Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik:
Blatt 2 zur Abgabe am 03.11.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Im ersten Semesterteil können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich pro Blatt mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (2+3 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gegeben mit $f(x) = 0$ für alle $x \neq a$ (und $f(a)$ beliebig in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Konstruieren Sie eine Folge Φ_n von Hüllreihen zu f, deren Inhalte gegen 0 konvergieren.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ falls $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst.

(i) Zeigen Sie, dass f nicht Riemann-integrierbar ist, indem Sie (ausführlich) Ober- und Unterintegral von f bestimmen.

(ii) Konstruieren Sie eine Folge von Hüllreihen Φ_n von f, deren Inhalte gegen Null konvergieren.
Hinweis: Verwenden Sie eine Abzählung a_k, $k \in \mathbb{N}$, von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)
Betrachten Sie die Streckung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (s_1 x_1, \ldots, s_n x_n)$, mit $s_1, \ldots, s_n \in (0, \infty)$.
Zeigen Sie:

(a) Für jede Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(s_1 x_1, \ldots, s_n x_n\right) dx = s_1^{-1} \cdots s_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx.$$

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(s_1 x_1, \ldots, s_n x_n\right) dx = s_1^{-1} \cdots s_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

für beliebige über $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-integrierbare Funktionen f gilt.