Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik: Blatt 6 zur Abgabe am 5.12.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+2+1 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die offene Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x,\ 1 < x + y < 2\}$.

(b) Finden Sie eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung

$$T : D \to V, \quad (x, y) \mapsto (u, v) = \left(x + y, \frac{y}{x}\right)$$

ein Diffeomorphismus ist. (Weisen Sie dies auch explizit nach!)

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{x + y}{x^2} \, \mathrm{d}(x, y)$$

mit Hilfe der Koordinatentransformation aus Aufgabenteil (b).

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Berechnen Sie Masse M und Trägheitsmoment Θ_x bezüglich der $x-$Achse des Zylinders Z mit Höhe $2a$ und Radius R der Grundfläche, also von

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq a,\ y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Dabei sei vorausgesetzt, dass der Zylinder eine konstante Dichte $\mu > 0$ hat.
Berechnen Sie auch $\frac{\Theta_x}{M}$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Der Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $v_n(K) \neq 0$ ist definiert als das vektorwertige Integral (komponentenweise zu lesen)

$$S = v_n(K)^{-1} \int_K x \, d^n x.$$

Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine nicht ausgeartete affine Transformation. Zeigen Sie, dass $T(S)$ der Schwerpunkt der Bildmenge $T(K)$ ist.

Aufgabe 4: (2+4 Punkte)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge und $\sigma : K \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und integrierbare Funktion.

(a) Es bezeichne $\| \ \|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$u(x) := \int_K \sigma(y) \ln \|x - y\| \, d^2y$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ existiert. (Beachten Sie, dass x in K liegen kann!)

(b) Zeigen Sie, dass $\Delta u(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ gilt. Folglich ist $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion.