§6 REIHEN

6.2 Konvergenzkriterien

Wenn man im Majorantenkriterium die geometrische Reihe als Majorante nimmt, erhält man das

(6.2.18) Quotientenkriterium : Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$a_n \neq 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0 \quad \text{ist, und}$$

a) es gebe ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \theta < 1$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0 ,$$

dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

b) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, dann divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis : a) Aus $|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|$ für $n \geq n_0$ folgt mit Induktion für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$|a_{n_0+k}| \leq \theta^k |a_{n_0}| \quad , \quad \text{also}$$

$$|a_n| \leq \theta^{n-n_0} |a_{n_0}| \quad \text{für} \quad n \geq n_0 \quad ,$$

und damit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{n_0}|\,\theta^{-n_0}\,\theta^n$, also die mit $|a_{n_0}|\,\theta^{-n_0}$ multiplizierte geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \theta^n$ mit $0 < \theta < 1$, eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

b) Mit Induktion folgt für $n \geq n_0$: $|a_n| \geq |a_{n_0}| > 0$, also gilt nicht $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, die Reihe divergiert. □

(6.2.19) Beachten Sie : Zum Nachweis der Konvergenz muss man ein θ finden mit $0 < \theta < 1$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für fast alle n . Es reicht nicht : $\left|\frac{a_{n+1}}{an}\right| < 1$ für fast alle n . Ein Gegenbeispiel ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: Es ist $\left|\frac{n}{n+1}\right| < 1$, aber die Reihe divergiert.

6.3 Summen und Produkte von Reihen

(6.3.3) Umordnungssatz: Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine **absolut** konvergente Reihe von komplexen Zahlen a_n mit Wert A . Dann konvergiert jede Umordnung der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, also jede Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} \quad \text{für jede bijektive Abbildung} \quad \tau \,:\, \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

ebenfalls gegen A.
Beweis : Sei $\tau \,:\, \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv, wir müssen zeigen:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} \quad = \quad A \quad .$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\, a_k|$ konvergiert, gibt es zu ε ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |\, a_k| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ist. Daraus folgt}$$

$$\left| A - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |\, a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Da τ bijektiv ist, können wir ein $N \in \mathbb{N}_0$ so groß wählen, dass

$$\{0, 1, \ldots, n_0 - 1\} \quad \subset \quad \{\tau(0), \tau(1), \ldots, \tau(N)\}$$

ist. Dann gilt für alle $m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k \right| - \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k - A \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad .$$

$\square$

- Für nicht absolut konvergente Reihen ist der Satz falsch. Man kann sogar noch mehr zeigen:

(6.3.4) Riemannscher Umordnungssatz : Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen a_n und S eine beliebig vorgegebene reelle Zahl. Dann gib es eine bijektive Abbildung $\tau \,:\, \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} \quad = \quad S \quad ,$$

d.h. durch Umordnung kann man jede beliebige reelle Zahl als Wert erhalten.
Beweis : Wir setzen für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$a_k^+ \;:=\; \frac{1}{2}\,(|\, a_k| + a_k) \;=\; \begin{cases} a_k & \text{für } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{für } a_k < 0 \end{cases} \quad ,$$

$$a_k^- \;:=\; \frac{1}{2}\,(|\, a_k| - a_k) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } a_k \geq 0 \\ -a_k & \text{für } a_k < 0 \end{cases} \quad .$$

Die Zahlen a_k^+ , a_k^- sind alle ≥ 0, und für jedes k gilt

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \quad \text{und} \quad |\,a_k| = a_k^+ + a_k^- \quad .$$

Wäre eine der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^-$ konvergent, so würde aus den Gleichungen

$$a_k^+ = a_k + a_k^- \quad , \quad a_k^- = a_k^+ - a_k$$

folgen, dass auch die andere konvergiert. Dann wäre wegen $|\,a_k| = a_k^+ + a_k^-$ aber auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\,a_k|$ konvergent, im Widerspruch dazu, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergiert. Also sind beide Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^+$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^-$ divergent.
Streichen wir aus der Folge (a_k^+) alle Glieder, bei denen $a_k < 0$ ist (also nur Nullen, aber nicht alle), so erhalten wir die Teilfolge aller nichtnegativen Glieder von (a_k), die wir (p_k) nennen. Aus der Folge (a_k^-) streichen wir alle Nullen, so entsteht eine Folge (q_k), und $(-q_k)$ ist die Teilfolge aller negativen Glieder von (a_k). Jedes Glied von (a_k) tritt also in genau einer der Teilfolgen (p_k) bzw. (q_k) auf. Dann sind auch die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k$ divergent, also

