in \mathbb{R} \quad ,$$
$$\alpha_1\, |x| + \alpha_2\, (x^2 + x) + \alpha_3\, (x^2 - x) \, = \, 0 \quad ,$$

insbesondere für $x \, = \, 1, 2, -1$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & & & = 0 & , \quad \text{also} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1, \\ 2\alpha_1 & + & 6\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = 0 & , \quad \text{also} \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1, \\ \alpha_1 & & & + & 2\alpha_3 & = 0 & , \quad \text{also} \quad 2\alpha_1 = 0, \end{array}$$

also $\alpha_1 = 0$ und damit auch $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Also ist (f_1, f_2, f_3) im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig.

b) Sei nun $A := \mathbb{R}_+^*$, dann gilt für alle $x \in A$:

$$f_1(x) = x \quad ,$$
$$-2x + (x^2 + x) - (x^2 - x) \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{also}$$
$$-2f_1 + 1 \cdot f_2 + (-1)f_3 \quad = \quad \mathcal{O} \quad ,$$

also ist (f_1, f_2, f_3) im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ linear abhängig. □

- Was bedeutet "lineare Unabhängigkeit" für zwei Vektoren ?

Bemerkung 19.2.6 : Seien $a_1, a_2 \in V$, und (a_1, a_2) sei linear abhängig, dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ mit

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0$$

und α_1, α_2 sind nicht beide 0 . Ist $\alpha_1 \neq 0$, so folgt

$$a_1 = -(\alpha_1^{-1} \cdot \alpha_2)a_2 \quad ,$$

ist $\alpha_1 = 0$, so folgt $\alpha_2 \neq 0$ und

$$\alpha_2 a_2 = 0, \quad \text{also} \quad a_2 = 0, \quad \text{also}$$
$$a_2 = 0\, a_1 \quad .$$

Jedenfalls ist einer der beiden Vektoren (man weiß aber nicht, welcher) ein $\lambda-$ faches des anderen. Das gilt im Prinzip genau so für mehr als zwei Vektoren:

Satz 19.2.7 : Sei V ein $K-$Vektorraum . Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Familie von Vektoren aus V . Dann gilt:

$(a_1, \ldots, a_n)$ ist linear abhängig $\iff$ es gibt ein $k \in \underline{n}$, so dass a_k Linearkombination von $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ ist.

Beweis : " $\Longrightarrow$ " Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ linear abhängig, dann gibt es

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \quad , \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \quad , \text{ mit}$$
$$0 \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, a_j \quad .$$

Es gibt ein $k \in \underline{n}$ mit $\alpha_k \neq 0$, also ist

$$a_k \quad = \quad -\alpha_k^{-1} \cdot \sum_{j \in \underline{n} \setminus \{k\}} \alpha_j a_j \quad = \quad \sum_{j \in \underline{n} \setminus \{k\}} (-\alpha_k^{-1} \cdot \alpha_j) a_j \quad .$$

" $\Longleftarrow$ ": Sei a_k Linearkombination von $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, dann gibt es eine Familie $(\beta_j)_{j \in \underline{n} \setminus \{k\}} \in K^{n-1}$ mit

$$a_k \quad = \quad \sum_{j \in \underline{n} \setminus \{k\}} \beta_j a_j \quad , \quad \text{also mit} \quad \beta_k := -1 \ :$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j = 0 \quad \text{und} \quad (\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_n) \neq 0 \quad ,$$

also ist $(a_1, \ldots, a_n)$ linear abhängig . □

Definition 19.2.8 : Sei V ein endlich erzeugter $K-$Vektorraum .
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Familie $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ von Elementen aus V heißt eine **Basis** von V, wenn gilt

(B1) $V = \operatorname{span}(v_j)_{j\in \underline{n}}$, d.h. $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ ist ein Erzeugendensystem von V , und

(B2) $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ ist linear unabhängig.

Die Zahl n heißt die **Länge der Basis** $(v_j)_{j\in \underline{n}}$. □

Hier in diesem Paragraphen beschäftigen wir uns hauptsächlich mit endlich erzeugten Vektorräumen. In der Physik (Quantentheorie) kommen aber auch nicht endlich erzeugte Vektorräume vor, d.h. sie liefern brauchbare mathematische Modelle. Wir definieren daher auch, was eine Basis eines nicht endlich erzeugten Vektorraums ist:

Definition 19.2.9 : Sei V ein $K-$Vektorraum , $V \neq \{0\}$. Eine Familie $(v_j)_{j\in J}$ von Vektoren $v_j \in V$, wobei J eine beliebige Menge ist, heißt eine **Basis** von V, wenn gilt

(B1') $(v_j)_{j\in J}$ ist ein **Erzeugendensystem** von V , d.h. zu jedem $a \in V$ gibt es eine endliche Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_n\}$ von J , so dass $a \in \operatorname{span}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$ ist, und

(B2') $(v_j)_{j\in J}$ ist **linear unabhängig** , d.h. für jede endliche Teilmenge $\{j_1, \ldots, j_n\}$ von J ist $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$ linear unabhängig. □

Satz 19.2.10 : Sei V ein $K-$Vektorraum und $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Familie in V . Dann gilt:

$$(v_j)_{j\in \underline{n}} \text{ ist Basis von } V \iff \forall\, v \in V \exists_1 (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j ,$$

d.h. $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn man jeden Vektor aus V eindeutig als Linearkombination von $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ erhält.

Beweis : " $\Longrightarrow$ " : Sei $v \in V$, dann gilt wegen $V = \operatorname{span}(v_j)_{j\in \underline{n}}$:

$$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad .$$

Sei auch , $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K^n$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$, dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j)\, v_j = v - v = 0 \quad ,$$

und da $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ linear unabhängig ist : $\forall\, j \in \underline{n} : \alpha_j - \beta_j = 0$, also $\forall\, j \in \underline{n} : \alpha_j = \beta_j$, also

$$\exists_1 (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n : v = \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j v_j \quad .$$

" $\Longleftarrow$ " : Es gelte $\forall\, v \in V \exists_1 (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n : v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, dann ist $(v_j)_{j\in \underline{n}}$ ein Erzeugendensystem von V . Sei

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad ,$$

dann folgt wegen $0 = \sum_{j=1}^{n} 0\, v_j$, und da sich 0 eindeutig als Linearkombination von $(v_j)_{j \in \underline{n}}$ darstellen lässt,

$$\forall j \in \underline{n} : \quad \alpha_j = 0 \quad .$$

Also ist $(v_j)_{j \in \underline{n}}$ linear unabhängig. □

Beispiel 19.2.11 : Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist K^n, die Menge der $n-$tupel von Elementen in K, mit den in 19.1.8 definierten Rechenoperationen ein $K-$Vektorraum . Setzen wir für $k \in \underline{n}$:

$$e_k := (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k-\text{te Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0) = (\delta_{jk})_{j \in \underline{n}} \quad \text{mit } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \quad ,$$

so ist $(e_k)_{k \in \underline{n}}$ eine Basis von K^n. Sie heißt die **kanonische** oder **Standard-Basis** von K^n.

Beweis: Sei $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \in K^n$ mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$, dann ist

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \quad , \quad \text{also}$$

$$\forall k \in \underline{n} : \quad \alpha_k = 0 \quad ,$$

nach Definition der Gleichheit zweier Funktionen bzw. Familien. Also ist $(e_k)_{k \in \underline{n}}$ linear unabhängig. Sei $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ beliebig, dann gilt

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \quad ,$$

also ist $(e_k)_{k \in \underline{n}}$ ein Erzeugendensystem von K^n. □

Beispiel 19.2.12 : In dem in 19.1.14 definierten $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ der Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sei

$$f_j(x) := x^j \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Wir behaupten: $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Basis von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Beweis: (B1') ist klar, denn sei $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x) \text{ ist, also}$$

$$f = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j \quad ,$$

f ist eine Linearkombination der endlichen Teilfamilie $(f_j)_{j \in \underline{n} \cup \{0\}}$.

(B2') Sei $J \subset \mathbb{N}_0$ endlich und $\sum_{j \in J} \alpha_j f_j = 0$. Setzen wir noch

$$\alpha_j := 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0 \setminus J \quad , \quad \text{so haben wir}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j = 0 \quad .$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j$ ist eine Potenzreihe in x, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, da nur endlich viele $\alpha_j \neq 0$ sind, und zwar gegen 0 . Insbesondere gilt für jede gegen 0 konvergente Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $z_k \neq 0$ (etwa $z_k := \frac{1}{k}$) :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, z_k^j \quad = \quad 0 \quad ,$$

und nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (6.4.17) folgt

$$\forall \, j \in \mathbb{N}_0 : \quad \alpha_j \, = \, 0 \quad .$$

Also ist $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig. □

Bemerkung 19.2.13 : Unser Ziel ist es, zu zeigen:
(I) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Für endlich erzeugte Vektorräume folgt der Beweis.
(II) Ist V endlich erzeugt, so haben zwei Basen von V die gleiche Lnge.
Zum Beweis brauchen wir den Basisergänzungssatz und den Austauschsatz, die beide nicht wirklich schwierig zu beweisen sind :

Basisergänzungssatz 19.2.14 : Sei V ein endlich erzeugter $K-$Vektorraum . Sei

$(a_j)_{j \in \underline{r}}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ ein endliches Erzeugendensystem von V

und

$(b_k)_{k \in \underline{s}}$ mit $s \in \mathbb{N}_0$ eine linear unabhängige Familie in V .

Dann gibt es t Vektoren

$b_{s+1}, \ldots, b_{s+t} \in \{a_1, \ldots, a_r\}$, so dass

$(b_k)_{k \in \underline{s+t}}$ eine Basis von V ist.

Also: Man kann jede linear unabhängige Familie durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus V zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis : Es kann sein, dass gilt :

(a) $(b_k)_{k \in \underline{s}}$ ist ein Erzeugendensystem von V ,

dann ist $(b_k)_{k \in \underline{s}}$ bereits eine Basis von V , wir brauchen also nichts hinzuzunehmen, können also $t := 0$ nehmen. Wenn (a) nicht gilt, ist jedenfalls

$$(b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_r)$$

ein Erzeugendensystem von V , denn sei $v \in V$, dann

$$\exists \, (\alpha_j)_{j \in \underline{r}} \in K^r : \quad v \, = \, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, a_j \quad , \quad \text{also}$$

$$v \, = \, \sum_{k=1}^{s} 0 \, b_k \, + \, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \, a_j \, \in \, \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_s, a_1, \ldots, a_r) \quad .$$

Dabei kann es sein, dass man nicht alle der Vektoren $a_1, \ldots, a_r$ braucht , um - zusammen mit den $b_1, \ldots, b_s$ - V zu erzeugen. Sei

$$M \quad := \quad \{ m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \{c_1, \ldots, c_m\} \subset \{a_1, \ldots, a_r\} : \\ V \, = \, \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_m) \} \quad ,$$

dann ist $M \subset \mathbb{N}_0 \, , \, r \in M$, also $M \neq \emptyset$, und nach Satz 2.3.12 (K15) existiert

$$t \quad := \quad \min M \, \in \, \mathbb{N}_0 \quad ,$$

sogar $t \in \mathbb{N}$, da (a) nicht gilt. Dann ist

$(b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_t)$ mit $\{c_1, \ldots, c_t\} \subset \{a_1, \ldots, a_r\}$

ein Erzeugendensystem von V , und auch linear unabhängig, denn seien $\beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t \in K$ mit

$$\sum_{k=1}^{s} \beta_k \, b_k \, + \, \sum_{l=1}^{t} \gamma_l \, c_l \quad = \quad 0 \quad ,$$

dann könnte gelten :

(1) $\exists\, i \in \underline{t} : \gamma_i \neq 0$, dann folgt für dieses i:

$$c_i \quad = \quad \sum_{k=1}^{s} (-\gamma_i^{-1}\beta_k) b_k + \sum_{l \in \underline{t} \setminus \{i\}} (-\gamma_i^{-1}\gamma_l) c_l \quad ,$$

also $c_i \in \operatorname{span}(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_t)$, also

$(*) \quad V \quad = \quad \operatorname{span}(b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_t) \quad ,$

denn zu jedem $v \in V$ gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \delta_1, \dots, \delta_t \in K$ mit

$$v \quad = \quad \sum_{k=1}^{s} \alpha_k\, b_k + \sum_{l=1}^{t} \delta_l\, c_l\,, \qquad \text{also}$$

$$v \quad = \quad \sum_{k=1}^{s} (\alpha_k - \delta_i\gamma_i^{-1}\beta_k) b_k + \sum_{l \in \underline{t} \setminus \{i\}} (\delta_l - \delta_i\gamma_i^{-1}\gamma_l) c_l \quad .$$

Aus $(*)$ folgt aber : $t - 1 \in M$, Widerspruch zu $t = \min M$. Also gilt (1) nicht, sondern

(2) $\forall\, l \in \underline{t} : \gamma_l = 0$, und damit

$\sum\limits_{k=1}^{s} \beta_k b_k = 0$, also, da $(b_k)_{k \in \underline{s}}$ linear unabhängig ist, auch

$\forall k \in \underline{s} : \beta_k = 0 \quad ,$

und wir sind fertig. □

Folgerung 19.2.15 : Sei V ein $K-$Vektorraum und

$(a_j)_{j \in \underline{r}}$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ ein Erzeugendensystem von V.

Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, $n \leq r$ und eine Teilfamilie

$(c_1, \dots, c_n)$ von $(a_j)_{j \in \underline{r}}$, die Basis von V ist.

Beweis : Man wende Satz 19.2.14 mit $s := 0$ an. □

Folgerung 19.2.16 : Jeder endlich erzeugte $K-$Vektorraum V besitzt eine Basis. □

Bemerkung 19.2.17 : Auch Vektorräume, die nicht endlich erzeugt sind, besitzen eine Basis. Wir wollen das aber nicht beweisen.

Hilfssatz 19.2.18 : Sei V ein $K-$Vektorraum und $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V. Seien $u, v \in V$ beliebig, dann ist

$(u, v, b_2, \dots, b_n)$ linear abhängig.

Beweis : Wegen $u, v \in \operatorname{span}(b_j)_{j \in \underline{n}}$ gilt :

$$\exists\, (\beta_j)_{j \in \underline{n}} : u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, b_j \quad \wedge \quad \exists\, (\gamma_j)_{j \in \underline{n}} : v = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, b_j \quad , \qquad \text{also}$$

$$\gamma_1 u - \beta_1 v \quad = \quad \sum_{j=2}^{n} (\gamma_1\beta_j - \beta_1\gamma_j)\, b_j\,,$$

und wenn $\gamma_1 \neq 0$ oder $\beta_1 \neq 0$ ist, folgt die Beh. Für $\gamma_1 = 0$ haben wir

$$0\, u + (-1) v + \sum_{j=2}^{n} \gamma_j\, b_j \quad = \quad 0 \quad ,$$

und wegen $-1 \neq 0$ folgt die Behauptung. □

<u>Austauschsatz 19.2.19 :</u> Sei V ein $K-$Vektorraum , $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $(a_1, \ldots, a_m)$ ein Erzeugendensystem von V . Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:
Wenn $k \leq n$ ist, gibt es k Vektoren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in \{a_1, \ldots, a_m\}$, so dass
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{k+1}, \ldots, b_n)$$
eine Basis von V ist.
<u>Beweis</u> durch Induktion nach k :
(I) Für $k = 0$ ist die Behauptung trivialerweise wahr.
(II) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, und für k sei die Behauptung wahr. Ist $k \leq n$, so haben wir dann eine Basis
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{k+1}, \ldots, b_n) \quad \text{mit} \quad a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \in \{a_1, \ldots, a_m\}$$
von V . Ist nun $k + 1 > n$, so ist die Behauptung für $k + 1$ richtig.
Ist $k + 1 \leq n$, so ist $k < n$, und
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, \qquad b_{k+2} \ldots, b_n)$$
ist eine aus $n - 1$ Vektoren bestehende, linear unabhängige, Familie in V . Nach Satz 19.2.14 kann man sie durch Hinzunahme von Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m\}$ ergänzen zu einer Basis von V. Zwei (oder mehr) Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m\}$ können es nach Hilfssatz 19.2.18 nicht sein, denn dann wäre die entstehende Familie linear abhängig, da wir aus
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n)$$
nur den einen Vektor b_{k+1} herausgenommen haben. 0 Vektoren aus $\{a_1, \ldots, a_m\}$ können es auch nicht sein, denn dann wäre bereits $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{k+2}, \ldots, b_n)$ eine Basis von V , also b_{k+1} eine Linearkombination dieser Basis und damit $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ linear abhängig. Also können wir einen Vektor aus $\{a_1, \ldots, a_m\}$ finden, den wir $a_{i_{k+1}}$ nennen, so dass
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}}, b_{k+2}, \ldots, b_n) \quad \text{eine Basis von } V \text{ ist.}$$
□

<u>Folgerung 19.2.20 :</u> Sei V ein $K-$Vektorraum . Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $(a_1, \ldots, a_m)$ ein Erzeugendensystem und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V . Dann gilt
$$n \leq m \quad .$$
<u>Beweis :</u> Wir wenden den Austauschsatz an mit $k := n$: Es gibt n Vektoren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in \{a_1, \ldots, a_m\}$, so dass
$$(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \quad \text{eine Basis von } V \text{ ist.}$$
Die Vektoren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ sind alle verschieden, denn gäbe es $j, k \in \underline{n}$ mit $j \neq k$ und $a_{i_j} = a_{i_k}$, dann hätten wir
$$1 \cdot a_{i_j} + (-1)a_{i_k} + \sum_{l \in \underline{n} \setminus \{j,k\}} 0 \cdot a_{i_l} \quad = \quad 0 \quad ,$$
im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$. Also liegen in $\{a_1, \ldots, a_m\}$ mindestens n verschiedene Elemente; es ist $n \leq m$. □

Folgerung 19.2.21 : Sei V ein $K-$Vektorraum . Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$, und seien $(a_1, \ldots, a_m)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ Basen von V . Dann gilt $n = m$, d.h. zwei Basen von V haben gleiche Länge.

Beweis : Jede Basis ist auch ein Erzeugendensystem von V , also gilt nach Folgerung 19.2.20 :

$$n \leq m \quad \text{und} \quad m \leq n \quad . \qquad \square$$

Definition 19.2.22 : Sei V ein $K-$Vektorraum .

a) Ist V endlich erzeugt, so gibt es nach Folgerung 19.2.15 eine Basis endlicher Länge. Sei n die Länge einer beliebigen endlichen Basis von V . (Das n ist nach Folgerung 19.2.21 eindeutig bestimmt.) Dann setzen wir

$$\dim V \quad := \quad \dim_K V \quad := \quad n$$

und nennen n die **Dimension** von V (über K).

b) Ist V nicht endlich erzeugt, so schreiben wir :

$$\dim V \quad = \quad \dim_K V \quad = \quad \infty$$

und nennen V einen **unendlichdimensionalen** $K-$Vektorraum. $\square$

Beispiel 19.2.11 : Sei $n \in \mathbb{N}$. Im $K-$Vektorraum K^n war

$(e_1, \ldots, e_n)$ mit $e_k = (\delta_{jk})_{j \in \underline{n}}$

eine Basis, also ist $\dim_K K^n = n$.

