



**Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik:
Blatt 5 zur Abgabe am 28.11.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.**

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Bei diesem Aufgabenblatt können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich bei der Abgabe mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Betrachten Sie die Folge von Funktionen $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) := \frac{1}{k} \mathbf{1}_{[0,k]}$. Bestimmen Sie die punktweise gebildete Grenzfunktion f der Folge f_k und berechnen Sie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Untersuchen Sie für die gegebene Funktionenfolge explizit, in wie weit die Voraussetzungen des Satzes über majorisierte Konvergenz erfüllbar sind.

Aufgabe 2: (1+1+0,5+0,5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$(a) F(y) := \int_0^1 f(x,y) dx, y \neq 0$$

$$(b) G(x) := \int_0^1 f(x,y) dy, x \neq 0$$

$$(c) \int_0^1 F(y) dy, \quad (d) \int_0^1 G(x) dx.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx.$$

Begründen Sie dabei jeden Schritt.

Sie dürfen verwenden, dass $\left| \frac{\sin(y)}{y} \right| \leq 1$ ist für $y \in (0, \infty)$.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Zeigen Sie dazu, dass $F'(x) = -\frac{1}{2}xF(x)$ gilt, und verwenden Sie, dass $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ ist.