Prof. Dr. Reiner Lauterbach
Philipp Wruck

01.07.2010

Aufgabenblatt 12
Funktionalanalysis

Aufgabe 1: Es sei S eine Menge,

$$\ell^2(S) = \{f : S \to \mathbb{C} \mid f(s) \neq 0 \text{ für abzählbar viele } s \in S, \sum_{s \in S} |f(s)|^2 < \infty\}.$$

$\ell^2(S)$ ist ein Hilbertraum mit dem offensichtlichen Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass jeder Hilbertraum H isometrisch isomorph zu $\ell^2(S_H)$ ist, wobei S_H eine Orthonormalbasis in H ist.

Aufgabe 2: Es sei H Hilbertraum, $L \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator. Zeigen Sie die C^*-Gleichung

$$\|LL^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|L\|^2_{\mathcal{L}(H)}.$$

Aufgabe 3: Es sei H Hilbertraum, $L \in \mathcal{L}(H)$. L heißt normal, falls $LL^* = L^*L$. Zeigen Sie:

1. Ist H komplex, so gibt es ein $\lambda \in \Sigma_L$ mit $|\lambda| = \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(H)}$.

2. Ist L normal, so ist $\lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}_{\mathcal{L}(H)} = \|L\|_{\mathcal{L}(H)}$.

Aufgabe 4:

1. Zeigen Sie: Ist H Hilbertraum und $L \in \mathcal{L}(H)$ normal, so sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

2. Folgern Sie, dass für normales und kompaktes L eine Zerlegung $H = \ker L \oplus \overline{\langle e_1, e_2, \ldots \rangle}$ existiert, wobei die e_i eine Orthonormalbasis des Abschlusses der Vereinigung aller Eigenräume von L sind.

3. Schließen Sie, dass jeder kompakte normale Operator $K \in \mathcal{K}(H)$ sich darstellen läßt als $Kx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k$, wobei e_k ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_k \neq 0$ von K ist.

Abgabe: 08.07.10 in den Übungen.

Raum der Woche

Bezeichnung:	Schattenklasse c_p
Definition:	$c_p = \{K \in \mathcal{K}(H) \mid K^*K = KK^*,\, \{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p\}$ mit $Kx = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \langle x, e_k \rangle e_k$
Norm:	$\|K\|_{c_p} = \|\sigma\|_p$
Dualraum:	c_q für $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Weitere Eigenschaften:	Reflexiv für $1 < p < \infty$, nichtkommutative ℓ^p-Räume.