Beispiel 19.2.12 : Im $\mathbb{R}-$Vektorraum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ war

$(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ mit $f_j(x) = x^j$ für $x \in \mathbb{R}$

eine Basis. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist nicht endlich erzeugt, denn wre

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = n \in \mathbb{N}_0$,

dann könnte man die aus $n+1$ Elementen bestehende Familie $(f_j)_{j \in \underline{n} \cup \{0\}}$ zu einer Basis ergänzen, die dann mehr als n Elemente hätte, Widerspruch zu Folgerung 19.2.21. Also ist

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

Beispiel 19.2.23 : Nach Beispiel 19.1.4 ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}-$Vektorraum. Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es eindeutig bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$z = a \cdot 1 + b \cdot i$,

also ist $(1, i)$ eine Basis des $\mathbb{R}-$Vektorraums $\mathbb{C}$, also ist

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Nach Beispiel 19.2.11 ist andererseits wegen $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$:

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Satz 19.2.24 : Sei V ein $K-$Vektorraum . V sei endlichdimensional, d.h. es gebe ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$\dim_K V = n$.

Dann gilt für jeden Untervektorraum U von V :

(1) Auch U ist endlich erzeugt, und $\dim_K U \leq \dim_K V$.

(2) Aus $\dim_K U = \dim_K V$ folgt $U = V$.

Beweis : (1) Es gibt eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V. Angenommen, es ist $\dim_K U = \infty$ oder $\dim_K U = m > n$, dann gibt es in U eine linear unabhängige Familie

$$(u_1, \ldots, u_{n+1}) \quad ,$$

die dann auch in V linear unabhängig ist. Nach dem Basisergänzungssatz 19.2.14 lässt sie sich ergänzen zu einer Basis

$$(u_1, \ldots, u_{n+1}, \ldots, u_r) \quad \text{von} \quad V \ ,$$

mit $r \geq n+1 > n$, Widerspruch zu Folgerung 19.2.21. Also ist $\dim U \leq n$.
(2) Sei $\dim_K U = \dim_K V = n$, dann gibt es eine Basis

$$(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{von} \quad U \ .$$

$(a_1, \ldots, a_n)$ ist linear unabhängig in V, lässt sich also nach 19.2.21 ergänzen zu einer Basis

$$(a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_t) \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{N}_0 \, , \, c_1, \ldots, c_t \in V$$

von V, die dann die Länge $n+t$ hat. Nach 19.2.21 folgt $n+t = n$, also $t = 0$, also ist $(a_1, \ldots, a_n)$ Basis von V,

$$V = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) = U \ . \qquad \square$$

19.3 Lineare Abbildungen

Definition 19.3.1 : Sei K ein Körper, V und W seien $K-$Vektorräume (also Vektorräume über demselben Krper). Eine Abbildung

$$F : V \longrightarrow W$$

heißt eine **$K-$lineare Abbildung** (oder ein **$K-$Vektorraum-Homomorphismus**, wenn gilt

(L1) $\forall\, a, b \in V : \ F(a+b) = F(a) + F(b)$, und

Addition in V , Addition in W

(L2) $\forall\, a \in V \,\forall\, \lambda \in K : \ F(\lambda a) = \lambda F(a)$.

äußere Operation auf V , auf W.

Ist F auch noch bijektiv, so heißt F ein **$K-$Vektorraum-Isomorphismus**.

Satz 19.3.2 : Seien V, W $K-$Vektorräume und

$F : V \longrightarrow W$ sei $K-$linear. Dann gilt

(1) $F(0) = 0$ und $\forall\, a, b \in V : F(a-b) = F(a) - F(b)$,
und damit: $F(-b) = -F(b)$.

(2) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig in V, dann ist $(F(v_1), \ldots, F(v_n))$ linear abhängig in W.

(3) Ist V' ein Untervektorraum von V, so ist $F(V')$ ein Untervektorraum von W.

(4) Ist W' ein Untervektorraum von W, so ist $\overset{-1}{F}(W')$ ein Untervektorraum von V.

(5) $\dim F(V) \leq \dim V$.

Beweis : (1) $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$, und wenn wir auf beiden Seiten $F(0)$ abziehen:

$$\begin{array}{ccc} 0 & = & F(0) \quad . \\ \uparrow & & \uparrow \\ \in W & & \in V \end{array}$$

Für $a, b \in V$ gilt

$$F(a) \;=\; F(a-b+b) \;=\; F(a-b)+F(b) \quad , \qquad \text{also}$$
$$F(a)-F(b) \;=\; F(a-b) \quad , \quad \text{und mit } a := 0 \; :$$
$$-F(b) \;=\; F(-b) \quad \text{wegen} \quad F(0) = 0 \; .$$

(2),(3),(4) als Übungsaufgabe.

(5) Für $\dim V = \infty$ ist das sicher richtig. Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}_0$, dann haben wir eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V . Zu $y \in F(V)$ gibt es ein $v \in V$ mit $y = F(v)$, und

$$\exists\, (\alpha_j)_{j \in \underline{n}} \in K^n \; : \; v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad , \qquad \text{also}$$

$$F(v) \;=\; F(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j) \overset{\text{(L1)}}{=} \sum_{j=1}^{n} F(\alpha_j v_j) \overset{\text{(L2)}}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(v_j) \quad ,$$

also ist $(F(v_1), \dots, F(v_n))$ ein Erzeugendensystem von $F(V)$, und nach Folgerung 19.2.20 :

$$\dim_K F(V) \le n \quad . \qquad \square$$

<u>Folgerung und Definition 19.3.3 :</u> Sei $F : V \longrightarrow W$ $K-$linear, dann ist

$$\text{Ker } F \;:=\; \overset{-1}{F}(\{0\}) \;=\; \{\; v \in V \mid F(v) = 0 \;\}$$

nach 19.2.3 (4) ein Untervektorraum von V . Ker F heißt der **<u>Kern</u>** von F . - Es gilt

<u>Satz 19.3.4 :</u> Sei $F : V \longrightarrow W$ $K-$ linear . Dann gilt:

$$F \text{ ist injektiv} \iff \text{Ker } F = \{0\} \quad .$$

<u>Beweis :</u> Nach 19.3.2 (1) gilt $F(0) = 0$, also $0 \in$ Ker F, also auf jeden Fall: $\{0\} \subset$ Ker F .

Sei nun F injektiv, und $v \in$ Ker F, dann gilt

$$F(v) = 0 = F(0) \quad , \qquad \text{also} \quad v = 0 \, ,$$

also Ker $F \subset \{0\}$, also Ker $F = \{0\}$.

Sei Ker $F = \{0\}$, und seien $a, b \in V$ mit $F(a) = F(b)$, dann folgt

$$0 = F(a) - F(b) \overset{19.3.2(1)}{=} F(a-b) \, , \quad \text{also}$$
$$a - b \in \text{Ker } F = \{0\} \, , \quad \text{also} \quad a - b = 0 \, , \quad \text{also} \quad a = b \, .$$

Also ist F injektiv. $\square$

<u>(19.3.5) Dimensionsformel für lineare Abbildungen :</u> Sei

$$F : V \longrightarrow W \quad K - \text{linear und } \dim_k V < \infty \quad .$$

Nach 19.3.3, 19.2.24 (1) und 19.3.2 (5) existieren endliche Basen
$(v_1, \ldots, v_k)$ von $\operatorname{Ker} F$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ von $F(V)$.
Zu den w_j , $j \in \underline{r}$, gibt es wegen $w_j \in F(V)$ Vektoren
$u_j \in V \quad \text{mit} \quad F(u_j) = w_j$.
Dann ist
$(*)$ $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von V ,
und damit gilt $\dim V = k + r$, also die Formel
$\dim V \quad = \quad \dim \operatorname{Ker} F + \dim F(V)$.
Beweisen müssen wir nur die Aussage $(*)$: Sei $v \in V$, dann ist $F(v) \in F(V)$, es gibt also $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ mit

$$F(v) \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j F(u_j) \quad = \quad F(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j) \quad ,$$

$$\text{also} \quad 0 \quad = \quad F(v) - F(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j) \quad = \quad F(v - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j) , \quad \text{also}$$

$$v - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j \in \operatorname{Ker} F \quad ,$$

und es gibt $\beta_1, \ldots, \beta_k \in K$ mit

$$v - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j \quad = \quad \sum_{l=1}^{k} \beta_l v_l , \quad \text{also}$$

$$v \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j + \sum_{l=1}^{k} \beta_l v_l \quad ,$$

also ist $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ ein Erzeugendensystem von V , aber auch linear unabhängig, denn aus

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j + \sum_{l=1}^{k} \beta_l v_l \quad = \quad 0$$

folgt, wenn man F auf beide Seiten anwendet :

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j w_j + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \cdot 0 \quad = \quad 0 \quad ,$$

und da $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $F(V)$ war:

$$\forall\, j \in \underline{r} : \;\; \alpha_j \; = \; 0 \quad .$$

Setzt man das in $(**)$ ein, so folgt $\sum_{l=1}^{k} \beta_l v_l = 0$, und da $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\operatorname{Ker} F$ war:

$$\forall\, l \in \underline{k} : \;\; \beta_l \quad = \quad 0 \quad . \qquad \square$$

Der Satz hört sich etwas theoretisch an, wir werden ihn bald praktisch - bei linearen Gleichungssystemen - brauchen.

(19.3.6) Beispiele für lineare Abbildungen

Triviale Beispiele sind

$$\mathcal{O} : V \longrightarrow W \quad , \quad \mathcal{O}(v) := 0 \in W \text{ für alle } v \in V \text{, und}$$
$$\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V \quad , \quad \mathrm{id}_V(x) := x \text{ für alle } x \in V \quad .$$

Ein weiteres Beispiel für lineare Abbildungen steht in

Satz und Definition 19.3.7 : Sei V ein $K-$Vektorraum mit $\dim_k V = n \in \mathbb{N}$ und

$\mathfrak{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V , dann ist

$$\Phi_{\mathfrak{B}} : K^n \longrightarrow V \quad , \quad \Phi_{\mathfrak{B}}(\beta_1, \ldots, \beta_n) := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, v_j$$

ein $K-$Vektorraum-Isomorphismus. .$\Phi_{\mathfrak{B}}$ heißt der durch $\mathfrak{B}$ gegebene **Basisisomorphismus** von K^n nach V.

Der **Beweis** ist leicht, zu leicht für eine Übungsaufgabe. □

Definition und Satz 19.3.8 : Seien V und W $K-$Vektorräume, dann ist

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{ \; F \in \mathcal{F}(V, W) \; | \; F \text{ ist } K-\text{linear } \}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(V, W)$. Für $V = W$ schreibt man

$$\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$$

und nennt die Elemente von $\mathrm{End}_K(V)$ **Endomorphismen** von V . Für $W = K$ nennt man

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

den **Dualraum** von V und die Elemente von V^* **Linearformen** auf V.

Beweis : Nach Definition ist $\mathrm{Hom}_K(V, W) \subset \mathcal{F}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}_K(V, W) \neq \emptyset$, da $\mathcal{O} : V \longrightarrow W , v \longmapsto 0$, $K-$ linear ist. Seien $F, G \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$,dann sind auch

$$F + G \, , \, \lambda F \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \quad ,$$

denn für $a, b \in V$ und $\alpha \in K$ gilt

$$(F+G)(a+b) \overset{(*)}{=} F(a+b) + G(a+b) \overset{(1)}{=} F(a) + F(b) + G(a) + G(b)$$
$$= F(a) + G(a) + F(b) + G(b) \overset{(*)}{=} (F+G)(a) + (F+G)(b) \quad ,$$
$$(F+G)(\alpha a) \overset{(*)}{=} F(\alpha a) + G(\alpha a) \overset{(1)}{=} \alpha F(a) + \alpha G(a)$$
$$= \alpha(F(a) + G(a)) \overset{(*)}{=} \alpha(F+G)(a) \quad ,$$
$$(\lambda F)(a+b) \overset{(**)}{=} \lambda F(a+b) \overset{(1)}{=} \lambda(F(a) + F(b))$$
$$= \lambda F(a) + \lambda F(b) \overset{(**)}{=} (\lambda F)(a) + (\lambda F)(b) \quad ,$$

$$(\lambda F)(\alpha a) \overset{(**)}{=} \lambda F(\alpha a) \overset{(1)}{=} \lambda(\alpha F(a))) = (\lambda \cdot \alpha)F(a)$$
$$= (\alpha \cdot \lambda)F(a) = \alpha(\lambda F(a)) \overset{(**)}{=} \alpha(\lambda F)(a) \quad .$$

Bei $(*)$ und $(**)$ haben wir die Definition der Rechenoperationen in $\mathcal{F}(V,W)$ benutzt, bei (1) die Linearität von F und G. $\square$

Auch die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist linear :

Satz 19.3.9 : Seien U, V, W $K-$Vektorräume,
$G \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ und $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$,
dann ist $F \circ G \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$.

Beweis : $F \circ G$ ist eine Abbildung von U in W . $F \circ G$ ist $K-$linear, denn für alle $a, b \in U$ und alle $\alpha \in K$ gilt

$$(F \circ G)(a+b) = F(G(a+b)) \overset{G \text{ linear}}{=} F(G(a)+G(b))$$
$$\overset{F \text{ linear}}{=} F(G(a)) + F(G(b)) = (F \circ G)(a) + (F \circ G)(b) \quad ,$$
$$(F \circ G)(\alpha a) = F(G(\alpha a)) \overset{G \text{ linear}}{=} F(\alpha G(a))$$
$$\overset{F \text{ linear}}{=} \alpha F(G(a)) = \alpha (F \circ G)(a) \quad .$$
$\square$

19.4 Matrizen

Unser Ziel ist es, einer linearen Abbildung eine Matrix zuzuordnen. Das geht, wenn die Räume endlichdimensional sind. Zur Vorbereitung brauchen wir

Satz 19.4.1 : Sei V ein endlichdimensionaler $K-$Vektorraum,
$(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ,
und seien $b_1, \ldots, b_n$ beliebige Vektoren aus einem $K-$Vektorraum W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung
$$F : V \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad F(v_j) = b_j \quad \text{für alle } j \in \underline{n} \quad ,$$
d.h. man kann eine lineare Abbildung dadurch definieren, dass man die Funktionswerte von Basiselementen festlegt.

Beweis : (1) Es gibt höchstens eine lineare Abbildung
$$F : V \longrightarrow W \quad \text{mit } F(v_j) = b_j \quad \text{für alle} \quad j \in \underline{n} \quad ,$$
denn man kann jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \text{mit} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$$

schreiben, und aus der Linearität von F folgt dann

$$(*) \quad F(v) = F\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \quad .$$

Wir wissen also, wie $F(v)$ zu berechnen ist, wenn überhaupt so ein $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ existiert.

(2) Um die Existenz eines $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit $\forall j \in \underline{n} : F(v_j) = b_j$ zu zeigen, <u>definieren</u> wir F durch $(*)$:

$$F(v) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \quad \text{für} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad .$$

Da die α_j durch v eindeutig bestimmt sind, ist F auf diese Weise eindeutig festgelegt, also eine Abbildung. F ist linear, denn für
$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $v' = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$, $\lambda \in K$ gilt

$$F(v+v') = F\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)v_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\beta_j)b_j = F(v)+F(v') \quad \text{und}$$

$$F(\lambda v) = F\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)v_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)b_j = \lambda F(v) \quad .$$

Es gilt $\forall\, k \in \underline{n} : F(v_k) = b_k$, denn

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk} v_j \quad \text{mit} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \quad , \text{ also}$$

$$F(v_k) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{jk} b_j = b_k \quad . \qquad \square$$

Bemerkung : In Satz 19.4.1 ist $(v_j)_{j\in\underline{n}}$ eine Basis von V , aber $(b_j)_{j\in\underline{n}}$ i.A. keine Basis von W . Man kann aber die b_j als Linearkombinationen einer Basis von W schreiben, dann erhält man

(19.4.2) Die zu einer linearen Abbildung gehörige Matrix :

Seien V und W endlichdimensionale $K-$Vektorraume und sei

$F : V \longrightarrow W$ $K-$linear.

Gegeben seien feste Basen

$(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ von W , mit $n, m \in \mathbb{N}$.

Dann hat man für alle $j \in \underline{n}$

$b_j := F(v_j)$,

die Vektoren b_j sind durch F eindeutig bestimmt, und umgekehrt ist nach Satz 19.4.1 auch F durch $(F(v_1), \ldots, F(v_n))$ eindeutig festgelegt. Da $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W ist, kann man die b_j eindeutig als Linearkombinationen von $(w_1, \ldots, w_m)$ schreiben :

$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m \\ \vdots & & \qquad\qquad\quad \vdots \\ b_n & = & a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m \end{array}$$

mit gewissen $m-$tupeln $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in K^m$, die natürlich von j abhängen. Kurz als Formel, die man sich **unbedingt** merken muss :

$$\boxed{(19.4.3) \qquad \forall\, j \in \underline{n}\ \exists_1 \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m : F(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k}$$

Auf diese Weise kann man bei gegebenem F und festgelegten Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ von W die Elemente

a_{kj} für $j \in \underline{n}$ und $k \in \underline{m}$

berechnen, die zusammen eine “Matrix” bilden :

Definition 19.4.4 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine **$m \times n$ - Matrix** mit **Einträgen** aus einer Menge K ist eine Familie

$$A \quad = \quad (a_{kj})_{(k,j)\in \underline{m}\times\underline{n}} \quad \text{mit} \quad a_{kj} \in K \quad ,$$

also eine Abbildung $A \in \mathcal{F}(\underline{m} \times \underline{n}, K)$, $A(k,j) := a_{kj}$. Man schreibt sich eine Matrix $A = (a_{kj})_{(k,j)\in \underline{m}\times\underline{n}}$ zumeist als “rechteckiges Schema” auf:

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad .$$

Für die Menge aller $m \times n$ - Matrizen mit Einträgen aus K schreiben wir

$$M(m \times n, K) \quad ,$$

und für $A = (a_{kj}) \in M(m \times n, K)$ nennen wir die

$a_k \quad := \quad (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ für $k \in \underline{m}$ die **Zeilenvektoren** von A ,

und die

$$a^j \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ für $j \in \underline{n}$ die **Spaltenvektoren** von A .

Ist $m = n$, so heißt die Matrix A **quadratisch** .

Nach unserer Definition ist $M(m \times n, K) = \mathcal{F}(\underline{m} \times \underline{n}, K)$. Damit ist auch definiert, wann zwei Matrizen

$A = (a_{kj})$, $B = (b_{kj})$ gleich sind:

Es gilt $(a_{kj}) = (b_{kj}) \iff \forall\, (k,j) \in \underline{m} \times \underline{n} \,:\, a_{kj} = b_{kj}$.

