Für die Vorlesung verwendete Literatur

K : KONRAD KÖNIGSBERGER : Analysis 1 , 6.Auflage. Springer-Lehrbuch, J.Springer Verlag, Berlin 2003,

außerdem dieses Skript :

S : ERNST BÖNECKE : Skript zur Analysis I. Hamburg 2007.

Inhalt der "Analysis I"

§	Überschrift	nachzulesen in
1	Grundbegriffe	S 1 - 12 , K 1 - 5
2	Die reellen Zahlen	K 7 - 17 , S 12 - 18
3	Die komplexen Zahlen	K 20 - 26
5	Folgen, Grenzwerte	K 41- 55
6	Reihen	K 59 - 77 , S 19 - 24
7	Stetige Funktionen	K 80 - 89 , S 24 -31 ,
		K 32 - 36 , K 300 - 303
8	Die Exponentialfunktion	K 103 - 122
9	Differentialrechnung	K 137 - 167 , S 31 - 34
10	Integralrechnung (Anfang)	K 191 - 192

ANALYSIS II

§11 Integralrechnung

11.5 Integration rationaler Funktionen

(11.5.5) 1.Schritt zur Partialbruchzerlegung : Sei

$$R(z) \quad = \quad \frac{f(z)}{g(z)}$$

eine rationale komplexe Funktion, also $f, g \; : \; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ Polynomfunktionen, $g \neq 0$. Dann dividieren wir f mit Rest durch g und erhalten

$$R \quad = \quad q + \frac{r}{g}$$

mit Polynomfunktionen

$$q\,,\, r \; : \; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad (r \, = \, 0 \vee \deg r < \deg g) \quad .$$

In $\frac{r}{g}$ kürzen wir noch die gemeinsamen Teiler heraus. □

Da die Berechnung von $\int\limits_a^b q(x)\,\mathrm{d}\,x$ für $a, b \in \mathbb{R}$ für die Polynomfunktion q kein Problem ist, müssen wir nur noch

$$\int\limits_a^b \frac{r(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}\,x \quad \text{für} \quad \deg r(x) < \deg g(x) \quad \text{und teilerfremde} \quad r\,,\, g$$

berechnen. Man benutzt dabei den Fundamentalsatz der Algebra, bzw. die

Folgerung 11.5.7 : Sei $f \; : \; \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion mit $\deg f \; = \; n\,,\, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \; = \; c \cdot \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) \quad \text{und} \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad ,$$

man kann also f in Linearfaktoren zerlegen.

Beweis durch Induktion nach n :

(I) Für $n \; = \; 0$ ist $f(z) \; = \; c \neq 0$, also

$$f(z) \; = \; c \cdot \prod_{j=1}^{0} (z - \alpha_j) \quad .$$

(II) Sei $n \in \mathbb{N}^*$, und für $n - 1$ sei der Satz richtig. Dann ist

$$f(z) \; = \; c_n \cdot g(z) \quad \text{mit} \quad c_n \neq 0 \quad \text{und} \quad g(z) \; = \; z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \quad ,$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$, und g hat nach (11.5.6) eine Nullstelle, die wir α_n nennen. Division von $g(z)$ durch $z - \alpha_n$ mit Rest ergibt

$$g(z) = q(z) \cdot (z - \alpha_n) + r(z)$$

mit $r(z) = 0$ oder $\deg r(z) = 0$, also $r(z) = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Letzteres ist aber falsch, denn dann wäre

$$0 = g(\alpha_n) = q(\alpha_n) \cdot (\alpha_n - \alpha_n) + \alpha = \alpha \quad , \quad \text{Widerspruch} \quad .$$

Also ist $g(z) = q(z) \cdot (z - \alpha_n)$ mit $\deg q(z) = n - 1$, also nach Induktionsvoraussetzung:

$$q(z) = c_{n-1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (z - \alpha_j) \quad \text{mit} \quad c_{n-1} \neq 0 \quad ,$$

$$f(z) = c_n \cdot c_{n-1} \cdot \prod_{j=1}^{n} (z - \alpha_j) \quad ,$$

und mit $c := c_n \cdot c_{n-1}$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 11.5.8 : Sei nun