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} p_k = \infty \,, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q_k = \infty \ \text{ und damit } \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-q_k) = -\infty \,.$$

Infolgedessen gibt es zunächst einen kleinsten Index n_0 mit

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k > S \quad ,$$

dann einen kleinsten Index n_1 mit

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) < S$$

und nun wieder einen kleinsten Index n_2 mit

$$\sum_{k=0}^{n_0} p_k + \sum_{k=0}^{n_1} (-q_k) + \sum_{k=n_0+1}^{n_2} p_k > S \quad .$$

Man kann das Verfahren fortsetzen, und die so entstehende Reihe

$$(*) \quad p_0 + \ldots + p_{n_0} + (-q_0) + \ldots + (-q_{n_1}) + p_{n_0+1} + \ldots + p_{n_2} + \ldots$$

ist eine Umordnung der Ausgangsreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Wegen der Minimaleigenschaft der Indizes $n_1, n_2, \ldots$ sieht man, dass der Betrag der Differenz zwischen S und den Teilsummen von $(*)$ spätestens ab der Teilsumme

$$p_0 + \ldots + p_{n_0} + (-q_0) + \ldots + (-q_{n_1})$$

durch die Zahlen $q_{n_1}, p_{n_2}, q_{n_3}, p_{n_4}, \ldots$ nach oben abgeschätzt werden kann. Da nun aber die Folgen $(q_{n_1}, q_{n_4}, \ldots)$ und $(p_{n_2}, p_{n_4}, \ldots)$ gegen 0 konvergieren, folgt, dass die Umordnung $(*)$ von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen S konvergiert. □

Bemerkung 6.3.5 : Hat man zwei endliche Summen komplexer Zahlen

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{m} b_k \quad ,$$

so ist klar, wie man sie multipliziert :

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_j \cdot b_k \quad ,$$

d.h. man muss jeden Summanden der ersten mit jedem Summanden der zweiten Summe multiplizieren und die Produkte addieren. Wie ist das nun für Reihen ? Mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_j \cdot b_k\right)$$

hat man die Schwierigkeit, dass man zunächst unendlich viele Grenzwerte ausrechnen und dann wieder eine Reihe bilden müsste. Bildet man aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\ \text{mit } k+j=n}} a_j \cdot b_k \right) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}\right) \quad ,$$

so hat man nur einmal eine unendliche Summe, aber trotzdem kommen alle Produkte $a_j \cdot b_k$ genau einmal vor. Diese Reihe heißt das **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$:

(6.3.6) Satz vom Cauchy-Produkt : Seien $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ **absolut** konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \ \text{ mit } \ d_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{\substack{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \\ \text{mit } j+k=n}} a_j b_k$$

absolut, und für den Wert des Cauchy-Produkts gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) \quad = \quad \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \quad .$$

Beweis : 1.) Sei $A := \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j \quad , \quad B := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \quad ,$

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ \text{mit } k+j\le n}} a_j b_k \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

dann zeigen wir zunächst

$$\lim_{n\to\infty} C_n = A \cdot B \quad .$$

Beweis: Wir bilden zunächst

$$C_n^* := \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ \text{mit } j\le n \wedge k\le n}} a_j b_k \quad ,$$

dann gilt nach der Grenzwertregel 5.2.1: $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^* = A \cdot B$, wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} (C_n^* - C_n) = 0 \quad \text{gilt: Nun ist}$$

$$C_n^* - C_n = \sum_{(j,k)\in D(n)} a_j \cdot b_k \quad \text{mit}$$

$$D(n) := \{ \ (j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \ | \ j \le n \wedge k \le n \wedge j+k > n \ \} \quad .$$