Bemerkung 19.4.5 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann ist

$$M(m \times n, K) \quad = \quad \mathcal{F}(\underline{m} \times \underline{n}, K)$$

nach Beispiel 19.1.6 ein $K-$Vektorraum, wenn man

$$(a_{kj}) + (b_{kj}) \quad := \quad (a_{kj} + b_{kj}) \quad ,$$

$$\lambda(a_{kj}) \quad := \quad (\lambda a_{kj})$$

für $(a_{kj}), (b_{kj}) \in M(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ setzt. Man sieht leicht, dass die Matrizen

$$E_{kj} \quad := \quad \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} \quad \longleftarrow k - \text{te Zeile}$$

$$\uparrow$$
$$j-\text{te Spalte}$$

für $(k,j) \in \underline{m} \times \underline{n}$ eine Basis von $M(m \times n, K)$ bilden, also ist

$$\dim_K M(m \times n, K) \quad = \quad m \cdot n \quad .$$

<u>Definition und Satz 19.4.6 :</u> Seien V und W $K-$Vektorräume,
$\mathfrak{A} := (v_1, \ldots, v_n)$ sei Basis von V und
$\mathfrak{B} := (w_1, \ldots, w_m)$ sei Basis von W, mit $n, m \in \mathbb{N}$.
Sei

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} : \operatorname{Hom}_K(V,W) \longrightarrow M(m \times n, K) \quad ,$$

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \quad := \quad (a_{kj}) \quad , \quad \text{wobei} \quad a_{kj} \quad \text{durch}$$

$$F(v_j) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, w_k \quad \text{für} \quad j \in \underline{n}$$

definiert ist, dann ist $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ ein $K-$Vektorraum-Isomorphismus.
<u>Beweis :</u> (1) Nach (19.4.2) ist $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ eine Abbildung.
(2) Seien $F, G \in \operatorname{Hom}_K(V,W)$ und $\lambda \in K$, dann gilt für $j \in \underline{n}$:

$$(F+G)(v_j) \;=\; F(v_j) + G(v_j) \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k + \sum_{k=1}^{m} b_{kj} w_k \quad ,$$

wenn $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(G) = (b_{kj})$ ist, also

$$(F+G)(v_j) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} (a_{kj} + b_{kj}) w_k \quad ,$$

nach Formel (19.4.3) also

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F+G) \;=\; (a_{kj} + b_{kj}) \overset{19.4.5}{=} (a_{kj}) + (b_{kj}) \;=\; M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) + M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(G) \,,$$

ähnlich:

$$(\lambda F)(v_j) \;=\; \lambda F(v_j) \;=\; \lambda \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} (\lambda a_{kj}) w_k \quad ,$$

also nach Formel (19.4.3) :

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(\lambda F) \;=\; (\lambda\, a_{kj}) \overset{19.4.5}{=} \lambda\, (a_{kj}) \;=\; \lambda\, M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \quad .$$

$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ ist also $K-$linear. (3) $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ ist injektiv, denn sei $F \in \operatorname{Ker} M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$, also $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) = 0$ das Nullelement von $M(m \times n, K)$ also

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{die Nullmatrix} \,,$$

dann gilt nach Formel (19.4.3) :

$$\forall\, j \in \underline{n} \;:\; F(v_j) \;=\; \sum_{k=1}^{m} 0\, w_k \;=\; 0 \in W \quad ,$$

also ist F die Nullabbildung , $F \;=\; \mathcal{O} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Nach Satz 19.3.4 ist $M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ injektiv.

(4) $M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ ist surjektiv, denn sei $(a_{kj}) \in M(m \times n, K)$, dann ist durch

$$F \;:\; V \;\longrightarrow\; W \quad , \quad F(v_j) \;:=\; \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, w_k$$

nach Satz 19.4.1 genau eine lineare Abbildung $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ definiert. Für dieses F gilt dann nach (19.4.3) wieder

$$M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(F) \quad = \quad (a_{kj}) \quad .$$

Insgesamt : $M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus. □

Bemerkung 19.4.7 : In Satz 19.3.9 haben wir gesehen: Sind U, V, W $K-$ Vektorräume, und

$G \;:\; U \;\longrightarrow\; V \quad , \quad F \;:\; V \;\longrightarrow\; W \quad K-$linear ,

dann ist auch $F \circ G \;:\; U \;\longrightarrow\; W \quad K-$linear .

Sind nun U, V, W endlichdimensional, mit Basen

$\mathfrak{A} \;=\; (u_1, \ldots, u_r)$ von U ,

$\mathfrak{B} \;=\; (v_1, \ldots, v_n)$ von V ,

$\mathfrak{C} \;=\; (w_1, \ldots, w_m)$ von W ,

dann hat man Matrizen

$$M^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{C}}(F) = (a_{kj}) \in M(m \times n, K) \quad , \quad M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}(G) = (b_{jl}) \in M(n \times r, K) \quad ,$$

die gemäß Formel (19.4.3) definiert sind durch

$$F(v_j) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, w_k \quad \text{für} \quad j \in \underline{n} \quad ,$$

$$G(u_l) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} b_{jl}\, v_j \quad \text{für} \quad l \in \underline{r} \quad .$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für $l \in \underline{r}$:

$$(F \circ G)(u_l) \quad = \quad F(G(u_l)) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} b_{jl} F(v_j)$$

$$= \quad \sum_{j=1}^{n} b_{jl} \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \right) w_k \quad ,$$

also gilt für die − nach 19.4.1 eindeutig bestimmte − Matrix

$$(c_{kl}) \quad = \quad M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{C}}(F \circ G) \in M(m \times r, K) \quad \text{mit}$$

$$(F \circ G)(u_l) = \sum_{k=1}^{m} c_{kl} w_k :$$

$$c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \quad \text{für} \quad k \in \underline{m} \quad , \quad l \in \underline{r} \quad .$$

Definiert man nun das **Produkt der Matrizen**

$$A = (a_{kj}) \in M(m \times n, K) \quad , \quad B = (b_{jl}) \in M(n \times r, K) \quad \text{als}$$

$$A \cdot B := (c_{kl}) \quad \text{mit} \quad c_{kl} := \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \quad ,$$

so erhält man die Formel

$$\boxed{(19.4.8) \qquad M_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{A}}(F \circ G) = M_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(F) \cdot M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(G) \quad ,}$$

d.h. bezüglich festgelegter Basen ist die Matrix der Hintereinanderausführung $F \circ G$ gleich dem Produkt der Matrizen von F und von G .

Definition und Satz 19.4.9 : Sei K ein Körper, $r, n, m \in \mathbb{N}$,

$$A = (a_{kj}) \in M(m \times n, K) \quad , \quad B = (b_{jl}) \in M(n \times r, K) \quad ,$$

dann definieren wir das Produkt der Matrizen A und B als

$$A \cdot B := (c_{kl}) \in M(m \times r, K) \quad \text{mit}$$

$$c_{kl} := \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{jl} \quad \text{für} \quad k \in \underline{m}\, , \, l \in \underline{r} \quad .$$

Dann gilt: Sind A und B die Matrizen linearer Abbildungen

$$F : V \longrightarrow W \quad , \quad G : U \longrightarrow V$$

von $K-$Vektorräumen U, V, W bezüglich fest gewählter Basen

$\mathfrak{A}$ von U , $\dim U = r$,
$\mathfrak{B}$ von V , $\dim V = n$,
$\mathfrak{C}$ von W , $\dim W = m$, also

$A = M_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(F)$, $B = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(G)$, dann gilt

$$C = M_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{A}}(F \circ G) = M_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}(F) \cdot M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(G) = A \cdot B \quad .$$

Beweis : Das haben wir in 19.4.7 bewiesen ! □

(19.4.10) Bemerkungen : 1) Man kann also nicht beliebige Matrizen multiplizieren. $A \cdot B$ ist nur definiert, wenn

$A \in M(m \times \underline{\underline{n}}, K)$, $B \in M(\underline{\underline{n}} \times r, K)$

ist, d.h. wenn die Spaltenzahl der ersten gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

2) Man merkt sich die Definition des Matrizenprodukts

$$A \cdot B \quad = \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jl} \right)_{(k,l) \in \underline{m} \times \underline{r}} \quad = \quad (c_{kl})$$

am besten so: Um c_{kl} auszurechnen, bildet man das "Skalarprodukt" des $k-$ten Zeilenvektors von A mit dem $l-$ten Spaltenvektor von B.
3) Bei 1) haben wir schon gesehen, dass $B \cdot A$ möglicherweise gar nicht definiert ist, wenn $A \cdot B$ definiert ist. Aber selbst dann, wenn

$A, B \in M(n \times n, K)$

sind, ist i.A. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Ein Gegenbeispiel findet man in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B \quad := \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} :$$

$$A \cdot B \quad = \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B \cdot A \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad .$$

Es gilt aber das Assoziativgesetz:

Satz 19.4.11 : Seien $m, n, r, t \in \mathbb{N}$, K ein Körper und

$$A \in M(m \times n, K) \quad , \quad B \in M(n \times r, K) \quad , \quad C \in M(r \times t, K) \quad ,$$

dann gilt $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
Beweis : Sei $A = (a_{kj})$, $B = (b_{jl})$, $C = (c_{ls})$ mit $k \in \underline{m}, j \in \underline{n}, l \in \underline{r}, s \in \underline{t}$, dann gilt

$$A \cdot (B \cdot C) \quad = \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \left(\sum_{l=1}^{r} b_{jl} \, c_{ls} \right) \right)_{(k,s) \in \underline{m} \times \underline{t}}$$

$$= \quad \left(\sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \, b_{jl} \right) \cdot c_{ls} \right)_{(k,s) \in \underline{m} \times \underline{t}} \quad = \quad (A \cdot B) \cdot C \quad . \qquad \square$$

Natürlich folgt Satz 19.4.11 auch aus der Assoziativität der Hintereinanderausführung von Funktionen, mit Satz 19.4.6 und Formel (19.4.8) .

Bemerkung 19.4.12 : Wir sehen uns die Menge der quadratischen Matrizen genauer an: Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und seien

$$A, B \in M(n \times n, K) \quad ,$$

dann sind $A \cdot B$ und $B \cdot A \in M(n \times n, K)$ definiert. Das Kommutativgesetz gilt für $\cdot$ nicht, aber das Assoziativgesetz. Man hat ein neutrales Element: Für die durch

$$E_n \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad (\delta_{kj}) \quad \text{mit} \quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases}$$

definierte **Einsmatrix** in $M(n \times n, K)$ gilt

$$\forall\, A \in M(n \times n, K) \ : \ A \cdot E_n = E_n \cdot A = A \quad .$$

$M(n\times n, K)$ ist mit $\cdot$ keine abelsche Gruppe, schon deshalb, weil das Kommutativgesetz nicht gilt, aber auch, weil nicht jede Matrix ein Inverses besitzt, nicht einmal jede Matrix $A \neq 0$: Sei $n \geq 2$ und

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \neq \quad 0 \quad ,$$

dann gilt, ganz gleich, welche Matrix B man nimmt,

$$A \cdot B \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \quad \neq \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & & & & \\ \hline & & 1 & 0 & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \quad = \quad E_n \quad .$$

Beschränkt man sich aber auf Matrizen, die ein Inverses besitzen, so sind alle Axiome aus Definition 2.1.1 erfüllt, bis auf das Kommutativgesetz.

Definition 19.4.13 : Sei G eine nichtleere Menge und τ eine Verknüpfung auf G , d.h. eine Abbildung

$$\tau \ : \ G \times G \ \longrightarrow \ G \quad , \quad (a, b) \longmapsto a\tau b \quad ,$$

so dass gilt
(G1) $\quad \forall\, a, b, c \in G \ : \ a\tau(b\tau c) \quad = \quad (a\tau b)\tau c \quad ,$
(G2) $\quad \forall\, a, b \in G\, \exists\, x, y \in G \ : \ (a\tau x \ = \ b \wedge y\tau a \ = \ b) \quad ,$
so heißt (G, τ) eine **Gruppe**.

Bemerkung 19.4.14 : Die Folgerungen aus den Gruppenaxiomen, wie wir sie in Folgerung 2.1.2 bewiesen haben, bleiben im Wesentlichen richtig; es macht aber mehr Mühe, sie zu beweisen. Sie erhalten das als Übungsaufgabe.

Satz und Definition 19.4.15 : Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und

$$\mathrm{GL}(n, K) \quad := \quad \{\, A \in M(n \times n, K) \ | \ \exists\, A^{-1} \in M(n \times n, K) \ : \ A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n \,\} \quad ,$$

dann ist $(\mathrm{GL}(n, K), \cdot)$ eine Gruppe. Sie heißt die **allgemeine lineare Gruppe** vom Grad n über K .

Beweis : (0) Wir müssen zunächst zeigen, dass die Matrizenmultiplikation $\cdot$ eine Abbildung

$$\cdot \ : \ \mathrm{GL}(n, K) \times \mathrm{GL}(n, K) \ \longrightarrow \ \mathrm{GL}(n, K)$$

definiert, dass also für $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ auch

$$A \cdot B \in \mathrm{GL}(n, K) \qquad \text{ist:}$$

Beweis: Seien $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$, dann hat man $A^{-1}, B^{-1} \in M(n \times n, K)$ mit

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E_n \quad ,$$

also gilt mit $C := B^{-1} \cdot A^{-1}$:

$$(A \cdot B) \cdot C \overset{19.4.11}{=} A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}))$$
$$\overset{19.4.11}{=} A \cdot ((B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}) = A \cdot (E_n \cdot A^{-1}) = A \cdot A^{-1} = E_n \quad ,$$
$$C \cdot (A \cdot B) \overset{19.4.11}{=} (C \cdot A) \cdot B = ((B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot A) \cdot B$$
$$\overset{19.4.11}{=} (B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A)) \cdot B = (B^{-1} \cdot E_n) \cdot B = B^{-1} \cdot B = E_n \quad ,$$

also existiert

$$(A \cdot B)^{-1} = C = B^{-1} \cdot A^{-1} , \quad \text{also} \quad A \cdot B \in \mathrm{GL}(n, K) .$$

(G1) Das Assoziativgesetz gilt in $\mathrm{GL}(n, K)$, da es nach 19.4.11 sogar in $M(n \times n, K)$ gilt.

(G3) Seien $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$, dann haben wir

$A^{-1}, B^{-1} \in M(n \times n, K)$ mit

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E_n ,$$

und sogar A^{-1}, $B^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$, denn zu A^{-1}, B^{-1} hat man

$$(A^{-1})^{-1} = A , (B^{-1})^{-1} = B \quad .$$

Nach (0) sind dann auch

$$X := A^{-1} \cdot B \text{ und } Y := B \cdot A^{-1} \text{ in } \mathrm{GL}(n, K)$$

und es gilt

$$A \cdot X = A \cdot (A^{-1} \cdot B) \overset{(G1)}{=} (A \cdot A^{-1}) \cdot B = E_n \cdot B = B ,$$
$$Y \cdot A = (B \cdot A^{-1}) \cdot A \overset{(G1)}{=} B \cdot (A^{-1} \cdot A) = B \cdot E_n = B \quad . \qquad \square$$

Bemerkung 19.4.16 : Seien V und W $K-$Vektorräume,

$$F : V \longrightarrow W \quad K\text{-linear},$$
$$\dim_k V = n \quad , \quad \dim_k W = m \quad ,$$

dann hatten wir in 19.4.2 die Matrix von F bezüglich gegebener Basen

$$\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_n) \text{ von } V \quad , \quad \mathfrak{B} = (b_1, \ldots, b_m) \text{ von } W$$

definiert, also $A := M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \in M(m \times n, K)$, und zwar durch Formel (19.4.3) . Wählt man nun andere Basen von V bzw. W, so haben sie die gleiche Länge. Seien also auch

$\mathfrak{A}' = (a_1', \ldots, a_n')$ eine Basis von V und

$\mathfrak{B}' = (b_1', \ldots, b_m')$ eine Basis von W,

so hat man $A' := M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(F) \in M(m \times n, K)$. Wie kann man A' aus A berechnen ? Das geht ganz einfach (und ohne dass man viele Indizes hinschreiben muss) so: Sicher ist

$$F \quad = \quad \mathrm{id}_W \circ F \circ \mathrm{id}_V \quad ,$$

aber wir nehmen jetzt folgende Basen :

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\mathrm{id}_V} & V & \xrightarrow{F} & W & \xrightarrow{\mathrm{id}_W} & W \\ | & & | & & | & & | \\ \text{mit Basis } \mathfrak{A}' & & \text{mit Basis } \mathfrak{A} & & \text{mit Basis } \mathfrak{B} & & \text{mit Basis } \mathfrak{B}' \end{array} \quad ,$$

dann gilt nach Formel (19.4.8) :

$$(*) \quad M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(F) \quad = \quad M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(\mathrm{id}_W \circ F \circ \mathrm{id}_V) \quad = \quad M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(\mathrm{id}_W \circ (F \circ \mathrm{id}_V))$$
$$= \quad M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_W) \cdot M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}'}(F \circ \mathrm{id}_V) \quad = \quad M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_W) \cdot M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \cdot M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\mathrm{id}_V) \quad .$$

Wir setzen $S := M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_W)$, dann ist $S \in M(m \times m, K)$, und wegen

$$M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\,\mathrm{id}_W) \cdot M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\,\mathrm{id}_W) \overset{19.4.8}{=} M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'}(\,\mathrm{id}_W) \overset{19.4.3}{=} E_m \quad ,$$

$$M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\,\mathrm{id}_W) \cdot M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\,\mathrm{id}_W) \overset{19.4.8}{=} M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\,\mathrm{id}_W) \overset{19.4.3}{=} E_m$$

ist sogar $S \in \mathrm{GL}(m, K)$, $S^{-1} = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}'}(\,\mathrm{id}_W)$. Ebenso gilt für $T := M_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\,\mathrm{id}_V)$: $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $T^{-1} = M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}'}(\,\mathrm{id}_V)$. Setzen wir das in $(*)$ ein, so erhalten wir

$$(19.4.17) \qquad A' = S \cdot A \cdot T^{-1} \qquad \text{für}$$

$$A = M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}(F) \quad , \quad A' = M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{A}'}(F)$$

mit den **Transformationsmatrizen**

$$T := T_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}} := M_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}(\,\mathrm{id}_V) \quad , \quad S := T_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} := M_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\,\mathrm{id}_W)$$

Dabei haben wir (19.4.3) benutzt, um $M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(\,\mathrm{id}_W) = E_m$ zu zeigen: Es gilt

$$\forall\, r \in \underline{m} : \quad \mathrm{id}_W(b_r) = b_r = \sum_{l=1}^{r} \delta_{lr} b_l \quad \text{und} \quad (\delta_{lr}) = E_m \quad .$$

Man braucht die Formel (19.4.3) auch, wenn man S und T konkret ausrechnen will: $T = (t_{kj}) \in M(n \times n, K)$ ist nach Formel (19.4.3) definiert durch

$$\forall\, j \in \underline{n} : \quad \mathrm{id}_V(a_j) = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\, a'_k \quad , \qquad \text{also}$$

$$\forall\, j \in \underline{n} : \quad a_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\, a'_k \quad ,$$

d.h. man erhält die Einträge t_{kj} der Transformationsmatrix $T = T_{\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{A}}$, indem man die Basisvektoren von $\mathfrak{A}$ als Linearkombinationen der Basisvektoren von $\mathfrak{A}'$ darstellt. Entsprechend ist

$$T_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} = S = (s_{lr}) \in \mathrm{GL}(m, K) \quad \text{gegeben durch}$$

$$\forall\, r \in \underline{m} : \quad b_r = \sum_{l=1}^{r} s_{lr}\, b'_l \quad . \qquad \square$$

