Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik: Blatt 8 zur Abgabe am 19.12.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+2 Punkte)
Betrachten Sie die Folge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

(a) $f_k(x) := \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}$,

(b) $f_k(x) := k e^{-k|x|} \cos(kx)$.

Zeigen Sie, dass $f_k \underset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow} \delta_0$ gilt, wobei $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die Dirac-Distribution zum Punkt 0 bezeichnet. Skizzieren Sie außerdem grob die Funktionen für $k = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2: (1+2 Punkte)
Es sei $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ die Dirac-Distribution zum Punkt 0, und $\delta_0' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta_0$ ihre Ableitung.

(a) Es sei nun L der Differentialoperator

$$L = e^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Berechnen Sie $(L\delta_0')[\varphi]$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sei

$$f_k(x) := \begin{cases} k^2 & \text{für} \quad x \in (-\frac{1}{k}, 0) \\ -k^2 & \text{für} \quad x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$f_k \underset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow} \delta_0'$$

(also, dass die Folge $(T_{f_k})_{k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ regulärer Distributionen gegen δ_0' konvergiert).

Hinweis: Wenden Sie die Distributionen auf eine Testfunktion an, und verwenden Sie für diese den Satz über die Taylorentwicklung einer (mindestens zweimal) differenzierbaren reellwertigen Funktion.

Aufgabe 3: (1+2+1+2 Punkte)
Es bezeichne $f \star g$ die Faltung zweier Elemente $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{supp}(f \star g) \subseteq \overline{\{x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in \operatorname{supp}(f),\, y \in \operatorname{supp}(g)\}}$.

Es sei nun $f = 1_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-1, 1]$ und für $k \geq 1$ sei $f^{\star k}$ die k-fache Faltung von f mit sich selbst (also $f^{\star 1} = f$, $f^{\star 2} = f \star f$ und so weiter).

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Funktion $f^{\star 2}$.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\widehat{f^{\star k}}$ von $f^{\star k}$ für $k = 2, 3$.

(d) Berechnen Sie für $k = 2, 3$ das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^k \mathrm{d}x$$

durch Anwenden der Fourier-Inversionsformel auf $f^{\star k}$ an der Stelle 0.

Aufgabe 4: (3+1 Punkte)

(a) Welche der folgenden Ausdrücke definieren Distributionen? Welche davon definieren temperierte Distributionen? (Begründen Sie!)

(i) $T[\varphi] = \sum_{n=0}^\infty \varphi(n^2)$.

(ii) $T[\varphi] = \int_{-\infty}^\infty e^{t^2} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.

(b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Berechnen Sie die Fouriertransformierten der regulären temperierten Distributionen $e^{i\alpha t}$, $\sin(\alpha t)$ und $\cos(\alpha t)$.