Sei nun

$$P_n := \left(\sum_{j=0}^{n} |\, a_j|\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |\, b_k|\right) = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \\ \text{mit } j\le n \wedge k\le n}} |\, a_j \cdot b_k| \,,$$

dann konvergiert $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach Regel 5.2.1, da $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren. (P_n) ist also eine Cauchyfolge; zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es deshalb ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|\, P_n - P_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0 \quad \text{gilt. Nun ist}$$

$$P_n - P_{n_0} = \sum_{(j,k)\in E(n)} |\, a_j \cdot b_k| \quad \text{mit}$$

$$E(n) := \{ \ (j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \ | \ j \le n \wedge k \le n \wedge \neg(j \le n_0 \wedge k \le n_0) \ \}$$

Für $n > 2n_0$ gilt nun $D(n) \subset E(n)$ (am besten macht man dazu eine Zeichnung). Also folgt für alle $n > 2n_0$:

$$|\, C_n^* - C_n| \le \sum_{(j,k)\in D(n)} |\, a_j \cdot b_k| \le |P_n - P_{n_0}| < \varepsilon \quad .$$

Damit haben wir bewiesen: $\lim\limits_{n\to\infty} (C_n^* - C_n) = 0$.

2.) Wir müssen noch zeigen, dass das Cauchy-Produkt absolut konvergiert. Dazu setzen wir

$$a'_n := |\, a_n| \quad , \quad b'_n := |\, b_n| \quad , \quad c'_n := \sum_{k=0}^{n} a'_{n-k} b'_k \quad .$$

Nach Voraussetzung konvergieren $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut, also konvergieren $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a'_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b'_n$, sogar absolut wegen

$$|\,a'_n| \;=\; a'_n \quad , \quad |\,b'_n| \;=\; b'_n \quad .$$

Nach Teil 1.) des Beweises konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c'_n$. Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|\,c_n| \;=\; \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |\,a_{n-k}|\,|\,b_k| \;=\; c'_n \quad ,$$

also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut nach dem Majorantenkriterium (6.2.5). $\square$

Achtung : Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht absolut konvergieren, kann es sein, dass ihr Cauchy-Produkt divergiert. Ein Beispiel finden Sie in (K74 oben).

§7 STETIGE FUNKTIONEN. GRENZWERTE

7.2 Rechnen mit stetigen Funktionen

Definition 7.2.3 : Sei $D \subset \mathbb{C}$, $D \neq \emptyset$. Sind $f, g \;:\; D \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$ stetig und ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so sind nach Regel 7.2.2 auch

$$f + g \quad \text{und} \quad \lambda f \;:\; D \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$$

stetig. Da auch die Abbildung $O \;:\; D \;\longrightarrow\; \mathbb{C}$, $O(x) \;:=\; 0$ stetig ist, bilden die stetigen Funktionen einen Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen von D in $\mathbb{C}$, also einen $\mathbb{C}-$Vektorraum, den wir mit

$\mathcal{C}(D)$ bezeichnen. ($\mathcal{C}$ wie stetig - auf Englisch.)

Ist die Menge D nicht endlich (etwa wenn D ein reelles Intervall ist), so ist

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(D) \quad = \quad \infty \quad .$$

Regel 7.2.9 : Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f \;:\; I \;\longrightarrow\; \mathbb{R} \quad \text{streng monoton, dann ist}$$

$$g \;:=\; f^{-1} \;:\; f(I) \;\longrightarrow\; I \quad \text{stetig.}$$

Bemerkung: Wenn f nicht stetig ist, ist $f(I)$ i.A. kein Intervall. Machen Sie sich Zeichnungen !

Beweis : Œ sei f streng monoton wachsend. Dann ist f injektiv, also ist $f^{-1} \;:\; f(I) \;\longrightarrow\; I$ definiert, und f^{-1} ist auch streng monoton wachsend. Sei $y_0 \in f(I)$, dann gibt es ein $x_0 \in I$ mit $y_0 \;=\; f(x_0)$. Sei

$$a \;:=\; \inf I\,,\; b \;:=\; \sup I \quad (\in \overline{\mathbb{R}})\,.$$

a) Wir behandeln zunächst den Fall

$$a < x_0 < b \quad .$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann ist

$$\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}(x_0 - a), \frac{1}{2}(b - x_0)\} > 0 \quad , \quad \text{also}$$

$$a < x_0 - \varepsilon' < x_0 < x_0 + \varepsilon' < b \quad ,$$

und wegen $(a;b) \subset I$ können wir $f(x_o \pm \varepsilon')$ bilden:

$$f(x_0 - \varepsilon') < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon') \quad .$$