Wir brauchen die Transformationsformel (19.4.17) schon im nächsten Abschnitt. Den wiederum brauchen wir zur Lösung linearer Gleichungssysteme:

19.5 Rang einer Matrix

Definition 19.5.1 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper,

$$A = (a_{kj})_{(k,j) \in \underline{m} \times \underline{n}} \in M(m \times n, K) \quad ,$$

dann definieren wir die **transponierte Matrix** ${}^tA \in M(n \times m, K)$ als

$${}^tA := (b_{jk})_{(j,k) \in \underline{n} \times \underline{m}} \quad \text{mit} \quad b_{jk} := a_{kj} \quad .$$

Rechenregeln 19.5.2 : Seien $n, m, r \in \mathbb{N}$, K ein Körper,

$$A, C \in M(m \times n, K) \quad , \quad B \in M(n \times r, K) \quad , \quad \lambda \in K \quad ,$$

dann gilt
(1) $\quad {}^t(A + C) = {}^tA + {}^tC$, $\quad$ (2) $\quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad ,$
(3) $\quad {}^t({}^tA) = A \quad ,$ $\quad$ (4) $\quad {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA \quad .$
(5) $\quad$ Ist $m = n$ und $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, so ist auch
${}^tA \in \mathrm{GL}(n, K)$, und es gilt $\quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \quad .$

Beweis : (1) ,(2) und (3) sind leicht einzusehen.
(4) Es ist

$${}^tA = (\alpha_{jk})_{(j,k)\in \underline{n}\times\underline{m}} \quad \text{mit} \quad \alpha_{jk} := a_{kj} \,,$$
$${}^tB = (\beta_{lj})_{(l,j)\in \underline{r}\times\underline{n}} \quad \text{mit} \quad \beta_{lj} := b_{jl}$$

für $k \in \underline{m}$, $j \in \underline{n}$, $l \in \underline{r}$, also ist ${}^tB \cdot {}^tA \in M(r \times m, K)$ definiert,

$${}^tB \cdot {}^tA = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{lj}\alpha_{jk}\right)_{(l,k)\in\underline{r}\times\underline{m}} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jl}a_{kj}\right)_{(l,k)\in\underline{r}\times\underline{m}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jl}\right)_{(l,k)\in\underline{r}\times\underline{m}} = {}^t(A \cdot B) \quad .$$

(5) Aus $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ folgt nach (4) :

$${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^tE_n = E_n \quad ,$$

also ${}^tA \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \quad .$ $\square$

Definition 19.5.3 : Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper,
$A = (a_{kj}) \in M(m \times n, K) \quad ,$
dann hatten wir in 19.4.4 die
$a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ für $k \in \underline{m}$ die Zeilenvektoren,
und die

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{für} \quad j \in \underline{n} \quad \text{die Spaltenvektoren von } A$$

genannt. Besser ist es übrigens, alle $n-$ und $m-$tupel als Spalten zu schreiben, dann sind also
${}^ta_1, \ldots, {}^ta_m \in K^n$ die Zeilenvektoren von A .
Wir nennen nun
$\mathrm{ZRg}(A) := \dim \mathrm{span}({}^ta_1, \ldots, {}^ta_m)$ den **Zeilenrang** von A und
$\mathrm{SRg}(A) := \dim \mathrm{span}(a^1, \ldots, a^n)$ den **Spaltenrang** von A .

Bemerkung 19.5.4 : Es ist
$\mathrm{span}({}^ta_1, \ldots, {}^ta_m) \subset K^n \quad ,$
$\mathrm{span}(a^1, \ldots, a^n) \subset K^m \quad ,$
wir haben also Untervektorräume verschiedener Vektorräume. Wir werden aber zeigen, dass sie gleiche Dimension haben, dass also
$\mathrm{ZRg}(A) = \mathrm{SRg}(A)$ gilt.
Dazu zunächst die

Schreibweise (19.5.5) : Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in M(m \times n, K)$. Sei

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad f_A(x) := A \cdot x \quad ,$$

wobei unter $A \cdot x$ das Produkt der $m \times n-$Matrix A mit der $n \times 1-$Matrix $x \in K^n = M(n \times 1, K)$ verstanden wird, dann ist f_A eine lineare Abbildung.

Hilfssatz 19.5.6 : Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, U ein Untervektorraum von K^n und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dann gilt

$$\dim f_T(U) = \dim U \quad .$$

Beweis : Sei $F : U \longrightarrow f_T(U) \quad , \quad F(x) := f_T(x) \quad ,$
dann ist F linear, da f_T linear ist, und surjektiv, also

$$F(U) = f_T(U) \quad .$$

F ist auch injektiv, denn für $x, y \in U$ gilt

$$F(x) = F(y) \implies f_T(x) = f_T(y) \implies T \cdot x = T \cdot y \quad ,$$

und da $T^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert, folgt

$$T^{-1} \cdot (T \cdot x) = T^{-1} \cdot (T \cdot y) , \quad \text{also} \quad (T^{-1} \cdot T) \cdot x = (T^{-1} \cdot T) \cdot y \quad ,$$

also $x = y$. Nach Satz 19.4.3 ist Ker $F = \{0\}$, und nach der Dimensionsformel (19.3.5) folgt

$$\dim U = \dim \text{Ker } F + \dim F(U) = 0 + \dim f_T(U) \quad . \qquad \square$$

Hilfssatz 19.5.7 : Sei $A \in M(m \times n, K)$, $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dann gilt
(1) $\mathrm{SRg}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{SRg}(A)$,
(2) $\mathrm{ZRg}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{ZRg}(A)$.

Beweis : (1) a) Seien $a^1, \dots, a^n$ die Spaltenvektoren von A und $e^1, \dots, e^n$ die kanonischen Basisvektoren von K^n , als Spalten geschrieben,dann gilt

$$a^j = A \cdot e^j \quad \text{für} \quad j \in \underline{n} \quad ,$$

wie man mit scharfem Blick für die Matrizenmultiplikation sieht, also

$$\mathrm{SRg}(A) = \dim \mathrm{span}(f_A(e^1), \dots, f_A(e^n)) = \dim f_A(K^n) \quad .$$

Nach Hilfssatz 19.5.6 ist

$$\dim f_T(K^n) = \dim K^n = n \quad ,$$

also wegen $f_T(K^n) \subset K^n$ nach Satz 19.2.24(2) :

$$f_T(K^n) = K^n \quad , \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{SRg}(A) &= \dim f_A(f_T(K^n)) = \dim(f_A \circ f_T)(K^n) \\ &= \dim f_{A \cdot T}(K^n) = \mathrm{SRg}(A \cdot T) \quad . \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\mathrm{SRg}(S \cdot A) = \dim f_{S \cdot A}(K^n) = \dim f_S(f_A(K^n)) \quad ,$$

und Hilfssatz 19.5.6, angewendet auf den Untervektorraum $f_A(K^n)$ von K^m, ergibt

$$\dim f_S(f_A(K^n)) \quad = \quad \dim f_A(K^n) \quad , \qquad \text{also}$$

$$\mathrm{SRg}(S \cdot A) \quad = \quad \dim f_A(K^n) \quad = \quad \mathrm{SRg}(A) \quad .$$

Insgesamt folgt aus b), angewendet auf $A \cdot T$ statt A, und aus a) :

$$\mathrm{SRg}(S \cdot A \cdot T) \quad = \quad \mathrm{SRg}(A \cdot T) \quad = \quad \mathrm{SRg}(A) \quad .$$

(2) Es ist

$$\mathrm{ZRg}(A) \quad = \quad \mathrm{SRg}({}^tA) \quad , \quad \text{und}$$

$${}^t(S \cdot A \cdot T) \quad = \quad {}^tT \cdot {}^t A \cdot {}^t S \quad \text{nach 19.5.2 (4)} \quad ,$$

und nach 19.5.2 (5) sind auch ${}^tT$ und ${}^tS$ invertierbar, also gilt nach (1) :

$$\mathrm{ZRg}(S \cdot A \cdot T) \quad = \quad \mathrm{SRg}({}^t(S \cdot A \cdot T)) \quad = \quad \mathrm{SRg}({}^tT \cdot {}^t A \cdot {}^t S)$$

$$\overset{(1)}{=} \quad \mathrm{SRg}({}^tA) \quad = \quad \mathrm{ZRg}(A) \quad . \qquad \square$$

<u>**Satz und Definition 19.5.8 :**</u> Seien $m, n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt

$$\mathrm{SRg}(A) \quad = \quad \mathrm{ZRg}(A) \quad ,$$

d. h. Zeilenrang und Spaltenrang von A sind gleich. Wir nennen diese Zahl den <u>**Rang**</u> von A , also

$$\mathrm{Rg}\, A \quad := \quad \mathrm{SRg}(A) \quad = \quad \mathrm{ZRg}(A) \quad .$$

<u>**Beweis :**</u> Sei

$\mathfrak{K} \ := \ (e^1, \ldots, e^n)$ die kanonische Basis von K^n und

$\mathfrak{L} \ := \ (f^1, \ldots, f^m)$ die kanonische Basis von K^m . Dann gilt

$$\forall\, j \in \underline{n} : \ f_A(e^j) \quad = \quad A \cdot e^j \quad = \quad a^j \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f^k \quad , \qquad \text{also}$$

$$M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(f_A) \quad = \quad A \quad .$$

Nun haben wir in (19.3.5) (bei der Dimensionsformel für lineare Abbildungen) bewiesen: Es gibt eine Basis

$\mathfrak{B} \ := \ (w_1, \ldots, w_r)$ von $f_A(K^n)$ und eine Basis

$\mathfrak{A} \ := \ (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ von K^n (also $r + k = n$), so dass

$f_A(u_j) \ = \ w_j$ für $j \in \underline{r}$ und $f_A(v_l) \ = \ 0$ für $l \in \underline{k}$

ist. Ergänzen wir $\mathfrak{B}$ zu einer Basis

$\mathfrak{C} \ := \ (w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m)$ von K^m , so wird nach (19.4.3):

$$B \ := \ M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{C}}(f_A) \ =$$

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) & r \text{ Zeilen} \\ r \text{ Spalten} & \end{array} = \begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \in M(m\times n, K) \quad .$$

Für die Matrix B gilt nun offensichtlich $\mathrm{SRg}(B) = \mathrm{ZRg}(B)$. Andererseits gilt nach der Formel für die Koordinatentransformation aus (2.6) :

$$M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{L}}(f_A) \quad = \quad M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{id}_{K^m}) \cdot M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{C}}(f_A) \cdot M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_{K^n}) \quad ,$$

also mit $T := M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_{K^n}) \in \mathrm{GL}(n, K)$, $S := M^{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{id}_{K^m}) \in \mathrm{GL}(m, K)$:

$$A \quad = \quad S \cdot B \cdot T \quad ,$$

und nach dem Hilfssatz 2.6.6 :

$$\mathrm{SRg}(A) \quad \overset{\downarrow}{=} \quad \mathrm{SRg}(B) \quad = \quad \mathrm{ZRg}(B) \quad \overset{\downarrow}{=} \quad \mathrm{ZRg}(A) \quad . \qquad \square$$

Wie kann man nun den Rang praktisch berechnen ? Es ist dazu nicht nötig, Basen von K^n bzw. K^m zu finden, so dass die Matrix von f_A bezüglich dieser Basen die Form

$$\begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \mathrm{Rg} A$$

hat, es geht etwas einfacher. Man überlegt sich, dass gewisse Umformungen den Rang von A nicht ändern :

Definition 19.5.9 : Sei $A \in M(m \times n, K)$, mit Zeilenvektoren $a_1, \ldots, a_m \in K^n$ (als Zeilen geschrieben).

Unter einer **elementaren Zeilenumformung** von A versteht man eine Umformung der folgenden Art:

(I) Multiplikation der $k-$ten Zeile mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$: Aus

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad A^I := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_k \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad .$$

(II) Addition der $j-$ten Zeile zur $k-$ten Zeile, $j \neq k$: Aus

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad A^{II} := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad .$$

Durch Hintereinanderausführung mehrerer Umformungen vom Typ (I) oder (II) erhält man noch folgende Umformungen:
(III) Addition des $\lambda-$fachen der $j-$ten Zeile zur $k-$ten Zeile, $k \neq j$, $\lambda \in K$: Aus

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad A^{III} := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad ,$$

und zwar erhält man das folgendermaßen: Für $\lambda = 0$ macht man gar nichts. Für $\lambda \neq 0$ formt man so um :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + \lambda a_j \\ \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I mit } \lambda^{-1}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

(IV) Vertauschen der $k-$ten Zeile mit der $j-$ten Zeile, $k \neq j$: Aus

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{wird} \quad A^{IV} := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad ,$$

und zwar erhält man das folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ -a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k - a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k - (a_k - a_j) \\ \vdots \\ a_k - a_j \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_k - a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad .$$

Entsprechend definiert man **<u>elementare Spaltenumformungen</u>** .

<u>Hilfssatz 19.5.10 :</u> Entsteht B aus A durch elementare Zeilen- bzw. Spaltenumformungen, so gilt

$$\text{Rg} A \quad = \quad \text{Rg} B \quad .$$

<u>Beweis</u> für Zeilenumformungen: Es reicht, den Satz für **eine** el. Umformung **vom Typ I oder II** zu beweisen. Durch Induktion nach der Anzahl solcher Umformungen folgt er dann auch für endlich viele Umformungen vom Typ I - IV :

I) Es ist $A^I \;=\; S_k(\lambda)\cdot A$ mit

$$S_k(\lambda) \quad := \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow k-\text{te Zeile} \quad , \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ k-\text{te Spalte,} & \end{array}$$

$S_k(\lambda)\in M(m\times m,K)$, sogar $S_k(\lambda)\in \mathrm{GL}(m,K)$ wegen

$$S_k(\lambda)\cdot S_k(\lambda^{-1}) \;=\; S_k(\lambda^{-1})\cdot S_k(\lambda) \;=\; E_m \quad .$$

Nach Hilfssatz 19.5.7 und Satz 19.5.8 folgt

$$\mathrm{Rg}A^I \quad = \quad \mathrm{Rg}A \quad .$$

II) Es ist $A^{II} \;=\; Q_k^j(1)\cdot A$ mit

$$Q_k^j(\lambda) \quad := \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & 1 & & & & & 0 & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow k-\text{te Zeile} \;, \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ j-\text{te Spalte,} & \end{array}$$

für $\lambda\in K$. Es ist

$$Q_k^j(\lambda)\in M(m\times m,K)\,,\ \text{sogar}\ Q_k^j(\lambda)\in \mathrm{GL}(m,K) \quad ,$$

denn es existiert

$$Q_k^j(\lambda)^{-1} \quad = \quad Q_k^j(-\lambda) \quad .$$

Nach Hilfssatz 19.5.7 und Satz 19.5.8 folgt $\mathrm{Rg}A^{II} \;=\; \mathrm{Rg}A$.

Für Spaltenumformungen folgt die Behauptung daraus wegen

$$\mathrm{Rg}A \;=\; \mathrm{SRg}(A) \;=\; \mathrm{ZRg}({}^tA) \;=\; \mathrm{Rg}\,{}^tA \quad . \qquad \square$$

<u>Definition und Satz 19.5.11 :</u> Man sagt, eine Matrix $M\in M(m\times n,K)$ hat **<u>Zeilenstufenform</u>** , wenn es Zahlen $j_1,\dots,j_r\in \underline{n}$ gibt mit

$$1\le j_1<j_2<\ldots<j_r\le n \quad ,$$

so dass B die Form

$$\begin{pmatrix} \_ & & & & & & & & & \\ & | & b_{1j_1} & & & & & & & \\ & |\_ & \_ & \_ & & & & & & \\ & & & & | & b_{2j_2} & & * & & \\ & & & & |\_ & \_ & \_ & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & & & & | & b_{rj_r} \\ & & & & & & & & |\_ & \_ \quad \_ \\ & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

hat, mit

$$b_{1j_1}\,,\,\ldots\,,\,b_{rj_r} \neq 0 \quad ,$$

Nullen unterhalb der “Stufenlinie” und irgendwelchen Einträgen oberhalb der b_{kj_k}. Es gilt dann

$$\mathrm{Rg}B \quad = \quad \mathrm{ZRg}(B) \quad = \quad r \quad .$$

<u>Beweis :</u> $(b_1, \ldots, b_r)$ ist eine Basis von

$$\mathrm{span}(b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_m) \quad ,$$

denn $b_{r+1}, \ldots, b_m = 0 \quad ,$ und aus

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k\, b_k \quad = \quad 0$$

folgt zunächst, wenn man die j_1-te Komponente dieser Summe betrachtet :

$$\beta_1\, b_{1j_1} = 0 \quad , \quad \text{also wegen} \quad b_{1j_1} \neq 0 \,:\; \beta_1 = 0 \quad .$$

Mit der Gleichung $\sum\limits_{k=2}^{r} \beta_k\, b_k = 0$ kann man so fortfahren und erhält

$$0 = \beta_2 = \ldots = \beta_r \quad .$$

Also ist $\mathrm{ZRg}(B) = r$. □

Bei einer Matrix in Zeilenstufenform kann man also den Rang leicht ablesen, es ist die “Anzahl der Stufen” dieser Matrix. Es gilt nun

<u>Satz 19.5.12 :</u> Jede Matrix $A \in M(m \times n, K)$ kann man durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

<u>Beweis :</u> Wir machen hier keinen exakten Induktionsbeweis, sondern geben die Schritte an, die man praktisch macht und auch so programmieren kann: Ist $A = 0$, so sind wir fertig: A hat Zeilenstufenform, mit

0 Stufen.

(∗) Sei nun $A \neq 0$, so gibt es mindestens ein $a_{kj} \neq 0$. Die j_1-te Spalte sei diejenige mit dem kleinsten Index, in der nicht nur Nullen stehen, also

$$a^1 = \ldots = a^{j_1-1} = 0 \quad , \quad \text{und}$$

$$\exists\, k \in \underline{m} \,:\; a_{kj_1} \neq 0 \quad .$$

Wenn nicht schon $a_{1j_1} \neq 0$ ist, vertauschen wir die 1. mit der $k-$ten Zeile (das ist eine Umformung vom Typ IV) und erhalten eine Matrix A' mit

$$a'_{1j_1} \neq 0 \quad .$$

In der Matrix A' addieren wir nun zur $k-$ten Zeile, $k = 2, \ldots, m$, jeweils das $-\dfrac{a'_{kj_1}}{a'_{1j_1}}$–fache der 1.Zeile, das sind $m-1$ Umformungen vom Typ III, und erhalten so eine Matrix A'' mit

$$a''_{kj_1} \quad = \quad a'_{kj_1} - \frac{a'_{kj_1}}{a'_{1j_1}} \cdot a'_{1j_1} \quad = \quad 0 \quad .$$

A'' hat also die Form

$$A'' \quad = \quad \begin{pmatrix} - & & & & \\ & | & a''_{1j_1} & & * \\ & |\_ & - & & \\ & & 0 & | & \\ & & \vdots & | & B_1 \\ & & 0 & | & \end{pmatrix} \quad .$$

Ist nun $B_1 = 0$ oder $j_1 = n$, so sind wir fertig, A'' hat Zeilenstufenform. Anderenfalls ist B_1 eine Matrix mit $m-1$ Zeilen, und wir fangen wieder bei $(*)$ an, mit B_1 statt A . Nach r solchen Schritten, $r \leq m$, erhält man eine Matrix der Form

$$B \quad = \quad \begin{pmatrix} - & & & & & & & & & & \\ & | & b_{1j_1} & & & & & & & & \\ & |\_ & - & - & & & & & & & \\ & & & & | & b_{2j_2} & & & * & & \\ & & & & |\_ & - & - & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & & & & & | & b_{rj_r} & \\ & & & & & & & & |\_ & - & - \\ & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \quad .$$

Bemerkung 19.5.13 : Unser Problem, den Rang einer Matrix zu bestimmen, ist damit gelöst: Man formt die Matrix durch elementare Zeilenumformungen so um, dass man auf eine Matrix kommt, die denselben Rang hat. Man kann zur Vereinfachung der Matrix auch elementare Spaltenumformungen verwenden; diese ändern den Rang auch nicht.

