Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik: Blatt 4 zur Abgabe am 21.11.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Im ersten Semesterteil können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich pro Blatt mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (1+1+1+3 Punkte)
Im Folgenden geht es um Nullmengen und deren Eigenschaften. Es sei stets $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass offene, nicht-leere Mengen des $\mathbb{R}^n$ stets Lebesgue-Maß > 0 haben.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass eine Nullmenge N bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte enthält, d.h., das Innere $\mathring{N}$ von N ist leer.

(c) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\|f\|_1 = 0$ die Nullfunktion ist.

(d) Welche der folgenden Mengen sind messbar (mit endlichem Maß), welche sind Nullmengen (im gegebenen $\mathbb{R}^n$)? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

$N_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
$N_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
$N_3 := \{(k\sqrt{2} + \frac{1}{l+1}) \in \mathbb{R} \mid k, l \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: (2+4 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\, dx = \frac{\pi}{2n}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Kugel $B^n_R(0)$ mit Radius $R > 0$ im $\mathbb{R}^n$ das Volumen

$$v_n(B^n_R(0)) = R^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}^{\,n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

hat.
Hinweis: Sie können zunächst mit Hilfe des kleinen Satzes von Fubini eine Rekursionsrelation herleiten. Überlegen Sie sich hierfür, was der Schnitt der Kugel $B^n_R(0)$ mit einer affinen Hyperebene $E_t := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = t\}$ ist, für $t \in \mathbb{R}$, und verwenden Sie Aufgabenteil (a). Verwenden Sie ferner die Tatsache, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(1) = 1$ gelten, sowie die Beziehung $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)
Betrachten Sie die Folge (f_n) stetiger Funktionen gegeben durch:

$$f_n : \ [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ nx, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die punktweise gebildete Grenzfunktion, und zeigen Sie, dass diese auch ein L^1-Grenzwert der Folge (f_n) ist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass (f_n) bezüglich der L^1-Halbnorm gegen g konvergiert.
Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass eine Nullmenge keine Intervalle positiver Länge enthält (siehe Aufgabe 1(b)).