Sei $\delta := \dfrac{1}{2} \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - y_0\}$, dann ist $\delta > 0$,

$$f(x_0 - \varepsilon') < y_0 - \delta < y_0 < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon') \quad .$$

Für alle $y \in f(I)$ mit $|y - y_0| < \delta$ gilt dann

$$f(x_0 - \varepsilon') < y < f(x_0 + \varepsilon') \quad , \quad \text{also}$$

$$x_0 - \varepsilon' < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon' \quad , \quad \text{also}$$

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon' \leq \varepsilon.$$

b) Ist $x_0 = a$, so wird der Beweis sogar einfacher: Zu $\varepsilon > 0$ nehme man

$$\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}(b - x_0)\} \quad \text{und}$$

$$\delta := \frac{1}{2}(f(x_0 + \varepsilon') - y_0) \quad .$$

c) Analog beweist man die Stetigkeit in $f(b)$, falls $b \in I$ ist. □

Bemerkung : Die Stetigkeit von $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist hier gar nicht vorausgesetzt.

Folgerung 7.2.10 : Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sind die Wurzelfunktionen

$$g_{2n} : [0;\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g_{2n}(x) := \sqrt[2n]{x},$$

$$g_{2n+1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g_{2n+1}(x) := \sqrt[2n+1]{x}$$

stetig, wobei man für $x \in (-\infty;0)$ setzt:

$$\sqrt[2n+1]{x} \quad := \quad -\sqrt[2n+1]{-x} \quad .$$

Das folgt mit 7.2.9 daraus, dass diese Funktionen die Umkehrfunktionen der streng monoton wachsenden Funktionen

$$f_{2n} : [0;\infty) \longrightarrow [0;\infty) \quad , \quad f_{2n}(y) := y^{2n} \quad \text{bzw.}$$

$$f_{2n+1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_{2n+1}(y) := y^{2n+1} \quad \text{sind.}$$

7.3 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

(7.3.1) Zur Motivation : Wir wissen, dass Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$$

stetig sind. Folgt daraus auch die Stetigkeit einer Potenzreihe
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{k} a_n z^n$, jedenfalls dort, wo sie konvergiert, also von

$$f : K_R(0) \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ,$$

wobei R der Konvergenzradius ist? Wir fragen allgemeiner: Kann man aus der Stetigkeit von Funktionen

$$f_k \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$$

und der Existenz von $f(z) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(z)$ für $z \in D$ schließen, dass auch f stetig ist?
Wohl nicht, ein Gegenbeispiel ist leicht zu finden:

$$f_n \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_n(x) := \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad :$$

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

existiert, ist aber nicht stetig, obwohl die f_n es sind.

Weierstraß-Kriterium 7.3.9 : Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien

$$f_k \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad D \subset \mathbb{C} \quad .$$

Wenn die Reihe der Normen der f_k bezüglich D, also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| f_k \|_D$$

konvergiert, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ auf D gleichmäßig gegen eine Funktion

$$f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C} \quad .$$

Beweis : Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$.
a) Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen (6.2.1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{R}$, so dass für $n > m \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \| f_k \|_D - \sum_{k=0}^{m} \| f_k \|_D \right| < \varepsilon , \quad \text{also} \quad \sum_{k=m+1}^{n} \| f_k \|_D < \varepsilon \quad ,$$

also für jedes $x \in D$:

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k||_D < \varepsilon \quad ,$$

also ist $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$; es existiert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad .$$

b) Für $x \in D$ gilt

$$|f(x) - s_m(x)| = |f(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - s_m(x)|$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$. Nun gibt es, da $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||f_k||_D$ eine Cauchyfolge ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{R}$, so dass für $n > m \geq N_1$ gilt

$$\forall\, x \in D \ : \ |s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} ||f_k||_D < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

und zu festem $m \geq N_1$ und festem $x \in D$ nach a) ein $n_2(x) \in \mathbb{N}_0$, $n_2(x) \geq m$, so dass für $n \geq n_2(x)$:

$|f(x) - s_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ist, also für $m \geq N_1$:

$|f(x) - s_m(x)| < \varepsilon$.