19.6 Lineare Gleichungssysteme

Definition 19.6.1 : Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A = (a_{kj}) \in M(m \times n, K) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$$

seien gegeben. Dann heißen die m Gleichungen

$$(1) \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11} & x_1 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & x_1 & + & \ldots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad ,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ gesucht sind, ein **lineares Gleichungssystem** von m Gleichungen mit n **Unbekannten**. Fasst man den gesuchten Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

als $n \times 1-$Matrix und b als $m \times 1-$Matrix auf, so kann man statt (1) kürzer schreiben:

(2) $\quad A \cdot x = b \quad .$

Das System (1) bzw. (2) heißt **homogen** , falls $b = 0$ ist, sonst **inhomogen**. Die Menge

$$\text{Lös}(A,b) := \{ \ x \in K^n \mid A \cdot x = b \ \} \subset K^n$$

heißt die **Lösungsmenge** von (1) bzw.(2) . $A \cdot x = b$ heißt **lösbar** , wenn

$$\text{Lös}(A,b) \neq \emptyset \text{ ist.}$$

Bemerkung 19.6.2 : Zu $A \in M(m \times n, K)$ haben wir nach (19.5.5) die lineare Abbildung

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad f_A(x) := A \cdot x \quad .$$

Statt (2) kann man daher auch

(3) $\quad f_A(x) = b$

schreiben. Auf diese Weise können wir unsere Sätze über lineare Abbildungen auf lineare Gleichungssysteme anwenden.

Satz 19.6.3 : Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sei lösbar, und $a \in K^n$ sei eine Lösung. Dann ist die Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A,b) = a + \text{Ker } f_A := \{ \ a + y \mid y \in \text{Ker } f_A \ \} \quad ,$$

wobei $f_A(x) = A \cdot x$ ist. Man erhält also alle Lösungen von $A \cdot x = b$, indem man zu einer festen Lösung a alle Lösungen des "zugehörigen homogenen Systems" $A \cdot y = 0$ addiert.

Beweis : 1) Sei $x \in \text{Lös}(A,b)$, dann folgt wegen $a \in \text{Lös}(A,b)$:

$f_A(x) = b \quad$ und $\quad f_A(a) = b \quad , \quad$ also für $\quad y := x - a$:

$f_A(y) = f_A(x) - f_A(a) = 0 \quad , \quad y \in \text{Ker } f_A$, also

$x = a + y \quad$ mit $y \in \text{Ker } f_A \quad .$

2) Sei $x = a + y$ mit $y \in \text{Ker } f_A$, dann gilt

$f_A(x) = f_A(a) + f_A(y) = b + 0 = b , \quad$ also $\quad x \in \text{Lös}(A,b) \quad .$ □

Bemerkung 19.6.4 : Bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem

$f_A(x) = b \quad , \quad$ also mit $b \neq 0$,

ist $\text{Lös}(A,b)$ kein Untervektorraum von K^n , denn wegen

$f_A(0) = 0 \neq b \quad$ ist $\quad 0 \notin \text{Lös}(A,b) \quad .$

Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem

$f_A(x) = 0$

ist $\text{Lös}(A,0) = \text{Ker } f_A$, also $\text{Lös}(A,0)$ ein Untervektorraum von K^n , also $0 \in \text{Lös}(A,0)$; das System hat also auf jeden Fall die **triviale Lösung** $x = 0$, und es hat nichttriviale Lösungen, also Lösungen $\neq 0$, wenn

$\text{Ker } f_A \neq \{0\}$, also $\dim \text{Ker } f_A > 0$ ist.

Diese Dimension kann man mit der Dimensionsformel (19.3.5) berechnen:

Satz 19.6.5 : Sei $A \in M(m \times n, K)$, dann gilt für den Lösungsraum $\text{Lös}(A, 0)$ von $A \cdot x = 0$:

$$\boxed{\dim \text{Lös}(A, 0) \quad = \quad n - \text{Rg}A \quad .}$$

Beachte: n ist die Anzahl der **Unbekannten** im System $A \cdot x = 0$.

Beweis : Es ist $\text{Lös}(A, 0) = \text{Ker } f_A$ für

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad f_A(x) = A \cdot x \quad ,$$

und nach der Dimensionsformel (19.3.5) gilt für f_A :

$$\dim K^n \quad = \quad \dim \text{Ker } f_A + \dim f_A(K^n) \quad , \quad \text{also}$$

$$n \quad = \quad \dim \text{Lös}(A, 0) + \dim f_A(K^n) \quad .$$

Sei $(e^1, \ldots, e^n)$ die kanonische Basis des K^n , dann ist

$$(f_A(e^1), \ldots, f_A(e^n))$$

ein Erzeugendensystem von $f_A(K^n)$. Nun gilt für $j \in \underline{n}$:

$$f_A(e^j) \quad = \quad A \cdot e^j \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad = \quad a^j \quad ,$$

wobei a^j der $j-$te Spaltenvektor von A ist. Also gilt

$$\dim f_A(K^n) = \dim \text{span}(a^1, \ldots, a^n) = \text{SRg}(A) = \text{Rg}A \quad .$$

Damit wissen wir alles über homogene lineare Gleichungssysteme. Wann ist nun ein inhomogenes System $A \cdot x = b$ lösbar ?

Definition 19.6.6 : Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Dann heißt die Matrix

A die **einfache Matrix** des Systems $A \cdot x = b$

und die $m \times (n+1)-$Matrix, die entsteht, wenn man zu A den Vektor b als zusätzliche Spalte nimmt, also

$$(A, b) \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die **erweiterte Matrix** des Systems $A \cdot x = b$.

Satz 19.6.7 : Für die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$A \cdot x \quad = \quad b \quad \text{mit} \quad A \in M(m \times n, K) \quad , \quad b \in K^m \quad \text{gilt :}$$

$$\boxed{\text{Lös}\,(A, b) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Rg}A \quad = \quad \text{Rg}\,(A, b) \quad ,}$$

wobei (A, b) die erweiterte Matrix des Systems ist.

Beweis : Sei

$$f_A : K^n \longrightarrow K^m \quad , \quad x \longmapsto A \cdot x \quad ,$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Lös}\,(A, b) \neq \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x \in K^n : f_A(x) \quad = \quad b \\ &\Longleftrightarrow \quad b \in f_A(K^n) \quad . \end{aligned}$$

Wie wir beim Beweis von Satz 19.6.5 gesehen haben, ist

$$f_A(K^n) \quad = \quad \text{span}(a^1, \ldots, a^n) \quad ,$$

wobei $a^1, \ldots, a^n$ die Spaltenvektoren von A sind, also gilt

$$\text{Lös}\,(A, b) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad b \in \text{span}(a^1, \ldots, a^n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{span}(a^1, \ldots, a^n, b) \quad = \quad \text{span}(a^1, \ldots, a^n)$$

$$\overset{19.2.24\ (2)}{\Longleftrightarrow} \dim \text{span}(a^1, \ldots, a^n, b) \quad = \quad \dim \text{span}(a^1, \ldots, a^n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Rg}\,(A, b) \quad = \quad \text{Rg} A \quad .$$

Man mache sich bei jedem Schritt klar, warum " $\Longleftrightarrow$ " gilt. □

Es kann durchaus sein, dass $A \cdot x \, = \, b$ mehrere Lösungen hat. Es gilt

Satz 19.6.8 : Für $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$ sind folgende Aussagen gleichbedeutend:

(i) $A \cdot x \, = \, b$ ist eindeutig lösbar.

(ii) $\text{Rg} A \quad = \quad \text{Rg}\,(A, b) \quad = \quad n \quad .$

Beweis : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : $A \cdot x \, = \, b$ sei eindeutig lösbar, dann ist $A \cdot x \, = \, b$ lösbar, und nach Satz 19.6.7 folgt

$$\text{Rg} A \quad = \quad \text{Rg}\,(A, b) \quad .$$

Für die Lösungsmenge von $A \cdot x \, = \, b$ gilt nach Satz 19.6.3 :

$$\text{Lös}\,(A, b) \quad = \quad a + \text{Ker}\ f_A \quad ,$$

wobei a eine feste Lösung ist. Da $A \cdot x \, = \, b$ eindeutig lösbar ist, ist $\text{Ker}\ f_A \, = \, \{0\}$, also $\dim \text{Ker}\ f_A \, = \, 0$, $\dim \text{Lös}(A, 0) \, = \, 0$, also nach Satz 19.6.5 : $n - \text{Rg} A \, = \, 0$, also $n \, = \, \text{Rg} A$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Es gelte $\text{Rg} A \, = \, \text{Rg}\,(A, b) \, = \, n$. Wegen $\text{Rg} A \, = \, \text{Rg}\,(A, b)$ folgt nach Satz 19.6.7 : $A \cdot x \, = \, b$ ist lösbar, und nach Satz 19.6.3:

$$\text{Lös}\,(A, b) \quad = \quad a + \text{Ker}\ f_A \quad ,$$

wobei a eine Lösung ist, und nach Satz 19.6.5:

$$\dim \text{Ker}\ f_A \quad = \quad \dim \text{Lös}(A, 0) \quad = \quad n - \text{Rg} A \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{also}$$

$$\text{Ker}\ f_A \, = \, \{0\} \quad , \quad \text{Lös}\,(A, b) \, = \, \{a\} \quad .$$ □

- Wie kann man nun ein lineares Gleichungssystem $A \cdot x \, = \, b$ praktisch lösen? Man bringt dazu die erweiterte Matrix (A, b) durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (B, c) und löst dann

$$B \cdot x \, = \, c \quad ,$$

was, wie wir sehen werden, ganz einfach ist. Zunächst

Hilfssatz 19.6.9 : Wird aus der $m \times (n + 1)-$Matrix (A, b) durch endlich viele elementare **Zeilen**umformungen die Matrix (B, c) , so gilt

$$\text{Lös}\,(A, b) \quad = \quad \text{Lös}(B, c) \quad ,$$

d.h. an der Lösungsmenge ändert sich nichts.

Beweis : Beim Beweis von Hilfssatz 19.5.10 haben wir gesehen, dass man elementare Zeilemformungen einer Matrix A durch Multiplikation von links mit Matrizen aus $\text{GL}(m, K)$ erhält : Aus $A \in M(m \times n, K)$ wird

$$F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_r \cdot A \text{ mit } r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } F_1, \ldots, F_r \in \mathrm{GL}(m, K) \quad .$$

Da $\mathrm{GL}(m, K)$ eine Gruppe ist, ist auch

$$F \quad := \quad \prod_{j=1}^{r} F_j \in \mathrm{GL}(m, K) \quad ,$$

und durch elementare Zeilenumformungen wird aus (A, b) also die Matrix $F \cdot (A, b)$. Nun gilt für $x \in K^n$:

$$A \cdot x = b \quad \Longleftrightarrow \quad F \cdot A \cdot x = F \cdot b \quad , \quad ,$$

wobei man für "$\Longleftarrow$" braucht, dass F invertierbar ist. Also ist

$$\text{Lös}\,(A, b) \quad = \quad \text{Lös}(F \cdot A, F \cdot b) \quad = \quad \text{Lös}(B, c) \quad .$$

Warnung : Für elementare **Spalten**umformungen an (A, b) gilt 19.6.9 nicht. Sie ändern zwar den Rang von (A, b) nicht, wohl aber die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$. □

(19.6.10) Gaußsches Eliminationsverfahren : Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$A \cdot x = b \text{ mit } A \in M(m \times n, K)\,,\, b \in K^m \text{ gegeben,}$$
$$\text{und } x \in K^n \text{ gesucht.}$$

Dann schreibt man sich die erweiterte Koeffizientenmatrix (A, b) auf und bringt sie, wie in Satz 19.5.12 beschrieben, durch endlich viele elementare **Zeilen**umformungen auf Zeilenstufenform (B, c), und nach Hilfssatz 19.6.9 sind die Lösungen von

$$B \cdot x = c \text{ genau die Lösungen von } A \cdot x = b \,,$$

und es gilt nach Hilfssatz 19.5.10 :

$$\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B \quad \text{und} \quad \mathrm{Rg}\,(A, b) = \mathrm{Rg}(B, c) \quad .$$

Die Matrix (B, c) hat die Form

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
_ & & & & & & \\
 & |\; b_{1j_1} & & & & & c_1 \\
 & |_ \;\; _ \;\; _ & & & & & \\
 & & |\; b_{2j_2} & & * & & \vdots \\
 & & |_ \;\; _ \;\; _ & & & & \\
 & & & \ddots & & & \vdots \\
 & 0 & & & |\; b_{rj_r} & & c_r \\
 & & & & |_ \;\; _ \;\; _ & & _ \\
 & & & & & & c_{r+1} \\
 & & & & & & _ \\
 & & & & & & 0
\end{array}\right)$$

und daraus kann man alles ablesen, was man wissen möchte:

a) Ist $c_{r+1} \neq 0$ so ist $\mathrm{Rg}B = r\,,\, \mathrm{Rg}(B, c) = r + 1\,,$ also ist das System nach Satz 19.6.7 nicht lösbar.

b) Ist $c_{r+1} = 0 \quad ,$ so ist

$$\mathrm{Rg}B = \mathrm{Rg}(B, c) = r\,,$$

das System ist also lösbar, und eindeutig lösbar, wenn auch noch

$$r = n = \text{Anzahl der Unbekannten}$$

ist. Die Lösungen erhält man folgendermaßen: Für die Unbekannten

$$x_j \quad , \quad j \notin \{j_1 \, , \, \ldots \, , \, j_r\}$$

kann man beliebige Werte aus K einsetzen. Die Unbekannten

$x_{j_1} \, , \, \ldots \, , \, x_{j_r}$ erhält man in Abhängigkeit von diesen Unbekannten, wenn man die Gleichungen

$$\begin{array}{lllcl} b_{rj_r} & x_{j_r} & + \ \ldots & = & c_r \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{1j_1} & x_{j_1} & + \ \ldots & = & c_1 \end{array}$$

in dieser Reihenfolge nach $x_{j_r} \, , \, \ldots \, , \, x_{j_1}$ auflöst. Man sieht das am besten an Beispielen.

Beispiele 19.6.11 : 1) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & 4x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 6x_3 & + & x_4 & + & 7x_5 & = & 3 \end{array}$$

Die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 2 & | & 12 \\ 2 & -2 & 10 & 4 & -1 & | & 11 \\ 2 & 6 & -6 & 1 & 7 & | & 3 \end{array}\right)$$

bringen wir, wie im Beweis von Satz 19.5.12 beschrieben, auf Zeilenstufenform:

$$(A', b') \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -10 & | & 6 \\ 0 & -6 & 12 & 4 & -9 & | & 7 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & | & -1 \end{array}\right) \quad ,$$

$$(A'', b'') \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -12 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right) \quad ,$$

$$(A''', b''') \quad = \quad \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right) \quad .$$

Wir sehen: $\mathrm{Rg} A''' \ = \ \mathrm{Rg}(A''', b''') \ = \ 4 \neq 5 \, ,$ das System ist also lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. Wir wählen

$\underline{x_3 \in \mathbb{R} \ \text{ beliebig}}$ und erhalten damit

$9x_5 \ = \ -3 \, ,$ also $\quad \underline{x_5 \ = \ -\frac{1}{3}} \, ,$

$$4x_4 - 12x_5 = 4\,, \text{ also } \quad \underline{x_4 =} 1 + 3x_5 = \underline{0} \quad ,$$

$$2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = -1\,, \text{ also } \quad \underline{x_2 =} 2x_3 - \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \underline{2x_3 - \frac{2}{3}} \quad ,$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = 2\,, \text{ also } \quad \underline{x_1 =} 2 - 4x_3 + \frac{4}{3} + x_3 + \frac{4}{3} = \underline{\frac{14}{3} - 3x_3} \quad .$$

2)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \quad , \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \quad , \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \quad . \end{array}$$

Die erweiterte Matrix ist

$$(A, b) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 2 \\ -1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

wir bringen sie auf Zeilenstufenform:

$$(A', b') \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -3 & | & 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$(A'', b'') \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Wir sehen: Es war

$$\mathrm{Rg} A = 2\,, \text{ aber } \quad \mathrm{Rg}\,(A, b) = 3\,,$$

das System ist also nicht lösbar. $\square$

Für das nächste Rechenverfahren brauchen wir

<u>Satz 19.6.12 :</u> Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Dann sind für eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ die folgenden Aussagen gleichbedeutend:

(i) $A \in \mathrm{GL}(n, K)$,
(ii) $\mathrm{Rg}\ A = n$,
(iii) $f_A : K^n \longrightarrow K^n\,,\ f_A(x) := A \cdot x$ ist ein Isomorphismus.

