Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich
Mathematik
Prof. Dr. Jörg Teschner,
PD Dr. Ralf Holtkamp

Übungsaufgaben Mathematik III für Studierende der Physik: Blatt 1 zur Abgabe am 24.10.2017 bis 9:00 Uhr in der Vorlesung.

Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und handschriftlich abzugeben. Im ersten Semesterteil können Sie zu zweit zusammenarbeiten und Lösungen abgeben. Dabei müssen allerdings beide, die zusammen abgeben, derselben Übungsgruppe angehören, und jeder Abgabepartner sollte erkenntlich pro Blatt mindestens eine Aufgabenlösung aufgeschrieben haben.

Aufgabe 1: (4 Zusatzpunkte)
Geben Sie die allgemeine reellwertige Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$x''' - 2\,x'' + x' = 1 + e^t \cos(2t)$$

Hinweis: Es ist sinnvoll, die beiden Summanden in der Inhomogenität getrennt zu behandeln.

Aufgabe 2: (4+2 Punkte)
Für $s > 0$ ist die Gamma-Funktion definiert durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

(es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass das uneigentliche Integral für $s > 0$ konvergiert).

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für alle $s > 0$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle ganzzahligen $n \geq 1$ gilt.

(b) Beweisen Sie die von Euler bevorzugte Form

$$\Gamma(s+1) = \int_0^1 (-\ln(x))^s\, dx.$$

Wir definieren die Euler'sche Betafunktion für $x > 0$ und $y > 0$ durch

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

(c) Zeigen Sie für die Wohldefiniertheit der Euler'schen Betafunktion die Konvergenz des uneigentlichen Integrals.

Bemerkung: Durch Substitution und Umformungen erhält man weitere Darstellungen der Euler'schen Betafunktion:

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du \quad \text{bzw.} \quad B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\, d\theta.$$

Aufgabe 3: (4+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass als uneigentliches Riemann-Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

definiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedoch

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \, dx$$

kein konvergentes uneigentliches Integral ist.