$(s_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert also gleichmäßig auf D gegen f. □

Folgerung 7.3.11 : Aus dem Weierstraß-Kriterium 7.3.9 folgt also:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{normal konvergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{gleichmäßig konvergent auf} \quad D$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{punktweise konvergent in} \quad D\,.$$

7.4 Der Zwischenwertsatz

(7.4.1) Der Zwischenwertsatz (ZWS) : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine stetige Funktion

$$f \ : \ [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

nimmt jeden Wert γ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an mindestens einer Stelle c an:

$$\exists\, c \in [a;b] \ : \ \gamma = f(c) \quad .$$

Beweis : Œist $f(a) < \gamma < f(b)$. Dann ist

$$M := \{ \ t \in [a;b] \ | \ f(t) \leq \gamma \ \}$$

nichtleer wegen $a \in M$ und nach oben beschränkt (durch b). Nach Satz 2.3.12 existiert also

$$c \quad := \quad \sup M \quad .$$

Da c die kleinste obere Schranke von M ist, gibt es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aus M mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$. Wegen $f(t_n) \leq \gamma$ gilt

$$f(c) \overset{(7.1.3)}{=} \lim_{n\to\infty} f(t_n) \overset{5.2.3}{\leq} \gamma \quad .$$

Insbesondere ist damit $c \neq b$, also $c < b$. Es gibt also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in $(c;b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Wegen

$$x_n > c = \sup M \quad \text{ist} \quad f(x_n) > \gamma \quad , \quad \text{also}$$

$$f(c) \overset{(7.1.3)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \gamma \quad , \quad \text{insgesamt also:} \quad f(c) = \gamma \quad . \qquad \square$$

Häufige Anwendungen des ZWS sind:
Beweis der Existenz von Nullstellen , z.B.:
(7.4.2) Behauptung : Jede Polynomfunktion

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0 \quad , \quad \text{ungeradem} \quad n$$

und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ besitzt eine Nullstelle: Wegen

$$P(x) \quad = \quad a_n \cdot (x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k) \quad \text{mit} \quad b_k := \frac{a_k}{a_n}$$

genügt es, zu zeigen, dass

$$f(x) \quad = \quad x^n + p(x) \quad \text{mit} \quad p(x) := \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$

eine Nullstelle besitzt. Wir setzen dazu

$$r := 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |\, b_k| \quad , \quad \text{dann gilt}$$

$$|p(\pm r)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\, b_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\, b_k| r^{n-1} = (r-1) r^{n-1} < r^n \quad ,$$

also, da n ungerade ist,

$$f(r) \geq r^n - |\, p(r)| > 0 \quad ,$$

$$f(-r) \leq -r^n + |\, p(-r)| < 0 \quad .$$

Nach Folgerung 7.2.6 ist f stetig, also hat f nach dem ZWS eine Nullstelle in $[-r; r]$. $\square$

7.5 Der Satz vom Maximum und Minimum

Wir formulieren hier eine Version des Satzes, die gegenüber Königsberger etwas vereinfacht ist. Die allgemeine Version kommt im nächsten Semester:
(7.5.1) Satz vom Maximum und Minimum : Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es $\xi_1, \xi_2 \in [a; b]$, so dass

$$\forall\, x \in [a; b] : \ f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \text{ist.}$$

Bemerkung : Der Satz sagt nicht nur, dass die Bildmenge

$$f([a; b]) \quad = \quad \{\ f(x) \ | \ x \in [a; b] \ \}$$

beschränkt ist, also dass $\sup f([a;b])$ und $\inf f([a;b])$ existieren, sondern mehr noch, nämlich dass

$$\max f([a;b]) = f(\xi_2) \quad \text{und} \quad \min f([a;b]) = f(\xi_1)$$

existieren.

