Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

22.04.2010

Aufgabenblatt 4
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [3 + 2 + 1 + (1 + 3) Punkte] Zeigen Sie:

1. $|\mathbb{R}| \leq \dim \ell^1$.
2. In einem unendlichdimensionalen Banachraum X gibt es eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von vollständigen Unterräumen mit $X_1 = X$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ und $X_{n+1} \neq X_n$.
3. Jeder unendlichdimensionale Banachraum besitzt einen zu ℓ^1 algebraisch isomorphen Unterraum.
4. Ein Banachraum ist entweder endlichdimensional oder hat überabzählbare Dimension (geben Sie hierfür zwei verschiedene Beweise an).

Aufgabe 2: [4 + 3 + 3 Punkte] Beweisen Sie:

1. $(\mathbf{d})' \cong \ell^1$, $\mathbf{d}$ der Raum der abbrechenden Folgen.
2. Ist X ein normierter Raum, Y seine Vervollständigung, so ist $X' \cong Y'$. Folgern Sie $(\mathbf{c}_0)' \cong \ell^1$, $\mathbf{c}_0$ der Raum der Nullfolgen.
3. $(\mathbf{c})' \cong \ell^1$, $\mathbf{c}$ der Raum der konvergenten Folgen.
   (Hinweis: Für $x \in \mathbf{c}$ ist $\{x_n - \lim x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{c}_0$).

Aufgabe 3: [3 + 3 + 4 Punkte] Berechnen Sie die Normen der folgenden linearen Operatoren.

(a) $T : X \to X,\ f \mapsto (t \mapsto t \cdot f(t)),\ X \in \{\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), L^p([0,1], \mathbb{R})\}$

(b) $K : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}),\ f \mapsto (t \mapsto \int_0^1 k(t,s) \cdot f(s)\, ds)$, wobei $k \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 4: [6 + 4 Punkte] Es sei X ein normierter Raum, $Y \subseteq X$ ein Unterraum und für $[x] \in X/_Y$ sei

$$\|[x]\| = \inf\{\|x-y\|_X \mid y \in Y\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|[x]\|$ ist wohldefiniert und genau dann eine Norm auf $X/_Y$, wenn Y abgeschlossen ist. Ist X überdies ein Banachraum, so auch $X/_Y$.

(b) X ist genau dann separabel, wenn Y und $X/_Y$ separabel sind (Y abgeschlossen).

Abgabe: 29.04.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung: $w^{m,p},\ m \in \mathbb{R},\ p \in [1, \infty]$

Definition: $w^{m,p} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \{n^m \cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p\}$

Norm: $\|x\|_{w^{m,p}} = \|\{n^m \cdot x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p}$

Dualraum:

Weitere Eigenschaften: Für $m > 1$: Separabel, Einheitskugel relativ kompakt in ℓ^p.