# § 32 EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ

**(32.7) Existenzsatz von Picard-Lindelöf :** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(a, c) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung

$$\varphi : [a - \varepsilon; a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{der DGl} \quad y' = f(x, y) \quad ,$$

die die " Anfangsbedingung" $\varphi(a) = c$ erfüllt.

**Beweis :** a) Zu $(a, c)$ hat man eine offene Umgebung $V_1 \subset G$, in der $f$ eine Lipschitz-Bedingung, mit einer Lipschitz-Konstanten $L$, erfüllt, und zu $V_1$ und $(a, c)$ hat man, da $V_1$ offen ist, ein $r > 0$, so dass

$$V := \{ \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ | \ |x - a| \leq r \wedge \|y - c\| \leq r \ \}$$

in $V_1$ enthalten ist. Da $V$ kompakt und $f$ stetig ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\|f(x, y)\| \leq M \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in V \quad .$$

Wir setzen $\varepsilon := \min\{r \, , \, \frac{r}{M}\}$ und $I := [a - \varepsilon; a + \varepsilon]$.

b) Eine stetige Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lössung der DGl

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad \varphi(a) = c \quad , \quad \text{wenn}$$

$$(*) \qquad \varphi(x) = c + \int_a^x f(t, \varphi(t)) \, \mathrm{d}\, t$$

ist, nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Wir suchen also eine Lösung von $(*)$ und machen das mit dem "Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahren": Wir definieren eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen

$$\varphi_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{durch} \quad \varphi_0(x) := c \quad \text{für alle} \quad x \in I \quad ,$$

$$(**) \qquad \varphi_{k+1}(x) := c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t)) \, \mathrm{d}\, t \quad .$$

Wir zeigen, dass $f(t, \varphi_k(t))$ und damit $\varphi_{k+1}(x)$ definiert ist, und dass die Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegen eine Lösung $\varphi$ von $(*)$ konvergiert:

c) Um zu zeigen, dass $f(t, \varphi_k(t))$ definiert ist, genügt es, wegen $|a - x| \leq \varepsilon \leq r$ und wegen $V \subset G$, zu zeigen, dass

$$\|\varphi_k(x) - c\| \leq r \quad \text{für alle} \quad x \in I \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

ist. Für $k = 0$ gilt das wegen $\varphi_0(x) = c$. Für $k$ sei die Aussage richtig, dann folgt

$$\|\varphi_{k+1}(x) - c\| \leq \left| \int_a^x \|f(t, \varphi_k(t))\| \, \mathrm{d}\, t \right| \leq M \cdot |x - a| \leq M \cdot \varepsilon \leq r \quad .$$

d) Wir zeigen nun mit Induktion nach $k$, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\forall\, x \in I\, : \qquad \|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \quad \leq \quad M\, L^k\, \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad :$$

Induktionsanfang: Für $k = 0$ haben wir

$$\|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\| \quad = \quad \| \int\limits_a^x f(t,c)\,\mathrm{d}\,t\| \ \leq\ M \cdot |x-a| \quad .$$

Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}^*$, und für $k-1$ sei die Behauptung richtig. Dann folgt für $k$ :

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\| \quad = \quad \| \int\limits_a^x (f(t,\varphi_k(t)) - f(t,\varphi_{k-1}(t)))\,\mathrm{d}\,t\|$$

$$\leq \quad \left| \int\limits_a^x L\, \|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\|\,\mathrm{d}\,t \right|$$

$$\leq \quad L \cdot M \cdot L^{k-1} \cdot \frac{1}{k!} \left| \int\limits_a^x |t-a|^k\,\mathrm{d}\,t \right| \quad = \quad M\, L^k\, \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad .$$

e) Für die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1})$ gilt nach d) :

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|_I \quad \leq \quad M \cdot L^{k-1} \cdot \frac{\varepsilon^k}{k!} \quad ,$$

und wegen der Konvergenz von $M \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{L^{k-1}\varepsilon^k}{k!}$ konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\varphi_k - \varphi_{k-1})$ normal, also gleichmäßig, auf $I$ . Da die $\varphi_k$ stetig sind, ist auch die Grenzfunktion

$$\varphi \ :=\ \lim_{k\to\infty} \varphi_k \ =\ \lim_{k\to\infty} \left( \sum_{j=1}^{k} (\varphi_j - \varphi_{j-1}) + \varphi_0 \right) \ =\ \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \varphi_{j-1})$$

eine stetige Funktion $\varphi\, :\ I \ \longrightarrow\ \mathbb{R}^n$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in I$ gilt

$$\|f(x,\varphi(x)) - f(x,\varphi_k(x))\| \quad \leq \quad L \cdot \|\varphi(x) - \varphi_k(x)\| \quad ,$$

also konvergiert auch die Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\psi_k(x) \ :=\ f(x,\varphi_k(x))$ , gleichmäßig gegen $f(x,\varphi(x))$. Man kann daher in $(**)$ den $\lim\limits_{k\to\infty}$ mit dem Integral vertauschen und erhält

$$\varphi(x) \quad = \quad c + \int\limits_a^x f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}\,t \quad .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\varphi$ sogar differenzierbar, also eine Lösung von $(*)$. $\square$

