Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck 06.05.2010

Aufgabenblatt 6
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [5 + 5 Punkte] Es sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Y heißt komplementiert, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum $Z \subseteq X$ gibt mit $Y \oplus Z = X$. Zeigen Sie:

1. Y ist genau dann komplementiert, wenn es einen stetigen Projektor $P : X \to X$ gibt mit $\operatorname{im}(P) = Y$.

2. Endlichdimensionale Unterräume sind abgeschlossen und komplementiert und abgeschlossene endlich kodimensionale Unterräume sind komplementiert.

Aufgabe 2: [4 + 6 Punkte]

1. Zeigen Sie, dass für die ℓ^p-Räume die Inklusionen $\ell^p \subseteq \ell^q$ wohldefiniert und stetig sind für $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

2. Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die direkte Summe zweier abgeschlossener Unterräume in einem Banachraum nicht abgeschlossen sein muss (Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen).

Aufgabe 3: [3 + 7 Punkte] Es seien X, Y $\mathbb{K}$-Banachräume. Zeigen Sie:

1. Die Menge aller toplinearen Isomorphismen in $\mathfrak{L}(X, Y)$ ist offen. (Hinweis: Benutzen Sie die bekannte Aussage im Falle $X = Y$).

2. Die Menge der Fredholm-Operatoren $\mathcal{F}_q(X, Y)$ vom Index q ist offen in $\mathfrak{L}(X, Y)$. (Hinweis: Ist L Fredholm und $P : X \to X$ ein Projektor auf $\ker L = K$, W ein Komplement von $\operatorname{Bild}(L)$, dann zeigen Sie, dass die Abbildung $M : X \times W \to Y \times K$, $(x, w) \mapsto (Lx + w, Px))$ ein toplinearer Isomorphismus ist und nutzen Sie Teil 1. Betrachten Sie dann die Abbildung $\mathfrak{L}(X \times W, Y \times K) \to \mathfrak{L}(X, Y),\ N \mapsto \pi \circ N\big|_X$, $\pi : Y \times K \to Y$ die Projektion).

Aufgabe 4: [10 Punkte] Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix und

$$X = \{u : [0, 1] \to \mathbb{R}^n \text{ stetig differenzierbar} \mid u(0) = u(1)\}$$

mit Norm $\|u\|_X = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ (dies ist ein Banachraum). Es sei L der lineare Operator

$$L : X \to \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^n),\ Lu = \dot{u} - Au.$$

Zeigen Sie, dass L ein Fredholmoperator ist. Können Sie den Index von L bestimmen? (Hinweis: Elementare Lösungstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, insbesondere Variation der Konstanten).

Abgabe: 20.05.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	$\mathcal{C}^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen.
Definition:	$\mathcal{C}^k(\overline{U}, \mathbb{R}^n) = \{f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n \mid f\big\|_U\ k-$ mal stetig differenzierbar, $f^{(j)}$ beschränkt für $0 \leq j \leq k\}$
Norm:	$\\|f\\|_k = \sum_{j=0}^k \left\\|f^{(j)}\right\\|_\infty$
Dualraum:	Reguläre Borelmaße auf $\overline{U}$, falls U beschränkt, $n = 1$.
Weitere Eigenschaften:	Nicht reflexiv, separabel.