Beweis von Satz 7.5.1 : Wir zeigen nur die Existenz des Maximums. Dazu setzen wir

$$s := \begin{cases} \sup f([a;b])\,, \text{ falls } f([a;b]) \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty \qquad \text{sonst ,} \end{cases}$$

und zeigen dann, dass $s = \infty$ unmöglich ist. Auf jeden Fall gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in [a;b]$ mit

$$s - \frac{1}{n} \le f(x_n) \le s \quad , \quad \text{falls} \quad s < \infty \quad ,$$

$$n \le f(x_n) \qquad , \quad \text{falls} \quad s = \infty \quad \text{ist,}$$

also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = s$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist eine Folge in $[a;b]$, also beschränkt, also gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass, 2.Fassung (5.5.8) eine konvergente Teilfolge

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*} \quad \text{von} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad . \quad \text{Sei}$$

$$\xi_2 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \quad , \quad \text{dann ist} \quad a \le \xi_2 \le b$$

und nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit (7.1.3) :

$$f(\xi_2) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = s \quad ,$$

insbesondere $s \in f([a;b])$, also nicht $s = \infty$, und für alle $x \in [a;b]$ gilt
$f(x) \le s = f(\xi_2)$. $\square$

7.7 Grenzwerte von Funktionen

Definition 7.7.1 : Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$ [oder $D \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$] . a heißt ein **Häufungspunkt** von D , wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ gibt mit

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \; a_n \in D \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \quad ,$$

d.h. wenn a (eigentlicher oder uneigentlicher) Grenzwert einer Folge von Elementen aus D ist.

(7.7.2) Beispiele : 1) Jedes $a \in D$ ist Häufungspunkt von D , denn

$$a = \lim_{n\to\infty} a \quad .$$

2) Sei $D = (a;b)$, $a < b$, dann ist b ein Häufungspunkt von D , denn

$$b = \lim_{n\to\infty} \left(b - \frac{b-a}{2n}\right) \quad , \quad \text{und} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \; b - \frac{b-a}{2n} \in D \quad .$$

3) ∞ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}_+^*$, denn

$$\infty = \lim_{n\to\infty} n \quad \text{und} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* : \; n \in \mathbb{R}_+^* \quad .$$

Definition 7.7.3 : a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D . Sei $c \in \overline{\mathbb{R}}$, und für **jede** Folge

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$,

dann schreiben wir: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = c$, und nennen c den **Grenzwert der Funktion** f für x gegen a .

b) Man kann hier auch

$D \subset \mathbb{C}$ und $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$ zulassen, dann muss

$a \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ sein.

Folgerungen 7.7.4 : a) Das Folgenkriterium (7.1.3) für Stetigkeit kann man dann so formulieren: Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $x_0 \in D$. Dann gilt

$$f \text{ stetig in } x_0 \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = f(x_0) \quad .$$

In diesem Fall braucht man das Symbol $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ also nicht.

b) Ist aber $D \subset \mathbb{C}$, $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D , der nicht in D enthalten ist, und $c \in \mathbb{C}$, so bedeutet

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = c \quad ,$$

dass die im Punkt x_0 durch c ergänzte Funktion

$$\tilde{f} \,:\, D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ c & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

in x_0 stetig ist, dass man also die Funktion f in x_0 stetig ergänzen kann.

Beispiel 7.7.5 : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\exp(x) - 1}{x} = 1$ für die durch

$$\exp \,:\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definierte Exponentialfunktion.

Beweis : $\dfrac{\exp(x) - 1}{x}$ ist für $x \neq 0$ nicht definiert, aber in

$$D := \{\ x \in \mathbb{C} \mid x \neq 0\ \} \quad ,$$

und 0 ist ein Häufungspunkt von D . Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Nach Lemma 6.4.13 (Restabschätzung) gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$|R_2(x)| \leq c\,|x|^2 \quad \text{für} \quad R_2(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{und} \quad |x| < 1$$

gilt, also

$$|\exp(x) - 1 - x| \leq c|x|^2 \quad , \quad \left|\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1\right| \leq c|x| \quad ,$$

und aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, folgt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\exp(x_n)-1}{x_n}-1\right) = 0 \quad . \qquad \square$$

Beispiel 7.7.6 : $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Beweis : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert, ∞ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $x_n > 0$ für $n > N$, also für $n > N$:

$$\exp(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} > x_n \quad , \quad \text{also auch} \quad \lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \infty \ . \qquad \square$$