<u>Beweis :</u> Sei $\mathfrak{K} := (e^1, \ldots, e^n)$ die kanonische Basis des K^n (als Spaltenvektoren geschrieben), dann ist

$$A \quad = \quad M^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{K}}(f_A) \quad .$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Ist $A \in \mathrm{GL}(n, K)$, so gilt

$$\mathrm{Rg} A = \mathrm{ZRg}(A) = \mathrm{ZRg}(A \cdot E_n) \overset{19.5.7}{=} \mathrm{ZRg}(E_n) = n \quad .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : Wenn (ii) gilt, haben wir

$$n \quad = \quad \mathrm{Rg}\, A \quad = \quad \dim \mathrm{span}(a^1, \ldots, a^n) \quad =$$

$$\dim \mathrm{span}(f_A(e^1), \ldots, f_A(e^n)) \quad = \quad \dim f_A(K^n) \quad ,$$

also $f_A(K^n) = K^n$, also ist f_A surjektiv. Nach der Dimensionsformel (19.3.5) ist $\dim \mathrm{Ker}\ f_A = 0$, also ist f_A injektiv. Also ist f_A ein Isomorphismus.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Ist f_A ein Isomorphismus, so ist f_A bijektiv, wir haben also die Umkehrfunktion $G : K^n \longrightarrow K^n$, die, wie wir als Übungsaufgabe bewiesen haben, wiederum $K-$linear ist. Aus

$$f_A \circ G \quad = \quad G \circ f_A \quad = \quad \mathrm{id}_{K^n}$$

folgt nach (19.4.8) :

$$M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(f_A) \cdot M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(G) \quad = \quad M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(G) \cdot M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(f_A) \quad = \quad M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(\mathrm{id}_{K^n}) \quad ,$$

also für $B := M_{\mathfrak{K}}^{\mathfrak{K}}(G)$:

$$A \cdot B \quad = \quad B \cdot A \quad = \quad E_n \quad ,$$

also $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. $\square$

Anwendung 19.6.13 : Man kann das Gaußsche Eliminationsverfahren anwenden, um mit geringem Rechenaufwand das Inverse einer Matrix

$$A \in M(n \times n, K)$$

auszurechnen, und man sieht bei der Rechnung auch, ob es existiert : Die inverse Matrix

$$B \quad = \quad (b_{kj}) \quad := \quad A^{-1} \quad ,$$

erfüllt, falls sie existiert, die Gleichung $A \cdot B = E_n$, also

$$\forall\, k, j \in \underline{n} \; : \quad \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \cdot b_{lj} \;=\; \delta_{kj} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} \quad .$$

Das sind n^2 lineare Gleichungen mit den n^2 Unbekannten b_{kj} , aber man muss erfreulicherweise nicht alle diese Gleichungen hinschreiben: Für jedes feste $j \in \underline{n}$ hat man n Gleichungen mit n Unbekannten $b_{1j}, \ldots, b_{nj}$:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \cdot b_{lj} \quad = \quad \delta_{kj}\,, \qquad \text{also}$$

$$A \cdot b^j \quad = \quad e^j$$

mit dem unbekannten Spaltenvektor b^j. Die einfache Matrix A ist für alle $j \in \underline{n}$ dieselbe, nur die "rechte Seite" hängt von j ab. Wir lösen nun diese n Gleichungssysteme (mit jeweils n Gleichungen mit n Unbekannten) dadurch, dass wir alle "rechten Seiten", also die Spaltenvektoren e^j, auf einmal rechts neben die Matrix A schreiben, das ergibt die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array} \right) \quad = \quad (A \mid E_n) \quad ,$$

und mit allen rechten Seiten gleichzeitig, also mit E_n, die elementaren Zeilenumformungen ausführen. Wir kommen dann zunächst auf eine Matrix der Form

$$(\, A' \mid C' \,) \quad .$$

Hat dieses A' nun weniger als n Stufen, so war

$$\operatorname{Rg} A \quad = \quad \operatorname{Rg} A' < n$$

und nach Satz 19.6.12 ist A nicht invertierbar, wir brauchen also nicht weiter zu rechnen. Hat man n Stufen, so ist

$$A' \quad = \quad \begin{pmatrix} | \quad a'_{11} & & & * \\ |\_ \quad \_ & & & \\ & | \quad a'_{22} & & \\ & |\_ \quad \_ & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & | \quad a'_{nn} \\ & & & |\_ \quad \_ \end{pmatrix} \quad , \quad \text{mit} \quad a'_{11}, \ldots, a'_{nn} \neq 0 \quad ,$$

und man führt weitere elementare Zeilenumformungen an $(A' \mid C')$ aus: Man dividiert die $k-$te Zeile durch a'_{kk} , für $k = 1, \ldots, n$, und addiert dann, beginnend mit der letzten Zeile, passende Vielfache jeder Zeile zu den vorhergehenden, so dass man auch oberhalb der Diagonale nur noch Nullen hat. Insgesamt hat man dann die Matrix

$$(\, E_n \mid C \,) \quad ,$$

und wenn man sich nun wieder die einzelnen Gleichungssysteme ansieht, so steht da

$$E_n \cdot b^j \quad = \quad c^j \qquad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n,$$

für die "unbekannten" Vektoren b^j . Also gilt

$$c^j \quad = \quad b^j \quad , \quad C \quad = \quad B \quad ,$$

die rechts stehende Matrix ist also die Inverse von A :

$$(\, E_n \mid A^{-1}) \quad . \qquad \square$$

§7 Stetigkeit

7.3 Gleichmäßige Konvergenz

Weierstraß-Kriterium 7.3.9 : Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien

$$f_k \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad D \subset \mathbb{C} \quad .$$

Wenn die Reihe der Normen der f_k bezüglich D , also

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_D \quad ,$$

konvergiert, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ auf D gleichmäßig gegen eine Funktion

$$f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C} \quad .$$

Beweis : Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.

a) Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen (6.2.1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für $n > m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{n} ||f_k||_D - \sum_{k=0}^{m} ||f_k||_D \right| < \varepsilon, \quad \text{also} \quad \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k||_D < \varepsilon \quad ,$$

also für jedes $x \in D$:

$$|s_n(x) - s_m(x)| \quad = \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \quad \leq \quad \sum_{k=m+1}^{n} ||\, f_k \,||_D \quad < \quad \varepsilon \quad ,$$

also ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$; es existiert

$$f(x) \quad := \quad \lim_{n\to\infty} s_n(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad .$$

b) Für $x \in D$ gilt

$$|f(x) - s_m(x)| \quad = \quad |f(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - s_m(x)|$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Nun gibt es, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||_D$ eine Cauchyfolge ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{R}$, so dass für $n > m \geq N_1$ gilt

$$\forall\, x \in D \;:\; |s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||\, f_k \,||_D < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

und zu festem $m \geq N_1$ und festem $x \in D$ nach a) ein $n_2(x) \in \mathbb{N}$, $n_2(x) \geq m$, so dass für $n \geq n_2(x)$:

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ist, also für} \quad m \geq N_1 \;:$$

$$|f(x) - s_m(x)| < \varepsilon \quad .$$

$(s_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert also gleichmäßig auf D gegen f. □

7.7 Grenzwerte von Funktionen

Definition 7.7.1 : Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [oder $D \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$] . a heißt ein **Häufungspunkt** von D, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; a_n \in D \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad ,$$

d.h. wenn a (eigentlicher oder uneigentlicher) Grenzwert einer Folge von Elementen aus D ist.

(7.7.2) Beispiele : 1) Jedes $a \in D$ ist Häufungspunkt von D, denn

$$a \quad = \quad \lim_{n\to\infty} a \quad .$$

2) Sei $D = (a, b)$, $a < b$, dann ist b ein Häufungspunkt von D, denn

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(b - \frac{b-a}{2n} \right) \quad , \quad \text{und} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; b - \frac{b-a}{2n} \in D \quad .$$

3) ∞ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}_+^*$, denn

$$\infty \quad = \quad \lim_{n\to\infty} n \quad \text{und} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; n \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

Definition 7.7.3 : a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f \;:\; D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D. Sei $c \in \overline{\mathbb{R}}$, und für **jede** Folge

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$,

dann schreiben wir: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in D}} f(x) = c$, und nennen c den **Grenzwert der Funktion** f für x gegen a .

b) Man kann hier auch
$D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ zulassen, dann muss
$a \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ sein.

Folgerungen 7.7.4 : a) Das Folgenkriterium (7.1.3) für Stetigkeit kann man dann so formulieren: Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$. Dann gilt

$$f \quad \text{stetig in} \quad x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = f(x_0) \quad .$$

In diesem Fall braucht man das Symbol $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x)$ also nicht.

b) Ist aber $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D , der nicht in D enthalten ist, $c, x_0 \in \mathbb{C}$, so bedeutet

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = c \quad ,$$

dass die im Punkt x_0 durch c ergänzte Funktion

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ c & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 stetig ist, dass man also die Funktion f in x_0 stetig ergänzen kann.

Beispiel 7.7.5 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ für die durch

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definierte Exponentialfunktion.

Beweis : $\dfrac{\exp(x) - 1}{x}$ ist fr $x \neq 0$ nicht definiert, aber in

$$D := \{ x \in \mathbb{C} \mid x \neq 0 \} \quad ,$$

und 0 ist ein Häufungspunkt von D . Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Nach Lemma 6.4.15 (Restabschätzung) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$|R_2(x)| \leq c\,|x|^2 \quad \text{für} \quad R_2(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad |x| < 1$$

gilt, also

$$|\exp(x) - 1 - x| \leq c|x|^2 \quad , \quad \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| \leq c|x| \quad ,$$

und aus $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, folgt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\exp(x_n) - 1}{x_n} - 1 \right) = 0 \quad . \qquad \square$$

Beispiel 7.7.6 : $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$.

Beweis : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert, ∞ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann gilt für $x_n > 0$:

$\exp(x_n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} > x_n$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty$. □

- Gelegentlich braucht man auch links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte von Funktionen :

Definition 7.7.7 : Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Ein $c \in \mathbb{C}$ heißt **linksseitiger Grenzwert von f in x_0** , geschrieben

$$c \;=:\; \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \;=:\; f(x_0-) \quad , \quad \text{wenn}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D\cap(-\infty,x_0)}} f(x) \;=\; c \quad \text{existiert.}$$

Entsprechend nennt man

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) \;:=\; f(x_0+) \;:=\; \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D\cap(x_0,\infty)}} f(x)$$

den **rechtsseitigen Grenzwert von f in x_0** . □

§20 Determinanten

20.1 Permutationen

(20.1.1) Zur Wiederholung : 1) Sei $n \in \mathbb{N}$, dann hatten wir

$\underline{n} \;:=\; \{1, 2, , \ldots, n\}$

definiert, außerdem $\underline{0} \;:=\; \emptyset$.

Definition und Satz 20.1.2 : Sei $n \in \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir mit S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen von $\underline{n}$ auf $\underline{n}$. Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen ist S_n eine (für $n \geq 3$ nicht abelsche) Gruppe. $(S_n, \circ)$ heißt die **symmetrische Gruppe** vom Grad n und hat $n!$ Elemente. Die Elemente von S_n heißen **Permutationen** von $\underline{n}$.

Beweis : 1) Seien $\sigma, \tau \in S_n$, dann ist $\sigma \circ \tau$ eine Abbildung von $\underline{n}$ in $\underline{n}$, und auch wieder bijektiv, denn

$(\sigma \circ \tau)(\underline{n}) = \sigma(\tau(\underline{n})) = \sigma(\underline{n}) = \underline{n}$ und

$$\forall\, j, k \in \underline{n} : (\quad (\sigma\circ\tau)(j) = (\sigma\circ\tau)(k) \quad\Longrightarrow\quad \sigma(\tau(j)) = \sigma(\tau(k))$$
$$\overset{\sigma \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \quad \tau(j) = \tau(k) \quad \overset{\tau \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} \quad j = k \quad) \quad .$$

Also ist $\sigma \circ \tau \in S_n$, also ist $\circ$ eine Verknüpfung auf S_n . Das Assoziativgesetz gilt nach Satz 1.1.18 . Das neutrale Element ist die Abbildung

$\mathrm{id}_{\underline{n}} : \underline{n} \longrightarrow \underline{n} \quad , \quad j \longmapsto j \quad ,$

und das inverse Element von $\sigma \in S_n$ ist die Umkehrfunktion σ^{-1} , die nach Satz 1.1.19 auch wieder bijektiv ist. Also ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe.

2) Ist $n \geq 3$, so haben wir die Permutationen

$\sigma, \tau \;:\; \underline{n} \longrightarrow \underline{n}$, die definiert sind durch

$\sigma(1) := 2\,,\ \sigma(2) := 3\,,\ \sigma(3) := 1\,,\ \sigma(j) := j$ für $j > 3$,

$\tau(1) := 2\,,\ \tau(2) := 1\,,\ \tau(j) := j$ für $j > 2$.

Dafür gilt dann

$(\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 2$,

$(\tau \circ \sigma)(2) = \tau(\sigma(2)) = \tau(3) = 3$,

also $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Also ist S_n fr $n \geq 3$ nicht abelsch.

3) Dass die Anzahl der Elemente von S_n gleich $n!$ ist, sieht man dadurch ein, dass man die Abbildung $\sigma \in S_n$ auffasst als Anordnung

$(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$

der Menge $\underline{n}$. In Königsberger, Satz 1 in 1.2, S.3, steht dann der Beweis.

□

<u>(20.1.3) Schreibweise von Permutationen :</u> Ein $\sigma \in S_n$ kann man dadurch angeben, dass man für $1, \ldots, n$ die Funktionswerte $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ hinschreibt, etwa so:

$$\sigma \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad .$$

Das ist ziemlich viel Schreibarbeit. Einfacher ist es, man schreibt nur eine Zeile hin, beginnt mit einer runden Klammer, schreibt eine Zahl $j \in \underline{n}$ hin, dahinter ihren Funktionswert $k := \sigma(j)$, also

$(j, k, \ldots$,

danach $\sigma(k)$ usw. Irgendwann wird ein l mit $\sigma(l) = j$ auftreten, dann schließt man die Klammer :

$(j, k, \ldots, l)$.

Z.B. ist $(1, 2, 4)$ eine Abkürzung für

$$\sigma \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_4 \quad , \quad \text{aber auch für}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in S_5 \quad ,$$

wenn man vereinbart, dass Zahlen, die nicht in der Klammer auftauchen, auf sich selbst abgebildet werden. Wir formulieren das etwas genauer:

<u>Definition 20.1.4 :</u> Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt ein **<u>Zyklus</u>**, wenn es eine Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_r\} \subset \underline{n}\,,\ r \geq 1\,,$ gibt, so dass

$\forall\, j \in \underline{r-1} \;:\; \sigma(a_j) = a_{j+1}$,

für $j = r \;:\; \sigma(a_r) = a_1$ und

$\forall\, j \in \underline{n} \setminus \{a_1, \ldots, a_r\} \;:\; \sigma(j) = j$

gilt . Ist $r = 1$, so ist $\sigma = \mathrm{id}_{\underline{n}}$ und man schreibt

$(1) \quad := \quad \mathrm{id}_{\underline{n}}$.

Ist $r > 1$, so schreibt man für σ kurz

$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

<u>Bemerkungen 20.1.5 :</u> 1) Nicht jedes $\sigma \in S_n$ ist ein Zyklus, sondern i.A. ein Produkt mehrerer Zyklen, z.B. ist

$$\sigma \quad = \quad (1,2) \circ (3,4) \in S_4$$

kein Zyklus.
2) Die Zyklenschreibweise ist nicht eindeutig, z.B. ist
$(1,2,3) \; = \; (2,3,1) \in S_3$.

Definition 20.1.6 : Sei $\tau \in S_n$ und es gebe $j,k \in \underline{n}$, $j \neq k$, mit
$\tau \; = \; (j,k)$,
dann heißt τ eine **Transposition** . □

Man sieht, dass für Transpositionen τ gilt
$\tau \; = \; \tau^{-1}$.

Satz 20.1.7 : Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist jedes $\sigma \in S_n$ ein Produkt von endlich vielen Zyklen.

Beweis : Für jedes $\sigma \in S_n$ setzen wir

$$B(\sigma) \quad := \quad \{ \; j \in \underline{n} \; | \; \sigma(j) \neq j \; \} \quad .$$

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach $\#(B(\sigma))$:
Induktionsanfang : Ist $\#(B(\sigma)) \; = \; 0$, so ist $\sigma \; = \; \mathrm{id}_{\underline{n}} \; = \; (1)$.
Induktionsschluss : Sei $k \in \mathbb{N}_0$, und für die $\varphi \in S_n$ mit
$\#(B(\varphi)) \; \leq \; k$
sei die Behauptung richtig. Sei $\sigma \in S_n$ mit
$\#(B(\sigma)) \; = \; k+1$, also

$$B(\sigma) \quad = \quad \{a_1, \ldots, a_{k+1}\} \subset \underline{n} \quad ,$$

dann ist $\sigma(a_{k+1})$ gleich einem der a_j mit $j \neq k+1$ und

$$\tau \quad := \quad (a_j, a_{k+1}) \in S_n \quad . \quad \text{Es gilt}$$

$$(\tau \circ \sigma)(a_{k+1}) \quad = \quad \tau(a_j) \quad = \quad a_{k+1} \quad , \qquad \text{also}$$

$$B(\tau \circ \sigma) \subset \{a_1, \ldots, a_k\} \quad ,$$

denn für die $i \in \underline{n} \setminus \{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$ gilt

$$(\tau \circ \sigma)(i) \quad = \quad \tau(i) \quad = \quad i \quad ,$$

sie werden weder von τ noch von σ verändert. Also ist

$$\#(B(\tau \circ \sigma)) \; \leq \; k$$

und daher $\tau \circ \sigma$ ein Produkt endlich vieler Zyklen: Es gibt Zyklen $\psi_1, \ldots, \psi_m \in S_n$ mit

$$\tau \circ \sigma \quad = \quad \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_m \quad , \quad \text{und wegen} \quad \tau \; = \; \tau^{-1} \; :$$

$$\sigma \quad = \quad \tau \circ \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_m \quad .$$

Da auch τ ein Zyklus ist, gilt die Behauptung auch für σ . □

Definition 20.1.8 : Für jedes $\sigma \in S_n$ nennen wir

$$\operatorname{sign}\sigma \quad := \quad \prod_{\substack{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k}$$

das **Signum** von σ .

Folgerung 20.1.9 : Es ist $\operatorname{sign}\sigma \in \{-1,1\}$, und zwar

$$\operatorname{sign}\sigma \quad = \quad +1 \quad ,$$

wenn die Anzahl der **Fehlstände** von σ , worunter man die Paare

$$(k,j) \in \underline{n}\times\underline{n} \quad \text{mit} \quad k<j \quad , \quad \text{aber} \quad \sigma(k) > \sigma(j)$$

versteht, gerade ist, und

$\operatorname{sign}\sigma = -1$, wenn die Anzahl der Fehlstände von σ ungerade ist.