# § 38 IMPLIZITE FUNKTIONEN

**(38.4) Satz über implizite Funktionen:** Seien $k, m \in \mathbb{N}^*$, $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und

$$F : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad , \quad (x,y) \longmapsto F(x,y) \quad ,$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ ein Punkt mit

$$F(a,b) = 0 \quad , \quad \text{und die Matrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) := \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}(a,b) = \left(\frac{\partial F_l}{\partial y_j}\right)(a,b) \in M(m \times m, \mathbb{R})$$

sei invertierbar. Dann gibt es offene Mengen

$$V_1 \subset U_1 \quad \text{mit} \quad a \in V_1 \quad \text{und}$$

$$V_2 \subset U_2 \quad \text{mit} \quad b \in V_2$$

und eine differenzierbare Funktion

$$g : V_1 \longrightarrow V_2 \quad \text{mit} \quad g(a) = b \quad , \quad \text{so dass}$$

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in V_1 \quad \text{gilt.}$$

Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x,y) = 0$, so folgt $y = g(x)$.

**Beweis :** a) Zur Vereinfachung der Schreibweise können wir annehmen, dass $(a,b) = (0,0)$ ist. Wir setzen

$$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in GL(m, \mathbb{R}) \quad ,$$

und definieren die Abbildung $G : U_1 \times U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch

(1) $\quad G(x,y) := y - B^{-1} \cdot F(x,y)$ . Dann ist

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = E_m - B^{-1} \cdot \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \quad ,$$

wobei $E_m$ die Einheitsmatrix aus $GL(m, \mathbb{R})$ ist. Also ist

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = 0 \quad .$$

Alle Komponenten der Matrix $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)$ sind stetige Funktionen, also gibt es Umgebungen $W_1 \subset U_1$ von $0 \in \mathbb{R}^k$ und $W_2 \subset U_2$ von $0 \in \mathbb{R}^m$, so dass

(2) $\quad \left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) \right\| \le \frac{1}{2} \quad$ für $\quad (x,y) \in W_1 \times W_2 \quad$ ist.

(Die Norm ist die Norm der linearen Abbildung $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.)

Wir wählen ein $r > 0$, so dass

$$V_2 := \{ \, y \in \mathbb{R}^m \mid \|y\| < r \, \} \subset W_2$$

ist. Wegen $G(0,0) = 0$ gibt es eine offene Menge $V_1 \subset W_1$ mit $0 \in V_1$, so dass

(3) $\quad \varepsilon := \sup\{ \, \|G(x,0)\| \mid x \in V_1 \, \} < \frac{r}{2}$

ist. Aus der Definition (1) von $G$ folgt noch

$$F(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(x,y) = y \quad .$$

b) wir zeigen jetzt, dass es zu jedem $x \in V_1$ höchstens ein $y \in V_2$ gibt mit $F(x,y) = 0$, d.h. $G(x,y) = y$ : Seien $y_1, y_2$ Lösungen von $G(x,y) = y$, dann ist

$$y_1 - y_2 = G(x,y_1) - G(x,y_2) \quad ,$$

und wegen (2) folgt mit dem Mittelwertsatz 26.17 (F 70) :

$$\|y_1 - y_2\| \le \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\| \quad , \quad \text{und damit} \quad y_1 = y_2 \quad .$$

c) Wir zeigen jetzt, dass es eine stetige Funktion

$$g : V_1 \longrightarrow V_2 \quad \text{gibt mit} \quad F(x, g(x)) = 0 \quad , \quad \text{d.h.}$$

$$g(x) = G(x, g(x)) \quad \text{für alle} \quad x \in V_1 \quad ,$$

nach b) ist diese Funktion dann eindeutig bestimmt: Wir setzen

$$g_0(x) := 0 \quad \text{für alle} \quad x \in V_1$$

und definieren rekursiv Abbildungen $g_l : V_1 \longrightarrow V_2$ durch

(4) $\qquad g_{l+1}(x) \quad := \quad G(x, g_l(x)) \quad \text{für} \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad .$

Es ist $g_1(x) = G(x,0)$, also wegen (3) :

$$\|g_1\|_{V_1} := \sup\{ \; g_1(x) \mid x \in V_1 \; \} \quad = \quad \varepsilon \quad .$$

