Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik: Blatt 3 zur Abgabe am 14.11.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Im ersten Semesterteil können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich pro Blatt mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (4+2 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion.
Wir betrachten den *Rotationskörper* $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$.
(a) Berechnen Sie (direkt) die folgenden Doppelintegrale:

$$(i) \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1\, dx\, dy, r > 0,$$

$$(ii) \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1 - x^2})$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ ist.
(b) Zeigen Sie folgende Formel für das Lebesguemaß der Menge $V \subset \mathbb{R}^3$

$$v_3(V) := \int \mathbf{1}_V(x, y, z)\, d(x, y, z) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Aufgabe 2: (4+2 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion und sei

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}$$

der zugehörige Rotationskörper. Hat V die konstante Dichte μ, so ist das Trägheitsmoment von V bezüglich der x-Achse definiert als das Integral

$$\Theta_x := \mu \cdot \int_V (y^2 + z^2)\, d(x, y, z).$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Theta_x = \mu \cdot \frac{\pi}{2} \int_a^b f(x)^4\, dx.$$

(b) Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment Θ_x des Rotationskörpers V mit konstanter Dichte μ, der durch $f : [-1, 1] \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{2017 + x^2}$ definiert ist.

Hinweis: Es dürfen die Ergebnisse der vorhergehenden Aufgabe benutzt werden.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Für $R > 0$ sei $Z_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ der (unbeschränkte) Zylinder mit Radius R und der z-Achse als vertikaler Achse durch den Mittelpunkt. Außerdem sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die 3-dimensionale (Voll-)Kugel mit Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts $K \cap Z_R$.