Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

29.04.2010

Aufgabenblatt 5
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [5 + 5 Punkte] Es sei X ein $\mathbb{K}$-Banachraum, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Es sei

$$Y^\perp = \{x' \in X' \mid x'(y) = 0 \,\forall\, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen isometrische Isomorphismen sind:

$$\Phi : \left(X/_Y\right)' \to Y^\perp,\ \Phi(x')(x) = x'([x]), \quad \Psi : X'/_{Y^\perp} \to Y',\ \Psi([x']) = X'\big|_Y.$$

Aufgabe 2: [10 Punkte] Es sei X ein $\mathbb{R}$-Banachraum, $Y \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum, $C \subseteq X$ offen, konvex und $Y \cap C = \emptyset$. Zeigen Sie die Existenz eines Funktionals $x' \in X'$ mit $x'(y) = 0$ für $y \in Y$, $x'(c) > 0$ für $c \in C$ (Hinweis: Aufgabe 1).

Aufgabe 3: [4 + 6 Punkte] Es sei $B(\mathbb{R})$ der Banachraum aller beschränkten Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, $\tau_a : B(\mathbb{R}) \to B(\mathbb{R})$, $\tau_a f(x) = f(x-a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Ein invariantes Mittel auf $B(\mathbb{R})$ ist ein Funktional $x' \in B(\mathbb{R})'$ mit $\inf f \leq x'(f) \leq \sup f$ und $x'(f) = x'(\tau_a f)$. Zeigen Sie:

1. Es existiert genau dann ein invariantes Mittel, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$ und alle $f_1, \ldots, f_N \in B(\mathbb{R})$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ gilt: $\inf_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \sum_{i=1}^N (f_i(x) - f_i(x-a_i)) \right\} \leq 0$. (Hinweis: Aufgabe 2).
2. Es existiert ein invariantes Mittel auf $B(\mathbb{R})$.
   (Hinweis: Um $\inf \sum_{i=1}^N (f_i(x) - f_i(x-a_i))$ abzuschätzen betrachten Sie die speziellen $x \in \{\lambda_1 \cdot a_1 + \cdots + \lambda_N \cdot a_N \mid \lambda_j \in \mathbb{N},\, 1 \leq \lambda_j \leq m\}$ für feste $m \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 4: [3 + 4 + 3 Punkte] Es sei

$$T : \ell^1 \to (\ell^\infty)',\ (Tx)(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n.$$

Zeigen Sie:

1. T ist eine Isometrie, aber nicht surjektiv.
2. Ist X ein $\mathbb{K}$-Banachraum und ist X' separabel, so ist auch X separabel.
3. Es gibt keinen isometrischen Isomorphismus $\ell^1 \to (\ell^\infty)'$.
   (Falls Sie hierfür Inseparabilität von ℓ^∞ zeigen wollen, betrachten Sie die Menge $\{\chi_M \in \ell^\infty \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$ mit χ_M der charakteristischen Funktion von M.)

Abgabe: 06.05.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$
Definition:	$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega \lvert f(\omega)\rvert^p \, d\mu < \infty\}$ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $[f]$ Äquivalenzklasse von f bzgl. Gleichheit μ-fast überall.
Norm:	$\lVert f \rVert_{L^p} = \left(\int_\Omega \lvert f\rvert^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ für $p < \infty$
Dualraum:	$L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (falls $1 < p < \infty$)
Weitere Eigenschaften:	Reflexiv für $1 < p < \infty$.