- Gelegentlich braucht man auch links- bzw. rechtsseitige Grenzwerte von Funktionen :

Definition 7.7.7 : Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Ein $c \in \mathbb{C}$ heißt **linksseitiger Grenzwert von f in x_0** , geschrieben

$$c =: \lim_{x\uparrow x_0} f(x) =: f(x_0-) \quad , \quad \text{wenn}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D\cap(-\infty;x_0)}} f(x) = c \quad \text{existiert.}$$

Entsprechend nennt man

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) := f(x_0+) := \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D\cap(x_0;\infty)}} f(x)$$

den **rechtsseitigen Grenzwert von f in x_0** . $\square$

§9 DIFFERENTIALRECHNUNG

9.3 Maxima und Minima

Hilfssatz 9.3.11 : Sei $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und auf $(a;b)$ differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a;b)$ mit

$$|f(b)-f(a)| \leq (b-a)\cdot|f'(\xi)| \quad .$$

Beweis : Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$|f(b)-f(a)| = c\cdot(f(b)-f(a)) \quad \text{und} \quad |c| = 1\,,$$

nämlich

$$c := \begin{cases} \dfrac{|f(b)-f(a)|}{f(b)-f(a)} & \text{für } f(b)-f(a) \neq 0 \\ 1 & \text{für } f(b)-f(a) = 0. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\varphi(x) := \mathrm{Re}\,(c\cdot f(x)) \quad \text{für} \quad x \in [a;b] \quad .$$

φ ist in $(a;b)$ differenzierbar, es gilt

$$\varphi'(x) = \mathrm{Re}\,(c\cdot f'(x)) \quad ,$$

und nach dem Mittelwertsatz 9.3.7 gibt es ein $\xi \in (a;b)$ mit

$$\varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\cdot\varphi'(\xi) \quad , \quad \text{also}$$

$$|f(b)-f(a)| = c\cdot(f(b)-f(a)) = \varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi)$$
$$= (b-a)\cdot \operatorname{Re}(c\cdot f'(\xi)) \le (b-a)\cdot |f'(\xi)| \quad . \qquad \square$$

$$|f(b)-f(a)| = c\cdot(f(b)-f(a)) = \varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi)$$
$$= (b-a)\cdot \operatorname{Re}(c\cdot f'(\xi)) \le (b-a)\cdot |f'(\xi)| \quad . \qquad \square$$

(9.3.12) Schrankensatz : Sei $f\ :\ [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a;b]$:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|\cdot \|f'\|_{[a;b]} \quad ,$$

wobei wir $\|f'\|_{[a;b]}$ in 7.3.5 als

$$\|f'\|_{[a;b]} = \sup\left\{\ |f'(x)|\ \middle|\ x\in[a;b]\ \right\}$$

definiert hatten.
Beweis : Da f auf $[a;b]$ stetig differenzierbar ist, ist f auf $[a;b]$ beschränkt, also existiert $\|f'\|_{[a;b]}$. Der Rest folgt aus dem Hilfssatz. $\square$

9.4 Tangens und die Arcusfunktionen

Wir können mit Differentialrechnung einiges recht kurz beweisen, was wir in §8 ausgelassen hatten.

Folgerung 9.4.2 : Sei

$$D := \mathbb{R}\setminus\left\{\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\ \right\} \quad , \quad \text{dann gilt für} \quad x\in D\ :$$

1) $\tan(-x) = -\tan x \quad \wedge \quad \forall\, l\in\mathbb{Z}\ :\ \tan(x+l\pi) = \tan x \quad .$

2) $\tan'(x) = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3) $\tan\Big|_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})}\ :\ (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis : 1) $\quad \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \overset{8.6.4(2)}{=} \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad ,$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{8.7.4}{=} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x \quad ,$$

und da sin und cos die Periode 2π haben, folgt

$$\tan(x+l\pi) = \tan x \quad \text{für alle} \quad l\in\mathbb{Z} \quad .$$

2) Nach der Quotientenregel (9.2.1)c) ist

$$\tan'(x) \overset{9.2.3}{=} \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{bzw.} \quad = 1+\tan^2 x \quad .$$