Beweis : In dem Bruch

$$\prod_{\substack{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k}$$

treten im Nenner für alle zweielementigen Teilmengen $\{k,j\}$ von $\underline{n}$ die Differenzen auf, genau einmal und mit positivem Vorzeichen. Da σ bijektiv ist, sind auch die Mengen $\{\sigma(k),\sigma(j)\}$ mit $(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n}$ und $k<j$ alle zweielementigen Teilmengen von $\underline{n}$. Also treten auch im Zähler alle Differenzen $j-k$ auf, aber mit negativem Vorzeichen, wenn $\sigma(j)<\sigma(k)$ ist. Bis auf diese Vorzeichen kürzt sich alles weg, und es bleiben so viele Faktoren (-1) übrig, wie σ Fehlstände hat. $\square$

Beispiele 20.1.10: In S_3 gilt

a) $\operatorname{sign}(1,2) \quad = \quad \dfrac{(1-2)(3-2)(3-1)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad -1 \quad ,$

b) $\operatorname{sign}(1,3,2) \quad = \quad \dfrac{(1-3)(2-3)(2-1)}{(2-1)(3-1)(3-2)} \quad = \quad 1 \quad .$

Satz 20.1.11 : Für $\sigma,\tau \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) \quad = \quad \operatorname{sign}\tau\cdot\operatorname{sign}\sigma \quad .$$

Beweis : Es gilt

$$\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) = \prod_{\substack{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{j-k} = a\cdot b \quad \text{mit}$$

$$a := \prod_{\substack{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)} \quad , \quad b := \prod_{\substack{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\sigma(j)-\sigma(k)}{j-k} \quad .$$

Es ist $b = \operatorname{sign}\sigma$, und

$$a = \prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j\wedge\sigma(k)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)} \cdot \prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j\wedge\sigma(k)>\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)}$$

$$= \prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j\wedge\sigma(k)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)} \cdot \prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k>j\wedge\sigma(k)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)} ,$$

hier haben wir im zweiten Produkt zuerst die Variablen umbenannt (j in k und k in j) , und dann mit -1 erweitert. Also ist

$$a = \prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } \sigma(k)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(k))}{\sigma(j)-\sigma(k)} ,$$

denn mit $k<j$ und $k>j$ erhält man (wegen $\sigma(k)<\sigma(j)$, also $k\neq j$) alle Paare $(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n}$ mit $\sigma(k)<\sigma(j)$. Da σ bijektiv ist, enthält a bis auf die Reihenfolge dieselben Faktoren wie

$$\prod_{\substack{(k,j)\in\underline{n}\times\underline{n} \\ \text{mit } k<j}} \frac{\tau(j)-\tau(k)}{j-k} ,$$

also $a = \operatorname{sign}\tau$. □

Korollar 20.1.12 : Für alle $\sigma\in S_n$ gilt $\operatorname{sign}\sigma^{-1} = \operatorname{sign}\sigma$.

Beweis : Es ist $\sigma\circ\sigma^{-1} = \mathrm{id}_{\underline{n}}$, also nach 20.1.11 :

$$\operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\sigma^{-1} = \operatorname{sign}\mathrm{id}_{\underline{n}} \overset{20.1.9}{=} 1 ,$$

also $\operatorname{sign}\sigma^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{sign}\sigma}$, und wegen $\operatorname{sign}\sigma\in\{1,-1\}$ ist das gleich $\operatorname{sign}\sigma$.

Korollar 20.1.13 : Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ und $\tau\in S_n$ eine Transposition. Dann ist

$$\operatorname{sign}\tau = -1 .$$

Beweis : Nach Definition 20.1.6 gibt es $k,l\in\underline{n}$ mit $k\neq l$ und

$$\tau = (k,l) .$$

a) Ist $\{k,l\} = \{1,2\}$, so ist

$$\tau = (1,2) \quad \text{und}$$

$$\operatorname{sign}\tau = \prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{\tau(j)-\tau(k)}{j-k} = \prod_{k=1}^{2}\prod_{j=k+1}^{n}\frac{\tau(j)-\tau(k)}{j-k}$$

$$= \prod_{j=2}^{n}\frac{\tau(j)-2}{j-1}\cdot\prod_{j=3}^{n}\frac{\tau(j)-1}{j-2} = \frac{1-2}{2-1}\cdot\prod_{j=3}^{n}\frac{j-2}{j-1}\cdot\prod_{j=3}^{n}\frac{j-1}{j-2} = -1 .$$

b) Haben $\{k,l\}$ und $\{1,2\}$ genau ein Element gemeinsam, etwa $k = 2$, so gilt

$$(l,1)\circ(1,2)\circ(l,1) \quad = \quad (l,2) \quad = \quad (2,l) \quad = \quad (k,l) \quad = \quad \tau \quad , \quad \text{also}$$

$$\operatorname{sign}\tau \;=\; \operatorname{sign}(l,1)\cdot\operatorname{sign}(1,2)\;\cdot\;\operatorname{sign}(l,1) \;=\; (-1)\cdot(\operatorname{sign}(l,1))^2 \;=\; -1\,.$$

c) Ist $\{k,l\}\cap\{1,2\} \;=\; \emptyset$, so gilt

$$(k,1)\circ(l,2)\circ(1,2)\circ(k,1)\circ(l,2) \quad = \quad (k,l) \quad = \quad \tau \quad , \quad \text{also}$$

$$\operatorname{sign}\tau \;=\; \operatorname{sign}(1,2)\cdot(\operatorname{sign}(k,1))^2\cdot(\operatorname{sign}(l,2))^2 \;=\; \operatorname{sign}(1,2) \;=\; -1 \quad .$$

□

<u>Hilfssatz 20.1.14 :</u> Ist $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, so gibt es zu jedem $\sigma\in S_n$ Transpositionen $\tau_1,\ldots,\tau_q\in S_n$ mit

$$\sigma \quad = \quad \tau_1\circ\ldots\circ\tau_q \quad ,$$

also nach Satz 20.1.11 und Korollar 20.1.13 :

$$(*) \quad \operatorname{sign}\sigma \quad = \quad (-1)^q \quad .$$

Weder q noch die Transpositionen $\tau_1,\ldots,\tau_q$ sind eindeutig bestimmt.
Wegen $(*)$ ist durch σ aber festgelegt, ob q gerade oder ungerade ist.
<u>Beweis :</u> Nach Satz 20.1.7 wissen wir, dass σ ein Produkt von endlich vielen Zyklen ist. Wir müssen also nur zeigen, dass jeder Zyklus

$$(a_1,\ldots,a_q) \quad \text{mit verschiedenen Elementen} \quad a_1,\ldots,a_q\in\underline{n}$$

ein Produkt von Transpositionen ist: Man rechnet nach:

$$(a_1,a_q)\circ(a_1,a_{q-1})\circ\ldots\circ(a_1,a_2) \quad = \quad (a_1,\ldots,a_q) \quad .$$

Dass q nicht eindeutig bestimmt ist, sieht man an

$$\mathrm{id}_{\underline{n}} \quad = \quad (1,2)\circ(1,2) \quad ,$$

hier kann man also $q=0$ oder $q=2$ nehmen. □

<u>Definition und Satz 20.1.15 :</u> Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, dann setzen wir

$$A_n \quad := \quad \{\ \sigma\in S_n \ \mid\ \operatorname{sign}\sigma \;=\; 1\ \} \quad .$$

$(A_n,\circ)$ ist eine Gruppe und heißt die **<u>alternierende Gruppe</u>** vom Grad n .
Für eine beliebige Permutation $\tau\in S_n$ mit $\operatorname{sign}\tau \;=\; -1$ ist

$$S_n \;=\; A_n\,\cup\,A_n\circ\tau \quad \text{und} \quad A_n\cap A_n\circ\tau \;=\; \emptyset \quad .$$

A_n enthält $\dfrac{n!}{2}$ Elemente.

<u>Beweis :</u> 1) Das Assoziativgesetz gilt in A_n , da es in S_n gilt. Seien $\sigma,\tau\in A_n$, dann gilt $\sigma\circ\tau\in S_n$ und

$$\operatorname{sign}(\sigma\circ\tau) \quad = \quad \operatorname{sign}\sigma\cdot\operatorname{sign}\tau \quad = \quad 1\cdot 1 \quad = \quad 1 \quad ,$$

also $\sigma \circ \tau \in A_n$. Also ist $\circ$ eine Verknüpfung in A_n. Es ist

$$\operatorname{sign} \mathrm{id}_{\underline{n}} = 1 \quad ,$$

also gehört das neutrale Element $\mathrm{id}_{\underline{n}}$ von S_n auch zu A_n. Für $\sigma \in A_n$ gilt nach Korollar 20.1.12 auch $\operatorname{sign} \sigma^{-1} = 1$, also $\sigma^{-1} \in A_n$. Also ist $(A_n, \circ)$ eine Gruppe.

2) Sei $\tau \in S_n$ ein festes Element mit $\operatorname{sign} \tau = -1$. Für $\sigma \in A_n$ gilt dann $\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = -1$, also ist

$$A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset \quad .$$

Für beliebiges $\mu \in S_n$ gilt entweder $\mu \in A_n$, oder $\operatorname{sign} \mu = -1$. Im letzten Fall gilt für $\sigma := \mu \circ \tau^{-1}$:

$$\operatorname{sign} \sigma = \operatorname{sign} \mu \cdot \operatorname{sign} \tau^{-1} = (-1)^2 = 1, \quad \text{also}$$

$$\sigma \in A_n \quad , \quad \mu = \sigma \circ \tau \in A_n \circ \tau \quad . \quad \text{Also ist}$$

$$S_n = A_n \cup A_n \circ \tau \quad .$$

3) Es ist $\#(A_n) = \#(A_n \circ \tau)$ für $\tau \in S_n$ mit $\operatorname{sign} \tau = -1$, denn

$$f : A_n \longrightarrow A_n \circ \tau \quad , \quad \sigma \longmapsto \sigma \circ \tau$$

ist bijektiv. Nach 2) folgt

$$\#(S_n) = \#(A_n) + \#(A_n), \quad \text{also}$$

$$\#(A_n) = \frac{1}{2} \#(S_n) = \frac{n!}{2} \quad .$$

□

20.2 Definition der Determinante

Definition 20.2.1 : Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Eine Abbildung

$$\det : M(n \times n, K) \longrightarrow K \quad , \quad A \longmapsto \det A$$

heißt (eine) **Determinante**, falls gilt :

(D1) det ist linear als Funktion jedes Zeilenvektors. Genauer: Ist $j \in \underline{n}$ fest und gilt für den $j-$ten Zeilenvektor von A:

(a) $a_j = a'_j + a''_j$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a'_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a''_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ,$$

(b) $a_j = \lambda a'_j$ mit $\lambda \in K$, so gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a'_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad .$$

(D2) det ist **alternierend**, das soll heißen: Gilt
$a_j = a_k$ für zwei Zeilenvektoren a_j, a_k mit $k \neq j$, so ist
$\det A = 0$.

(D3) det ist **normiert** , d.h. $\det E_n = \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 1$.

(20.2.2) Motivation dafür, warum man eine Funktion mit diesen Eigenschaften sucht: Hat man n Vektoren $a_1, \dots, a_n$ im $\mathbb{R}^n$, so soll das Volumen des von $a_1, \dots, a_n$ aufgespannten **Parallelotops**

$$P(a_1, \dots, a_n) \quad := \quad \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \;\middle|\; \forall\, j \in \underline{n} : \;\; \alpha_j \in [0,1] \right\}$$

gerade die Eigenschaften (D1) - (D3) haben. Für $n = 3$ nennt man ein Parallelotop auch einen **Spat**, und für $n = 2$ ein **Parallelogramm**.
Die Eigenschaften (D1) - (D3) sind dann folgende Eigenschaften, die man von einem Flächeninhalt erwartet:

(D1)(a) Hat man zwei Parallelogramme P' und P'' mit den Seiten
a_1' und a_2 bzw. a_1'' und a_2
mit den Flächeninhalten F' bzw. F'' , so hat das Parallelogramm mit den Seiten $a_1' + a_1''$ und a_2 den Flächeninhalt $F' + F''$,

(b) Hat das Parallelogramm mit den Seiten a_1 und a_2 den Flächeninhalt F und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so hat das Parallelogramm mit den Seiten λa_1 und a_2 den Flächeninhalt λF .

(D2) Ein Parallelogramm mit den Seiten a_1 und a_1 hat den Flächeninhalt 0 .

(D3) Das Parallelogramm mit den kanonischen Basisvektoren e_1 und e_2 als Seiten hat den Flächeninhalt 1 .

Bevor wir zeigen, dass es genau eine Abbildung det mit den Eigenschaften (D1) - (D3) gibt, wollen wir aus diesen Eigenschaften einige Folgerungen ziehen:

Satz 20.2.3 : Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Eine Determinante

$$\det : M(n \times n, K) \longrightarrow K$$

hat die folgenden weiteren Eigenschaften:

(D4) Für alle $\lambda \in K$ ist $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(D5) Ist eine Zeile von A der Nullvektor, so ist $\det A = 0$.

(D6) Entsteht B aus A durch eine Zeilenvertauschung, so gilt

$$\det B = -\det A \ .$$

(Daher kommt der Name "alternierend" !)
Also: Eine elementare Zeilenumformung vom Typ IV ändert an $\det A$ das Vorzeichen.

(D7) Ist $\lambda \in K$, und entsteht B aus A durch Addition des $\lambda-$fachen der $j-$ten Zeile zur $k-$ten Zeile, $k \neq j$, so ist

$$\det B = \det A .$$

Also: Eine elementare Zeilenumformung vom Typ III ändert nichts an $\det A$.

Beweis : (D4) Nach (D1)(b) , n mal angewendet, gilt

$$\det(\lambda A) = \det \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} = \lambda^n \det A \quad .$$

(D5) Ist $j \in \underline{n}$ und $a_j = 0$, so gilt $a_j = 0 \cdot a_j$, also nach (D1)(b) :

$$\det A = 0 \cdot \det A = 0 \quad .$$

(D6) B entstehe aus A durch Vertauschen der Zeilen a_k und a_j . Schreiben wir uns in A und B die unveränderten Zeilen a_l , $l \notin \{k, j\}$, gar nicht erst hin, so gilt

$$\det A + \det B = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=}$$

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)(a)}{=}$$

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D1)(a)}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j + a_k \\ \vdots \\ a_j + a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0 \quad ,$$

also $\det B = -\det A$.

(D7) Mit derselben Schreibweise wie eben gilt

$$\det B \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(D1)(a)}}{=} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{(D1)(b)}}{=} \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \overset{\text{(D2)}}{=} \det A + 0 \quad .$$

□

Eine Verallgemeinerung von (D6) ist

Korollar 20.2.4 : Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n$ seien (Zeilen-)Vektoren aus K^n und $\sigma \in S_n$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \quad = \quad \operatorname{sign} \sigma \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad .$$

Beweis : Nach Hilfssatz 20.1.14 gibt es Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_q \in S_n$ mit

$$\sigma \quad = \quad \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q \quad , \quad \text{und es ist} \quad \operatorname{sign} \sigma \ = \ (-1)^q \quad .$$

Wir zeigen nun

$$(*) \quad \det \begin{pmatrix} b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q)(1)} \\ \vdots \\ b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q)(n)} \end{pmatrix} \quad = \quad (-1)^q \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

durch Induktion nach q :

Induktionsanfang: Für $q = 0$ ist $(*)$ trivial wegen $\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q = \mathrm{id}_{\underline{n}}$.

Induktionsschluss : Sei $q \in \mathbb{N}$ und für $q-1$ sei $(*)$ richtig. τ_q ist eine Transposition, etwa $\tau_q = (k, j)$ mit $k, j \in \underline{n}$ und $k \neq j$. Dann ensteht die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q)(1)} \\ \vdots \\ b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_q)(n)} \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad A' \quad := \quad \begin{pmatrix} b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_{q-1})(1)} \\ \vdots \\ b_{(\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_{q-1})(n)} \end{pmatrix}$$

durch Vertauschung der k-ten mit der j-ten Zeile, also durch **eine** Vertauschung, also nach (D6) :

$$\det A = -\det A' \overset{(**)}{=} -(-1)^{q-1} \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (-1)^q \det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei wir bei $(**)$ die Induktionsvoraussetzung benutzt haben. $\square$

Satz 20.2.5 : Ist $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper, so gibt es genau eine Funktion

$$\det : \ M(n \times n, K) \longrightarrow K$$

mit den Eigenschaften (D1) - (D3) , und zwar die für

$A = (a_{kj}) \in M(n \times n, K)$ durch

$$(*) \quad \det A \ := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

definierte Funktion.

Bemerkung 20.2.6 : $(*)$ heißt die **Leibniz-Formel** für det . Zur Berechnung von det ist sie – außer für $n \in \{1, 2\}$ – unpraktisch, da man die Summe über $n!$ Summanden zu bilden hat. Zur Berechnung von det verwendet man besser die Eigenschaften (D1)-(D7) und weitere Sätze, die folgen.

Beweis von Satz 20.2.5 : (1) Wir zeigen, dass aus (D1) - (D3) die Regel $(*)$ folgt, dass es also für $\det A$ nur eine Möglichkeit gibt, also die Eindeutigkeit von det : Für $l \in \mathbb{N}$ seien die a_l die Zeilenvektoren von A , dann gilt

$$a_l = a_{l1}e_1 + \ldots + a_{ln}e_n \quad ,$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ die (als Zeilen geschriebenen) kanonischen Basisvektoren von K^n sind, und wir wenden (D1) nacheinander für alle Zeilen an :

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} e_{k_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} \det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} \cdot \sum_{k_2=1}^{n} a_{2k_2} \det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ e_{k_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ \vdots \\ e_{k_n} \end{pmatrix} \quad .$$

Hier wird also summiert über alle $n-$tupel

$(k_1, \ldots, k_n) \in \underline{n}^n$,

also über n^n Summanden. Ist in einem solchen $n-$tupel aber

$k_j = k_l$ für ein Paar $(j, l) \in \underline{n} \times \underline{n}$ mit $j \neq l$,

so ist nach (D2)

$$\det \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ \vdots \\ e_{k_j} \\ \vdots \\ e_{k_l} \\ \vdots \\ e_{k_n} \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Wir müssen also nur summieren über die $n-$tupel $(k_1, \ldots, k_n)$, für die die Abbildung

$\sigma : \underline{n} \longrightarrow \underline{n} \quad , \quad \sigma(j) := k_j$

injektiv ist, also, da $\underline{n}$ endlich ist, bijektiv ist. Also ist

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \quad ,$$

und nach Korollar 20.2.4 :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign} \sigma \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad ,$$

und aus (D3) folgt $(*)$.

