Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck 15.04.2010

Aufgabenblatt 3
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: [4 + 6 Punkte] Zeigen Sie:

1. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel.
2. Ein metrischer Vektorraum X ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge $S \subseteq X$ gibt mit $\overline{\operatorname{span}(S)} = X$.

Aufgabe 2: [10 Punkte] Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f \in \mathcal{C}([0,1]\,,\mathbb{R})$ gibt, welche nirgends differenzierbar ist, indem Sie zeigen, dass die Mengen

$$E_n = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \;\forall\, h \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \; : \; \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq n \right\}$$

abgeschlossen, aber nirgends dicht in $\mathcal{C}([0,1]\,,\mathbb{R})$ sind (Hinweis: Weierstraßscher Approximationssatz).

Aufgabe 3: [4 + 6 Punkte] Es sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $G_0 \subseteq G$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G, so ist G_0 ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(b) Ist $H \subseteq G$ ein Normalteiler, so ist $G/_H$ eine topologische Gruppe (mit der Quotiententopologie).

Aufgabe 4: [3 + 4 + 3 (+ 6) Punkte] Es sei X ein kompakter Hausdorffraum, $K \subseteq X$ kompakt, $U \subseteq X$ offen. Dann sei

$$\mathcal{U}(K,U) = \{f : X \to X \mid f(K) \subseteq U,\; f \text{ Homöomorphismus}\}.$$

Es sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Homöomorphismen $X \to X$ und τ sei die Topologie auf $\mathcal{H}$, welche die Mengen $\mathcal{U}(K,U)$ als Subbasis besitzt (siehe Blatt 1, Aufgabe 3.2). Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\varepsilon : \mathcal{H} \times X \to X,\; (f,x) \mapsto f(x)$ ist stetig.

(b) In $(\mathcal{H}, \tau)$ ist die Gruppenoperation stetig (Bonus: $(\mathcal{H}, \tau)$ ist topologische Gruppe.)

(c) Ist X (kompakter) metrischer Raum, so wird τ induziert durch die Metrik

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),\; f, g \in \mathcal{H}.$$

Abgabe: 22.04.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	$\mathcal{C}(S,X)$
Definition:	S topologischer Raum, X Banachraum, $\mathcal{C}(S,X) = \{f : S \to X \mid f \text{ stetig }, \sup_{s\in S} \|f(s)\|_X < \infty\}$
Norm:	$\|f\|_{\mathcal{C}} = \sup_{s\in S} \|f(s)\|_X$
Dualraum:	$M(S,\mathbb{C})$ (Bairemaße auf S), falls S kompakt, $X = \mathbb{C}$.
Weitere Eigenschaften:	Nicht reflexiv.