3) Wegen $\tan'(x) = 1+\tan^2 x \ge 1 > 0$ ist tan nach dem Monotonie-Kriterium 9.39 streng monoton wachsend auf jedem **Intervall** , auf dem er definiert ist, insbesondere auf $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. tan ist auf $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ differenzierbar, also stetig. Es ist

(1) $$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \quad ,$$

denn sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$, $x_n \in (0;\frac{\pi}{2})$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \cos x_n = 0 \quad \text{und} \quad \cos x_n > 0\,,$$

also nach Aufgabe 25 b) : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\cos x_n} = \infty$, und nach Aufgabe 25 c) : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{\cos x_n} = \infty$. Aus $\tan(-x) = -\tan x$ für $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ folgt damit

(2) $$\lim_{x\downarrow-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty \quad .$$

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gibt es nach (1) und (2) also $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ mit

$$\tan x_1 < y < \tan x_2 \quad ,$$

und zwar $x_1 < x_2$, denn tan wächst streng monoton in $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, und nach dem Zwischenwertsatz 7.4.1 ein $x \in [x_1;x_2] \subset (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ mit

$$\tan x = y \quad .$$

Also ist $\tan\Big|_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv, und injektiv, da er streng monoton ist. $\square$

(9.4.4) Definition und Ableitungen von Arcussinus und Arcuscosinus :

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind nicht injektiv, da sie $2\pi-$periodisch sind, und nicht surjektiv wegen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \quad \text{also} \quad |\sin x|\,, |\cos x| \le 1 \quad . \quad \text{Aber}$$

$$\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1;1]$$

ist bijektiv, denn es gilt

$$\cos x > 0 \quad \text{für} \quad x \in [0;\frac{\pi}{2}) \quad \text{nach Def. von } \pi \quad \text{und}$$

$$\cos x > 0 \quad \text{für} \quad x \in (-\frac{\pi}{2};0) \quad \text{wegen} \quad \cos x = \cos(-x) \quad ,$$

wegen $\sin' = \cos$ ist nach dem Monotonie-Kriterium also sin in $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend, also injektiv, und

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \quad ,$$

also gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $y \in [-1;1]$ ein $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ mit $\sin x = y$, also ist

$$\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1;1]$$

auch surjektiv. Wir haben also die Umkehrfunktion **Arcussinus** ,

$$\arcsin := \left(\sin\Big|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : \; [-1;1] \;\longrightarrow\; [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \quad ,$$

deren Ableitung man mit der Umkehrregel (9.2.5) berechnen kann :
Für $y = \sin x$ ist

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} \quad ,$$

sofern $\cos x \neq 0$ ist, also für $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, d.h. $y \neq \pm 1$. Wegen $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ ist dann $\cos x > 0$, also

$$\cos x = {}_{+}\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2} \quad ,$$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad .$$

Nun zu cos : Wegen $\sin x > 0$ für $x \in (0;\pi)$ und $\cos' = -\sin$ ist

$$\cos\Big|_{[0;\pi]} : \; [0;\pi] \;\longrightarrow\; [-1;1]$$

streng monoton fallend und bijektiv, man hat also die Umkehrfunktion

$$\arccos := \left(\cos\Big|_{[0;\pi]}\right)^{-1} : \; [-1;1] \;\longrightarrow\; [0;\pi] \quad ,$$

für deren Ableitung man

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad x \in (-1;1) \quad \text{zeigt .}$$

(9.4.6) Veranschaulichung der Multiplikation komplexer Zahlen :

Hat man zwei komplexe Zahlen und ihre Polarkoordinaten

$$z_1 = r_1\, e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2} \quad , \quad \text{so ist}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad ,$$

d.h. man multipliziert zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert. Man sieht hier auch, dass es nichts bringt, wenn man krampfhaft versucht, "das" Argument von $z = r\, e^{i\varphi}$ etwa dadurch eindeutig zu machen, dass man fordert :

$$\varphi \in [0;2\pi) \; :$$

Für φ_1 , $\varphi_2 \in [0;2\pi)$ kann durchaus $\varphi_1 + \varphi_2 \geq 2\pi$ sein! $\square$