Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

03.06.2010

Aufgabenblatt 8
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [5 + 5 Punkte] Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie die folgenden Verallgemeinerungen der Hölderschen Ungleichung durch Rückführung auf dieselbe.

1. Ist X eine $\mathbb{K}$-Banachalgebra, $f \in L^p(\Omega; X)$, $g \in L^q(\Omega; X)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so ist $f \cdot g : \Omega \to X,\ \omega \mapsto f(\omega)g(\omega)$ in $L^1(\Omega; X)$ und es ist $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

2. Ist $f \in L^p(\Omega; X')$, $g \in L^q(\Omega; X)$ mit $1 \leq p, q \leq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so ist $fg : \Omega \to \mathbb{K},\ \omega \mapsto f(w)(g(w))$ in $L^1(\Omega; \mathbb{K})$ und $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Aufgabe 2: [10 Punkte] Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$, X ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Zeigen Sie, dass $L^q(\Omega; X) \subseteq L^p(\Omega; X)$ gilt für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ mit der Abschätzung $\|f\|_p \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_q \cdot \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$ für $q < \infty$, welche für $q \to \infty$ erhalten bleibt (Hinweis: Höldersche Ungleichung).

Aufgabe 3: [4 + 6 Punkte]

1. Berechnen Sie die schwache Ableitung der Betragsfunktion $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$.

2. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ∂U eine glatte Mannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}^m(U, \mathbb{R})$. Ferner seien alle Ableitungen von f in $L^p(U)$, $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass für einen Multiindex α mit $|\alpha| \leq m$ die schwache Ableitung $D^{(\alpha)} f$ existiert und $D^\alpha f = D^{(\alpha)} f$ gilt (Hinweis: Satz von Stokes).

Aufgabe 4: [6 + 4 Punkte]

1. Es seien X, Y und X_n, $n \in \mathbb{N}$, Banachräume und induktiv sei $\mathfrak{L}^{(1)}(X, Y) = \mathfrak{L}(X, Y)$, $\mathfrak{L}^{(n)}(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \mathfrak{L}(X_1, \mathfrak{L}^{(n-1)}(X_2, \ldots, X_{n+1}))$. Es sei $\mathfrak{L}^n(X_1, \ldots, X_{n+1})$ der Raum der beschränkten multilinearen Abbildungen $X_1 \times \cdots \times X_n \to X_{n+1}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$T_n : \mathfrak{L}^{(n)}(X_1, \ldots, X_{n+1}) \to \mathfrak{L}^n(X_1, \ldots, X_{n+1}),\ TA(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1)(x_2) \ldots (x_n)$$

   ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Geben Sie mit Aufgabenteil 1. eine sinnvolle Definition des Raumes $\mathcal{C}^k(U; Y)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen für X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen.

Abgabe: 10.06.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	$W^{m,p}(U)$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
Definition:	$W^{m,p}(U) = \{f \in L^p(U) \mid D^{(\alpha)} f \in L^p(U) \text{ für } \lvert\alpha\rvert \leq m\}$
Norm:	$\lVert f\rVert_{W^{m,p}} = \left(\sum_{\lvert\alpha\rvert\leq m} \left\lVert D^{(\alpha)} f\right\rVert_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$
Dualraum:	$W^{-m,q}(U)$ für $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Weitere Eigenschaften:	Hilbertraum für $p = 2$, reflexiv für $1 < p < \infty$.