Um die Existenz einer Funktion $\det$ mit den Eigenschaften (D1) - (D3) zu zeigen, **definieren** wir $\det A$ durch die Leibniz-Formel $(*)$ und zeigen, dass das so definierte $\det A$ die Eigenschaften (D1) - (D3) hat:

(D1)(a) Ersetzt man in A die Zeile a_j durch $a'_j + a''_j$, so erhält man aus $(*)$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_j + a''_j \\ \vdots \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (a'_{j\sigma(j)} + a''_{j\sigma(j)}) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{j\sigma(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a''_{j\sigma(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a''_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

(b) ersetzt man a_j durch λa_j , $\lambda \in K$, so wird

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \lambda a_{j\sigma(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

(D2) Sei A eine Matrix, in der die $k-$te und die $l-$te Zeile gleich sind, Œ$k < l$. Sei τ die Transposition (k, l) , dann ist nach Satz 20.1.15 :

$$S_n = A_n \cup A_n \circ \tau \text{ und } A_n \cap A_n \circ \tau = \emptyset .$$

Für $\sigma \in A_n$ ist $\operatorname{sign} \sigma = 1$. Wenn σ die Gruppe A_n durchläuft, durchläuft $\sigma \circ \tau$ die Menge $A_n \circ \tau$, und es ist $\operatorname{sign}(\sigma \circ \tau) = -1$. Also ist

$$(**) \quad \det A = \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))} .$$

Die $k-$te und die $l-$te Zeile sind gleich, also gilt wegen $\tau = (k, l)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{1\sigma(\tau(1))} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{k\sigma(\tau(k))} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{l\sigma(\tau(l))} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{n\sigma(\tau(n))} & = \\
a_{1\sigma(1)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{k\sigma(l)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{l\sigma(k)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{n\sigma(n)} & \stackrel{\downarrow}{=} \\
a_{1\sigma(1)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{l\sigma(l)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{k\sigma(k)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{n\sigma(n)} & = \\
a_{1\sigma(1)} & \cdots & \ldots & \cdot & a_{k\sigma(k)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{l\sigma(l)} & \cdot & \ldots & \cdot & a_{n\sigma(n)} & ,
\end{array}$$

im letzten Schritt haben wir die Kommutativität von $(K, \cdot)$ benutzt. In $(**)$ heben sich also immer zwei Summanden gegenseitig auf, es ist

$$\det A = 0 .$$

(D3) Es ist $E_n = (\delta_{kj})$ mit $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases}$ also nach $(*)$:

$$\det E_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot \delta_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n\sigma(n)} .$$

Ist nun $\sigma \neq \mathrm{id}_{\underline{n}}$, so steht im Produkt $\delta_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \delta_{n\sigma(n)}$ ein Faktor $\delta_{j\sigma(j)}$ mit $\sigma(j) \neq j$, also 0 . Also ist

$$\det E_n = \operatorname{sign} \mathrm{id}_{\underline{n}} \cdot \delta_{11} \cdot \ldots \cdot \delta_{nn} = 1 . \qquad \square$$

Korollar 20.2.7 : Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Krper und $A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt

$$\det {}^tA = \det A .$$

Beweis : Für $A = (a_{kj})$ ist ${}^tA = (a'_{kj})$ mit $a'_{kj} = a_{jk}$, also nach der Leibniz-Formel:

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a'_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

Da $(K,\cdot)$ kommutativ ist, gilt für $b_1,\dots,b_n \in K$:

$$\prod_{j=1}^{n} b_j \quad = \quad \prod_{j=1}^{n} b_{\sigma^{-1}(j)} \quad , \quad \text{also folgt}$$

$$\det {}^t\!A \quad = \quad \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{\sigma(\sigma^{-1}(1)),\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(\sigma^{-1}(n)),\sigma^{-1}(n)}$$

und wegen $\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}\sigma^{-1}$:

$$\det {}^t\!A \quad = \quad \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma^{-1} \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

Da die Abbildung $S_n \longrightarrow S_n\,,\ \sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ bijektiv ist, können wir den "Summationsindex" σ^{-1} durch σ ersetzen :

$$\det {}^t\!A \quad = \quad \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$= \quad \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \quad = \quad \det A \quad . \qquad \square$$

Korollar 20.2.8 : Die Aussagen (D1) - (D7) fr die Determinante bleiben richtig, wenn man überall "Zeile" durch "Spalte" ersetzt.

20.3 Der Laplacesche Entwicklungssatz

Definition 20.3.1 : Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper, $A \in M(n\times n, K)$ und seien $j,k \in \underline{n}$ fest. Dann bezeichnen wir mit A'_{jk} die Matrix, die aus A durch Streichen der $j-$ten Zeile und $k-$ten Spalte entsteht, also

$$A'_{jk} := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & | & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \ldots & a_{j-1,k-1} & | & a_{j-1,k+1} & \ldots & a_{j-1,n} \\ - & - & - & + & - & - & - \\ a_{j+1,1} & \ldots & a_{j+1,k-1} & | & a_{j+1,k+1} & \ldots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & | & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M((n-1)\times(n-1), K) \quad .$$

Hilfssatz 20.3.2 : Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper. Seien $j,k \in \underline{n}$ fest, und die Matrix $A \in M(n\times n, K)$ habe als $j-$ten Zeilenvektor den Vektor $e_k = (\delta_{kl})_{l\in\underline{n}}$, es sei also

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \ldots & a_{j-1,k} & \ldots & a_{j-1,n} \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ a_{j+1,1} & \ldots & a_{j+1,k} & \ldots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad .$$

Dann gilt

$$\det A \quad = \quad (-1)^{j+k} \det A'_{jk} \quad .$$

Beweis : 1) Im Spezialfall $j = k = n$ hat man

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nach der Leibniz - Formel ist

$$\det A \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \quad .$$

Ist nun $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) \neq n$, so ist $a_{n\sigma(n)} = 0$. Wir müssen also nur über die $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = n$ summieren. Für diese ist

$$\sigma' \; : \; \underline{n-1} \longrightarrow \underline{n-1} \quad , \quad \sigma'(l) := \sigma(l)$$

ein Element aus S_{n-1} ,die Abbildung

$$' \; : \; \{ \; \sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n \; \} \longrightarrow S_{n-1} \quad , \quad \sigma \longmapsto \sigma'$$

ist eine Bijektion, und es gilt noch $\operatorname{sign} \sigma' = \operatorname{sign} \sigma$. Also ist

$$\begin{aligned} \det A \quad &= \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \operatorname{sign} \sigma' \cdot a_{1\sigma'(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,\sigma'(n-1)} \cdot 1 \\ &= \quad \det A'_{nn} \quad = \quad (-1)^{n+n} \det A'_{nn} \quad , \end{aligned}$$

in diesem Fall ist die Behauptung also richtig.
2) Seien nun $j, k \in \underline{n}$ beliebig. Durch $n-j$ Zeilenvertauschungen in A bringen wir die Zeile e_k nach unten, das gibt nach (D6) $n-j$ Vorzeichenwechsel. Nun bringen wir durch $n-k$ Spaltenvertauschungen die unten stehende 1 nach hinten, das gibt nach (D6) und Korollar 20.2.8 $n-k$ Vorzeichenwechsel. Dann können wir 1) anwenden auf die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1k} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{j-1,k} \\ & A'_{jk} & & - \\ & & & a_{j+1,k} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{nk} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

und erhalten insgesamt :

$$\det A \quad = \quad (-1)^{n-j} \cdot (-1)^{n-k} \det A'_{jk} \quad = \quad (-1)^{j+k} \det A'_{jk} \, . \qquad \square$$

Satz 20.3.3 (Laplacescher Entwicklungssatz) : Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt für feste $j, k, l \in \underline{n}$:

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{sl} \cdot (-1)^{s+j} \det A'_{sj} \quad = \quad \delta_{lj} \cdot \det A \, ,$$

für $l = j$ nennt man diese Formel die "Entwicklung von $\det A$ nach der $j-$ten Spalte", und

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{n} a_{ls} \cdot (-1)^{k+s} \det A'_{ks} \quad = \quad \delta_{lk} \cdot \det A \,,$$

für $l = k$ heißt das "Entwicklung von $\det A$ nach der $k-$ten Zeile ".

<u>Beweis :</u> (2) Für die $k-$te Zeile a_k von A gilt

$$a_k = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\, e_s \quad \text{mit den Zeilenvektoren} \quad e_s = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ s-\text{te Stelle}}}{1} 0, \ldots, 0) \quad ,$$

${}^t e_s \in K^n$. Nach (D1) ist det linear als Funktion der $k-$ten Zeile, also

$$(*) \qquad \det A \quad = \quad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ \sum\limits_{s=1}^{n} a_{ks}\, e_s \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} a_{ks} \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ e_s \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{= (-1)^{k+s} \det A'_{ks}}$$

nach Hilfssatz 20.3.2. Für $l = k$ haben wir damit (2) bewiesen. Für $l \neq k$ betrachten wir statt A die Matrix B, die aus A entsteht, wenn man die $k-$te Zeile durch die $l-$te Zeile ersetzt. B hat dann zwei gleiche Zeilen, also gilt nach (D2) :

$$\det B \quad = \quad 0 \quad .$$

Entwickeln wir nun B nach der $k-$ten Zeile, so erhalten wir nach $(*)$:

$$0 \quad = \quad \sum_{s=1}^{n} a_{ls}\, (-1)^{k+s} \, \det A'_{ks} \quad ;$$

wegen $\delta_{lk} = 0$ also (2) in diesem Fall.

(1) folgt nach Kor. 20.2.7 durch Vertauschen von Zeilen und Spalten aus (2). $\square$

Es mag merkwürdig erscheinen, den Laplaceschen Entwicklungssatz auch hinzuschreiben für $l \neq j$ bzw. $l \neq k$. Man erhält damit aber sofort den

<u>Satz 20.3.4 :</u> Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$. Sei $\det A \neq 0$, dann besitzt A die inverse Matrix

$$A^{-1} = (c_{kj})_{(k,j) \in \underline{n} \times \underline{n}} \quad \text{mit} \quad c_{kj} := (\det A)^{-1} \cdot (-1)^{k+j} \det A'_{jk} \quad .$$

<u>Beweis :</u> Mit den so definierten c_{kj} gilt nach den Formeln (1) und (2) im Laplaceschen Entwicklungssatz für $j, k, l \in \underline{n}$:

$$(1) \quad \sum_{s=1}^{n} c_{js} a_{sl} = \delta_{jl} \quad , \qquad (2) \quad \sum_{s=1}^{n} a_{ls} c_{sk} = \delta_{lk} \quad , \qquad \text{also}$$

$$C \cdot A \quad = \quad E_n \qquad , \qquad A \cdot C \quad = \quad E_n \quad ,$$

also $C \;=\; A^{-1}$. □

<u>**(20.3.5) Bemerkungen :**</u> 1) Man beachte die Indexvertauschung:

$$c_{kj} \quad = \quad \frac{(-1)^{k+j}}{\det A} \det A'_{jk} \quad .$$

2) Zur numerischen Berechnung von A^{-1} ist Satz 20.3.4 für $n \geq 3$ ungeeignet, da man n^2 Determinanten ausrechnen muss. Das als Anwendung 19.6.3 angegebene Verfahren geht schneller. Aber für theoretische Zwecke ist es gut, dass man überhaupt eine Formel zur Berechnung von A^{-1} hat.
3) Für

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, K) \quad \text{mit} \quad \det A \,=\, ad-bc \neq 0 \quad \text{erhält man}$$

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad .$$

□

<u>**Satz 20.3.6 (Determinanten-Multiplikationssatz) :**</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Dann gilt

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \det A \,\cdot\, \det B$$

<u>**Beweis :**</u> Sei $A \,=\, (a_{lk})_{(l,k)\in \underline{n}\times\underline{n}}$, $B \,=\, (b_{kj})_{(k,j)\in \underline{n}\times\underline{n}}$, dann ist

$$A \cdot B \quad = \quad (c_{lj}) \quad \text{mit} \quad c_{lj} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kj} \, ,$$

$A \cdot B$ hat also die Zeilenvektoren

$$c_l \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, b_k \, ,$$

wobei $b_k \,=\, (b_{k1}, \ldots, b_{kn})$ der $k-$te Zeilenvektor von B ist. Also gilt

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \sum\limits_{k_1=1}^{n} a_{1k_1}\, b_{k_1} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k_n=1}^{n} a_{nk_n}\, b_{k_n} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(D1)}{=} \quad \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{pmatrix} \quad .$$

Wir summieren also über alle $n-$tupel $k \,:=\, (k_1, \ldots, k_n) \in \underline{n}^n$:

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \sum_{k\in \underline{n}^n} a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{pmatrix} \quad .$$

Da det alternierend ist , also wegen (D2) , ist

$$\det \begin{pmatrix} b_{k_1} \\ \vdots \\ b_{k_n} \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \quad , \quad \text{falls es} \quad r, s \in \underline{n} \ \text{ mit } \ r \neq s \ \text{ und } \ k_r = k_s \ \text{ gibt,}$$

wir müssen also nur über die $n-$tupel summieren, für die

$$\sigma \ : \ \underline{n} \ \longrightarrow \ \underline{n} \quad , \quad \sigma(r) := k_r \quad \text{bijektiv ist :}$$

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \det \begin{pmatrix} b_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ b_{\sigma(n)} \end{pmatrix} \quad ,$$

also nach Korollar 20.2.4 :

$$\det(A \cdot B) \quad = \quad \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)}_{\det A} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\det B} \quad ,$$

wobei wir hier für $\det A$ die Leibniz-Formel verwendet haben. □

Folgerung 20.3.7 : Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist.
Beweis : 1) Sei $\det A \neq 0$, dann existiert

$$A^{-1} \ = \ \frac{1}{\det A} \left((-1)^{k+j} \det A'_{jk} \right)_{(k,j) \in \underline{n} \times \underline{n}}$$

nach Satz 20.3.4.
2) Ist A invertierbar, so existiert $A^{-1} \in M(n \times n, K)$ mit

$$A \cdot A^{-1} \ = \ E_n \quad , \quad \text{also nach Satz 20.3.6 :}$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} \ = \ \det E_n \overset{\text{(D3)}}{=} 1 \quad , \quad \text{also } \det A \neq 0 \quad .$$

Satz 20.3.8 : Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper. Die Determinante

$$\det \ : \ M(n \times n, K) \ \longrightarrow \ K$$

hat noch die Eigenschaften:
(D8) Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \quad ,$$

so ist $\det A \ = \ \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

(D9) Sei $A \in M(n \times n, K)$, $n \geq 2$, von der Form

$$A = \begin{pmatrix} B & | & C \\ - & + & - \\ 0 & | & D \end{pmatrix} \quad , \quad \text{wobei } B \text{ und } D \text{ quadratisch sind, so gilt}$$

$$\det A = \det B \cdot \det D \quad .$$

Beweis : (D9) Sei $B \in M(r \times r, K)$, $D \in M((n-r) \times (n-r), K)$, mit $1 \leq r < n$, dann haben wir

$$A = \begin{pmatrix} B & | & C \\ - & + & - \\ 0 & | & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & | & C \\ - & + & - \\ 0 & | & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & E_{n-r} \end{pmatrix} \quad ,$$

wie man mit der Definition des Matrizenprodukts nachrechnet, also mit

$$D' := \begin{pmatrix} E_r & | & C \\ - & + & - \\ 0 & | & D \end{pmatrix} \quad , \quad B' := \begin{pmatrix} B & | & 0 \\ - & + & - \\ 0 & | & E_{n-r} \end{pmatrix} :$$

$$\det A = \det D' \cdot \det B'$$

nach dem Determinanten-Multiplikationssatz 20.3.6 . Entwickelt man

det D' nacheinander nach der 1. bis $r-$ten Spalte und

det B' nacheinander nach der $n-$ten bis $(r+1)-$ten Spalte,

so erhält man:

$$\det D' = \det D \quad , \quad \det B' = \det B \quad , \quad \text{also die Beh.}$$

(D8) folgt aus (D9) durch Induktion nach n : Für $n = 1$ gilt

$$\det A = \det(\lambda_1) = \lambda_1 \quad \text{nach der Leibniz-Formel,}$$

und wenn (D8) für $n - 1 \in \mathbb{N}$ richtig ist , folgt nach (D9) :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & | & \\ & \ddots & & | & * \\ 0 & & \lambda_{n-1} & | & \\ - & - & - & + & - \\ & 0 & & | & \lambda_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \det(\lambda_n)$$

$$= \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n \quad . \qquad \square$$

20.4 Determinante eines Endomorphismus

Bemerkung 20.4.1 : Sei V ein $K-$Vektorraum mit $\dim_K V = n$, $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, und

$$F \in \mathrm{End}_K V = \mathrm{Hom}_K(V, V) \quad ,$$

also nach Definition 19.3.8 : F ein Endomorphismus von V . Sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V , dann ist

$$A := M^{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{A}}(F) \in M(n \times n, K)$$

nach Formel (19.4.3) definiert. Bezüglich einer anderen Basis $\mathfrak{B}$ von V haben wir

$$B \quad := \quad M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(F) \in M(n \times n, K) \quad ,$$

und nach der Formel (19.4.17) für die Koordinatentransformation haben wir

$$B \quad = \quad S \cdot A \cdot S^{-1}$$

mit $S = M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{GL}(n,K)$, also nach dem Determinanten - Multiplikationssatz 20.3.6 :

$$\begin{aligned} \det B &= \det S \cdot \det A \cdot \det(S^{-1}) \\ &= \det S \cdot \det S^{-1} \cdot \det A = \det(S \cdot S^{-1}) \cdot \det A \\ &= \det E_n \cdot \det A = \det A, \end{aligned}$$

die Determinante $\det M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F)$ ist also unabhängig davon, welche Basis $\mathfrak{A}$ von V wir nehmen, und wir können

$$(20.4.2) \qquad \det F \quad := \quad \det M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F)$$

setzen, wobei es egal ist, welche Basis $\mathfrak{A}$ von V wir wählen. □

Folgerung 20.4.3 : Sei V ein $n-$dimensionaler $K-$Vektorraum, K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, dann sind für einen Endomorphismus $F : V \longrightarrow V$ die folgenden Eigenschaften gleichbedeutend :

(i) F ist ein **Automorphismus**, d.h. F ist bijektiver Endomorphismus.

(ii) $\det F \neq 0$.

Beweis : Sei $\mathfrak{A}$ eine Basis von V , dann gilt:

$$\begin{aligned} & F \text{ ist Automorphismus von } V \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists\, G \in \mathrm{End}(V) : \; G \circ F = F \circ G = \mathrm{id}_V \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists\, G \in \mathrm{End}(V) : \; M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(G) \cdot M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F) = M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F) \cdot M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(G) = E_n \\ \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad & M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F) \in \mathrm{GL}(n,K) \\ \overset{(20.3.7)}{\Longleftrightarrow} \quad & \det M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F) \neq 0 \\ \overset{(20.4.2)}{\Longleftrightarrow} \quad & \det F \neq 0 \quad . \end{aligned}$$

Bei $(*)$, "$\Longleftarrow$ " benutzen wir, dass

$$M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}} : \mathrm{End}_K(V) \longrightarrow M(n \times n, K)$$

ein Vektorraumisomorphismus ist, zu $B := (M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(F))^{-1}$ hat man also ein $G \in \mathrm{End}_K(V)$ mit

$$M_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{A}}(G) = B \quad .$$

□

Empfehlenswerte Literatur

zur Analysis :

KONRAD KÖNIGSBERGER: Analysis 1, 6.Auflage. Springer-Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin 2003.

OTTO FORSTER : Analysis 1, 6., verbesserte Auflage. Vieweg Taschenbuch, Braunschweig 2001.

HARRO HEUSER : Lehrbuch der Analysis, Teil 1. B.G.Teubner, Stuttgart 1990.

zur Linearen Algebra :

GERD FISCHER : Lineare Algebra, 12.Auflage. Vieweg 2000.

K.JÄNICH : Lineare Algebra. J.Springer 1979 .

FALKO LORENZ : Lineare Algebra I, 3.Auflage. B.I.Wissenschaftsverlag 1991.

U.STAMMBACH : Lineare Algebra. Teubner Studienskripten 1983.

H.-J.KOWALSKY, G.O.MICHLER : Lineare Algebra. 11.,überarbeitete Auflage. De Gruyter Lehrbuch, Berlin 1998.

zur Analysis und Linearen Algebra :

K.MEYBERG, P.VACHENAUER : Höhere Mathematik I. Springer Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin 1990.

Inhalt der "Mathematik I für Studierende der Physik":

K : K.KÖNIGSBERGER , Analysis 1, 6.Auflage.

S : Skript zur Vorlesung, E.BÖNECKE , Hamburg 2006.