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

eine **reelle** Polynomfunktion, so kann man $f(x)$ i.A. nicht in **reelle** Linearfaktoren zerlegen. Sei aber $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$, eine Nullstelle von f, so gilt

$$f(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \, \alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0 \quad ,$$

$\overline{\alpha}$ ist eine, von α verschiedene, Nullstelle von f. Man kann die komplexen Linearfaktoren $x - \alpha$ und $x - \overline{\alpha}$ von $f(x)$ zusammenfassen zu

$$(x - \alpha) \cdot (x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\,\overline{\alpha} = x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\alpha \cdot x + |\alpha|^2 \quad ,$$

und das ist ein reeller, quadratischer Faktor von $f(x)$. Er hat die Form

$$x^2 + 2bx + c \quad \text{mit} \quad b, c \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b^2 - c < 0 \quad ,$$

denn er hat keine reellen Nullstellen. Fasst man nun noch gleiche lineare bzw. quadratische Faktoren zusammen, so erhält man den

(11.5.9) Satz von der Zerlegung reeller Polynome :

Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Polynomfunktion, $g \neq 0$, dann ist

$$g(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)^{k_n} \cdot Q_1(x)^{l_1} \cdot \ldots \cdot Q_m(x)^{l_m}$$

mit paarweise verschiedenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, paarweise verschiedenen Polynomen

$$Q_j(x) = x^2 + 2b_j x + c_j \quad \text{mit} \quad b_j^2 - c_j < 0$$

und $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}^*$. □

Der
(11.5.10) 2.Schritt zur Partialbruchzerlegung einer reellen rationalen Funktion

$$R(x) \;=\; \frac{f(x)}{g(x} \quad \text{mit} \quad \deg f < \deg g \quad ,$$

wobei f , g teilerfremde reelle Polynomfunktionen sind, besteht also darin, sich die Zerlegung

$$g(x) \;=\; (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)^{k_n} \cdot Q_1(x)^{l_1} \cdot \ldots Q_m^{l_m}$$

des Nenners $g(x)$ zu verschaffen, evtl. auf dem Umweg über die Bestimmung der komplexen Nullstellen von g . □

(11.5.11) Satz von der Partialbruchzerlegung :
Sei $R(x)$ eine reelle rationale Funktion,

$$R(x) \;=\; \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit} \quad \deg f < \deg g \quad , \quad f\,,\,g \quad \text{teilerfremd} \quad ,$$

und

$$g(x) \;=\; (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)^{k_n} \cdot Q_1(x)^{l_1} \cdot \ldots \cdot Q_m(x)^{l_m}$$

die in (11.5.9) angegebene Zerlegung von g, dann hat $R(x)$ eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$R(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{A_{j1}}{x-\alpha_j} + \ldots + \frac{A_{j,k_j}}{(x-\alpha_j)^{k_j}} \right) + \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{B_{s1}x + C_{s1}}{Q_s(x)} + \ldots + \frac{B_{s,l_s}x + C_{s,l_s}}{(Q_s(x))^{l_s}} \right)$$

mit $Q_s(x) \;=\; x^2 + 2b_s x + c_s$ und reellen Konstanten A_{jr}, B_{sr}, C_{sr} . Die einzelnen Summanden dieser Zerlegung heißen die **Partialbrüche** von R . □

Die Bestimmung der A_{jr}, B_{sr}, C_{sr} ist der
(11.5.12) 3.Schritt zur Partialbruchzerlegung : Man schreibt $R(x) \;=\; \dfrac{f(x)}{g(x)}$, wie in 11.5.11, als Summe von Partialbrüchen von R hin und bestimmt die unbekannten A_{jr} , B_{sr} , C_{sr} , indem man die rechte Seite durch Erweitern auf den Hauptnenner $g(x)$ bringt und im Zähler die Koeffizienten mit denen von $f(x)$ vergleicht.