Mit Induktion nach $l$ zeigen wir

(5) $\qquad \|g_{l+1} - g_l\|_{V_1} \le \frac{1}{2^l}\varepsilon \quad \text{für} \quad l \in \mathbb{N}_0 \quad ,$

daraus folgt dann für $N \in \mathbb{N}^*$ wegen $g_N = \sum\limits_{l=0}^{N-1} (g_{l+1} - g_l)$ :

$$\|g_N\|_{V_1} \le \sum_{l=0}^{N-l} \frac{1}{2^k}\,\varepsilon \le 2\,\varepsilon < r \quad ,$$

also $g_N(V_1) \subset V_2$, so dass $g_l$ tatsächlich eine Abbildung von $V_1$ **in $\mathbf{V_2}$** ist und damit die Definition (4) sinnvoll.
Beweis von (5) : Für $l = 0$ haben wir (5) schon gezeigt. Sei $l \in \mathbb{N}^*$ und (5) sei richtig für $l-1$. Aus

$$g_{l+1}(x) - g_l(x) = G(x, g_l(x)) - G(x, g_{l-1}(x))$$

folgt mit dem Mittelwertsatz und (2) :

$$\|g_{l+1} - g_l\|_{V_1} \le \frac{1}{2}\|g_l - g_{l-1}\|_{V_1} \quad ,$$

und damit (5) auch für $l$ . $\quad -$

Da $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l}\,\varepsilon$ konvergiert, konvergiert auch $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \|g_{l+1} - g_l\|_{V_1}$ , und nach dem Weierstraß-Kriterium 7.3.9 konvergiert die Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} (g_{l+1} - g_l)$$

gleichmäßig, und die Grenzfunktion

$$g := \lim_{N\to\infty} \sum_{l=0}^{N} (g_{l+1} - g_l) = \lim_{N\to\infty} g_N$$

ist eine stetige Abbildung $g : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , da die $g_l$ stetig sind, mit

$$\|g\|_{V_1} \leq 2\varepsilon < r \quad , \quad \text{d.h.} \quad g(V_1) \subset V_2 \quad .$$

Aus (4) folgt durch Limesbildung

$$g(x) = G(x, g(x)) \quad \text{für alle} \quad x \in V_1 \quad , \quad \text{d.h.}$$

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in V_1 \quad .$$

d) Wir zeigen nun, dass $g$ differenzierbar ist, im Nullpunkt $0 \in V_1 \subset \mathbb{R}^k$ (für die anderen Punkte geht das analog): Wir setzen

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \in M(m \times k, \mathbb{R}) \quad , \quad \text{und wir hatten schon}$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in GL(m, \mathbb{R}) \quad .$$

Da $F$ in $(0,0)$ differenzierbar ist, gilt

$$F(x,y) = A \cdot x + B \cdot y + \varphi(x,y) \quad \text{mit} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \quad .$$

Für alle $x \in V_1$ gilt $F(x, g(x)) = 0$, also

(6) $\quad g(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, g(x)) \quad .$

Um zu zeigen, dass $g$ in $0$ differenzierbar ist, müssen wir also nur zeigen:

(7) $\quad$ Für $\psi(x) := -B^{-1}\,\varphi(x, g(x))$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\psi(x)}{\|x\|} = 0 \quad .$

Dazu zeigen wir zunächst:

(8) Es gibt eine Umgebung $V_1' \subset V_1$ von $0$ und eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\|g(x)\| \leq K\|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in V_1 \quad \text{ist.}$$

Beweis von (8) : Wir setzen

$$c_1 := \|B^{-1} \cdot A\| \quad , \quad c_2 := \|B^{-1}\| \quad .$$

Wegen $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$ gibt es zu $\varepsilon := \dfrac{1}{2c_2}$ eine Umgebung $V' \subset V_1 \times V_2$ von $(0,0)$ , so dass

$$\|\varphi(x,y)\| \le \varepsilon \|(x,y)\| \le \frac{1}{2c_2}(\|x\| + \|y\|)$$

für alle $(x,y) \in V'$ ist. Da $g$ stetig ist, gibt es eine Umgebung $V_1' \subset V_1$ von $0$, so dass der Graph von $g|_{V_1'}$ ganz in $V'$ enthalten ist. Dann gilt für alle $x \in V_1'$ :

$$\|\varphi(x,g(x))\| \le \frac{1}{2c_2}(\|x\| + \|g(x)\|)$$

und (6) liefert nun

$$\|g(x)\| \le c_1\|x\| + c_2\|\varphi(x,g(x))\| \le (c_1 + \frac{1}{2})\|x\| + \frac{1}{2}\|g(x)\|,$$

also $\|g(x)\| \le (2c_1+1)\|x\| = K\|x\|$ mit $K := 2c_1 + 1$. Damit ist (8) bewiesen. –

Wir zeigen nun (7) : Aus

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

folgt: Zu jedem $\eta' > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $\|(x,y)\| < \delta$ gilt:

$$\frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|(x,y)\|} < \eta' \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad \text{bzw.} \quad \|\varphi(x,y)\| < \eta' \|(x,y)\| \quad .$$

Sei $\eta > 0$ gegeben, dann nehmen wir $\eta' := \dfrac{\eta}{c_2\sqrt{1+K^2}}$.

