Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

10.06.2010

Aufgabenblatt 9
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [10 Punkte] Es sei $k \in \mathcal{C}^0([0,1] \times [0,1]\,;\mathbb{R})$ und $K : \mathcal{C}^0([0,1]\,;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0([0,1]\,;\mathbb{R})$ der zugehörige Integraloperator aus Aufgabe 3, Blatt 4. Zeigen Sie, dass $K(\mathbb{B}_1(0)) \subseteq \mathcal{C}^0([0,1]\,;\mathbb{R})$ relativ kompakt ist.

Aufgabe 2: [10 Punkte] Für $m > \frac{1}{p}$ sei $i_{m,p} : w^{m,p} \to \ell^p$ die Einbettung $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $i_{m,p}$ wohldefiniert und $i_{m,p}(\mathbb{B}_1^{w_{m,p}}(0)) \subseteq \ell^p$ relativ kompakt ist.

Aufgabe 3: [10 Punkte] Es sei $O(n)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ sei

$$A.f(x) = f(A^{-1}x).$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{A.f \mid A \in O(n)\}$ kompakt in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 4: [5 + 5 Punkte] Bekanntlich gilt für stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$|t-s| \leq \delta \implies |f(t) - f(s)| \leq \delta \cdot \sup_{r\in[s,t]} |f'(r)|\,.$$

1. Es seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen und konvex und $f \in \mathcal{C}^1(U;Y)$. Zeigen Sie

$$\|x-y\|_X \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_Y \leq \delta \cdot \sup_{t\in[0,1]} \left\|Df_{x+t(y-x)}\right\|_{\mathfrak{L}(X;Y)}$$

   indem Sie die bekannte Abschätzung auf Funktionen der Form $t \mapsto y' \circ f(x + t(y - x))$ anwenden für $y' \in Y'$, $\|y'\|_{Y'} \leq 1$.

2. Folgern Sie, dass für die Einbettung $i : \mathcal{C}^1(U;Y) \to \mathcal{C}^0(U;Y)$ die Menge $i(\mathbb{B}_1^{\mathcal{C}^1}(0))$ relativ kompakt ist.

Abgabe: 17.06.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung: Hölderräume $\mathcal{C}^{k+\mu}(U;Y)$,
$k \in \mathbb{N}, 0 < \mu < 1,\ X, Y$ Banachräume, $U \subseteq X$ offen.

Definition: $\{f \in \mathcal{C}^k(U;Y) \mid \sup_{x \neq y} \frac{\left\| D^k f(x) - D^k f(y) \right\|_{L^k(X;Y)}}{\|x-y\|_X^\mu} < \infty\}$.

Norm: $\|f\|_{k+\mu} = \|f\|_{\mathcal{C}^k} + \sup_{x \neq y} \frac{\left\| D^k f(x) - D^k f(y) \right\|_{L^k(X;Y)}}{\|x-y\|_X^\mu}$

Dualraum:

Weitere Eigenschaften: Nicht reflexiv, Interpolation der $\mathcal{C}^k$-Räume.