(11.5.13) Beispiel : Sei $R(x) \;=\; \dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)^2}$, dann gibt es nach Satz 11.5.11 reelle Zahlen A, B, C, D, E, F mit

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)^2} \;=\; \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \quad , \quad \text{also}$$

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)^2} \;=\; \frac{Ax(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1) + (Ex+F)x^2}{x^2(x^2+1)^2} \,.$$

Koeffizientenvergleich im Zähler ergibt sechs lineare Gleichungen mit sechs Unbekannten:

$$A + C \;=\; 0 \quad , \quad B + D \;=\; 0 \quad , \quad 2A + C + E \;=\; 1 \quad ,$$

$$2B + D + F \;=\; 0 \quad , \quad A \;=\; 0 \quad , \quad B \;=\; 1 \,,$$

also $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$, $E = 1$, $F = -1$, also

$$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x-1}{(x^2+1)^2} \quad .$$

(11.5.14) 4.Schritt: Integration der Partialbrüche :

Hat man eine reelle rationale Funktion

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit Polynomfunktionen} \quad f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und $\deg f < \deg g$, f, g teilerfremd, und sucht man eine Stammfunktion von R, so muss man gemäß Satz 11.5.11 nur Stammfunktionen finden zu:

(1) $\dfrac{1}{x-\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$: Das ist $\ln|x-\alpha|$.

(2) $\dfrac{1}{(x-\alpha)^k}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k > 1$: Das ist $\dfrac{1}{1-k} \cdot \dfrac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$.

(3) $\dfrac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$ mit $b, c, B, C \in \mathbb{R}$ und $b^2 - c < 0$:

Eine Stammfunktion ist (siehe auch K 208):

$$\frac{B}{2} \ln|x^2+2bx+c| + \frac{C-Bb}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \quad .$$

(4) $\dfrac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^k}$ mit $b, c, B, C \in \mathbb{R}$, $b^2 - c < 0$ und $k > 1$:

Man zerlegt dann zunächst in

$$\frac{B}{2} \cdot \frac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^k} + (C-Bb)\frac{1}{(x^2+2bx+c)^k} \quad .$$

Eine Stammfunktion zu $\dfrac{2x+2b}{(x^2+2bx+c)^k}$ ist $\dfrac{1}{1-k} \cdot \dfrac{1}{(x^2+2bx+c)^{k-1}}$.

Im 2.Integral substituiert man $y := \dfrac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}$ und muss dann eine Stammfunktion zu $\dfrac{1}{(1+y^2)^k}$ finden. Man hat für

$$I_k := \int_0^y \frac{\mathrm{d}\,\eta}{(1+\eta^2)^k} \quad \text{die Rekursionsformel}$$

$$I_{k+1} = \frac{2k-1}{2k} I_k + \frac{y}{2k(1+y^2)^k} \quad \text{für} \quad k \geq 1 \quad , \quad I_1 = \arctan y \,,$$

Beweis als Übungsaufgabe. □

§14 Taylorreihen

14.2 Beispiele für Taylorreihen

Beispiel 14.2.4 : Für $x \in (-1;1)$ gilt

$$\arcsin x \;=\; x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

Beweis : Für $|x| < 1$ und $s := -\frac{1}{2}$ haben wir die binomische Reihe

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n \quad , \quad \text{also} \quad \text{für} \quad |t| < 1 \;:$$

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n\, t^{2n} \quad ,$$

und nach Satz 11.7.1 folgt für $|x| < 1$:

$$\arcsin x \;=\; \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n\, t^{2n}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}\,t \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ,$$

und wegen $\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \cdot \prod_{J=1}^{n} \frac{2j-1}{2j}$ folgt die Behauptung. $\square$