Ist dann $\|x\| < \dfrac{\delta}{\sqrt{1+K^2}}$, so gilt nach (8)

$$\|(x,g(x))\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|g(x)\|^2} \le \sqrt{1+K^2}\,\|x\| < \delta$$

und damit

$$\|\varphi(x,g(x))\| < \eta'\,\|(x,g(x))\| \le \frac{\eta}{c_2}\,\|x\| \quad , \quad \text{also}$$

$$\|\psi(x)\| = c_2\|\varphi(x,g(x))\| < \eta\|x\| \quad , \quad \text{also}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x)}{\|x\|} = 0 \quad .$$

□

<u>**(38.6) Zusatz :**</u> Für die nach Satz 38.4 existierende Funktion $g$ mit $F(x,g(x)) = 0$ gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,g(x)) \quad ,$$

und da $F$ **stetig** differenzierbar ist, folgt aus dieser Formel, dass $g : V_1 \longrightarrow V_2$ sogar **stetig** differenzierbar ist.

<u>**Beweis :**</u> Siehe (F 90) . □

**Bemerkung 38.10 :** Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt ein Satz, mit dem man "lokale Extrema mit Nebenbedingungen" berechnen kann. FORSTER holt dazu weit aus und definiert Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Das müssen wir im nächsten Semester zwar ohnehin machen, aber wir beschränken uns zunächst mal auf **eine** Nebenbedingung, dann wird die Theorie einfacher. Man findet das in älteren Auflagen von FORSTER, Analysis 2:

**Satz 38.11 :** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, und

$$M := \{ x \in U \mid f(x) = 0 \} \quad .$$

Sei $a \in M$ ein Punkt mit $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Sei $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die im Punkt $a$ ein lokales Maximum [Minimum] unter der **Nebenbedingung** $f = 0$ besitzt, d.h. es gebe eine Umgebung $V \subset U$ von $a$ mit

$$h(a) \geq h(x) \qquad [\text{ bzw. } h(a) \leq h(x) \ ] \qquad \text{für alle} \quad x \in M \cap V \quad .$$

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\operatorname{grad} h(a) = \lambda \operatorname{grad} f(a) \quad \text{ist.}$$

Man nennt $\lambda$ einen **Lagrangeschen Multiplikator** .

**Beweis :** Wegen $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$ können wir (evtl. durch Umnumerierung der Koordinaten) erreichen :

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0 \quad .$$

Wir setzen $a =: (a', a_n)$ mit $a' := (a_1, \ldots, a_{n-1})$ . Nach Satz 38.4 und 38.6 gibt es eine offene Umgebung $V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von $a'$, eine offene Umgebung $V'' \subset \mathbb{R}$ von $a_n$ mit $V' \times V'' \subset U$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : V' \longrightarrow V'' \quad , \quad \text{so dass}$$

$$M \cap (V' \times V'') = \{ x \in V' \times V'' \mid x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \}$$

ist, d.h. wir können die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0$ nach $x_n$ auflösen. Für $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V'$ gilt also

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$$

und Anwendung der Kettenregel ergibt

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\, \frac{\partial g}{\partial x_j}(a') \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n-1 \quad .$$

Sei nun

$$H : V' \longrightarrow \mathbb{R}\, , \; H(x_1, \ldots, x_{n-1}) := h(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) \quad .$$

Da $h$ auf $M$ im Punkt $a$ ein lokales Extremum besitzt, besitzt $H$ auf $V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ im Punkt $a'$ ein lokales Extremum, es gilt also nach Satz 27.5 (F 78) :

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}(a') = 0 \quad \text{für} \quad j \in \underline{n-1} \quad . \quad \text{Nun ist}$$

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial x_j}(a') = \frac{\partial h}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}(a') \quad .$$

Definieren wir

$$\lambda := \frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^{-1} \quad , \quad \text{so folgt aus (1) und (2) :}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{für} \quad j \in \underline{n-1} \quad , \quad \text{und für} \quad j = n \quad \text{sowieso,}$$

also $\operatorname{grad} h(a) = \lambda \operatorname{grad} f(a)$ . □

## Für die Vorlesung verwendete Literatur

K : KONRAD KÖNIGSBERGER : Analysis 1 , 6.Auflage. Springer-Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin 2003,

F : OTTO FORSTER: Analysis 2, 7.Auflage. Vieweg studium - Grundkurs Mathematik, Wiesbaden 2006,

**außerdem dieses Skript** :

S : ERNST BÖNECKE : Skript zur Analysis II. Hamburg 2008.

## Inhalt der "Analysis II"