1 Banachalgebren und die Gelfandtransformation

Definition 1.1 *Es seien A ein komplexer Banachraum und $(x, y) \mapsto x \cdot y =: xy$ eine bilineare assoziative Abbildung von $A \times A$ nach A (genannt Multiplikation) mit*

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \forall x, y \in A$$

Dann heißt A (genauer $(A, \cdot, \|\cdot\|)$) eine Banachalgebra. Gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in A$, so heißt A kommutativ. Ein Element $e \in A$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in A$ und $\|e\| = 1$ heißt Einheit von A.

Beispiele:

- Sei X ein komplexer Banachraum. So sind $L(X)$ und $K(X)$ mit der Operatornorm und der Komposition Banachalgebren. Sie sind für $\dim(X) > 1$ nicht kommutativ, für $\dim(X) < \infty$ besitzen sie die Einheit id, für $\dim(X) = \infty$ hat nur noch $L(X)$ eine Einheit.
- Sei T ein kompakter Hausdorffraum. So ist $C(T)$ mit Supremumsnorm und punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.
- $L^\infty(\mu)$ ist ebenfalls mit Supremumsnorm und punktweiser Multiplikation eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.
- $C_0(\mathbb{R})$ ist eine kommutative Banachalgebra ohne Einheit.
- Die Wiener-Algebra:
  Sei W der Vektorraum der 2π-periodischen stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, deren Fourierreihe absolut konvergent ist: Zu 2π-periodischem f betrachte die Fourierkoeffizienten $c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ $(n \in \mathbb{Z})$, dann ist

  $$f \in W \iff (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

  Insbesondere folgt $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ für $f \in W$. Die Multiplikation wird punktweise definiert. Wir versehen W mit der Norm$\|f\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$. Nachrechnen zeigt, dass $\|\cdot\|_W$ wirklich eine Norm und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein Banachraum ist. $(W, \cdot, \|\cdot\|_W)$ ist eine Banachalgebra, die sogenannte Wieneralgebra, W ist kommutativ und hat das Einselement $\mathbf{1}$. Es bleibt zu zeigen, dass für $f, g \in W$ auch $fg \in W$ mit $\|fg\|_W \leq \|f\|_W\|g\|_W$ gilt:

  $$\begin{aligned}
  c_n(fg) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)e^{-int}dt \\
  &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikt}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(g)e^{ilt}\right)e^{-int}dt \\
  &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_l(g)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k+l-n)t}dt \\
  &= \sum_{k+l=n} c_k(f)c_l(g) \\
  &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_{n-k}(g)
  \end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$\begin{aligned}
\|fg\|_W &= \sum_n |c_n(fg)| \\
&\leq \sum_n \sum_k |c_k(f)||c_{n-k}(g)| \\
&= \sum_k \sum_n |c_k(f)||c_{n-k}(g)| \\
&= \sum_k |c_k(f)| \sum_n |c_{n-k}(g)| \\
&= \sum_k c_k(f) \sum_n c_n(g) \\
&= \|f\|_W \|g\|_W
\end{aligned}$$

Definition 1.2 *Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e*

1. *$x \in A$ heißt invertierbar (in A), falls es ein $y \in A$ gibt mit $xy = yx = e$. Notation: $y = x^{-1}$*
2. *$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \lambda - x := \lambda e - x$ ist invertierbar in $A\}$ heißt Resolventenmenge von x. (Um die Algebra zu kennzeichnen, schreibt man $\rho_A(x)$)*
3. *$\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$ heißt Spektrum von x. ($\sigma_A(x)$)*
4. *$R: \rho(x) \longrightarrow A\,,\ \lambda \mapsto (\lambda - x)^{-1}$ heißt Resolventenabbildung.*
5. *$r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$ heißt Spektralradius von x.*

Satz 1.3 *Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e, und sei $x \in A$*

1. *Falls $\|x - e\| < 1$, so ist x invertierbar. Genauer gilt:*

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n \quad (Neumannsche\,Reihe)$$

2. *$\rho(x)$ ist offen und R ist analytisch.*
3. *$\sigma(x)$ ist kompakt, genauer gilt $|\lambda| \leq \|x\|$ für $\lambda \in \sigma(x)$*
4. *$\sigma(x) \neq \emptyset$*
5. $\sup\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r(x)$

Satz 1.4 (Satz von Gelfand-Mazur)
Eine Banachalgebra mit Einheit e, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, ist eindimensional: $A = \mathbb{C} \cdot e$

Beweis:
Sei $x \in A$. So wähle $\lambda \in \sigma(x)$ (dies ist nach Satz 1.3, 4. Punkt, möglich). Nach Definition von Spektrum ist somit $\lambda - x$ nicht invertierbar, und es gilt $\lambda - x = 0$, also $x = \lambda e$. □

Lemma 1.5 *Sei A eine Banachalgebra mit Einheit e. Dann gilt:*

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\} \quad \forall x, y \in A$$

Definition 1.6 *Seien A_1 und A_2 Banachalgebren. Eine Abbildung $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ heißt Algebrenhomomorphismus, falls ϕ linear und multiplikativ ist. Im Fall $A_2 = \mathbb{C}$ spricht man kürzer von (komplexen) Homomorphismen oder Charakteren.*

Lemma 1.7 *Sei A eine Banachalgebra [mit Einheit].*
Dann ist jeder Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, genauer gilt $\|\varphi\| \leq 1 \quad [\|\varphi\| = 1$ oder $\varphi = 0]$.

Beweis:
Wäre $1 < \|\varphi\| \leq \infty$, so gäbe es ein $x \in A$ mit $\|x\| < 1$ und $\varphi(x) = 1$. Setze $y = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Damit gilt $y = x + x \cdot y$ und es folgt der Widerspruch:

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 1 + \varphi(y) \lightning$$

Bestitzt A eine Einheit e und ist $\varphi \neq 0$, so existiert ein $x \in A$ mit $\varphi(x) = 1$. Und es gilt:

$$1 = \varphi(x) = \varphi(ex) = \varphi(e)\varphi(x) = \varphi(e)$$

Wegen $\|e\| = 1$ gilt somit $\varphi \geq 1$, also insgesamt $\|\varphi\| = 1$ $\square$

Beispiel
Sei T ein kompakter Hausdorffraum und $A = C(T)$. So ist φ_t $(t \in T)$ mit $\varphi_t(x) = x(t)$ ein Homomorphismus

Definition 1.8

1. *Ein Ideal J einer Banachalgebra A ist ein Unterverktorraum mit:*

   $$x \in J\,,\, y \in A \Longrightarrow xy \in J \text{ und } yx \in J$$

   Im Falle $J \neq A$ heißt J echtes Ideal.

2. *Ein maximales Ideal J ist ein echtes Ideal mit:*

   $$J \subsetneq J'\,,\; J' \, Ideal \implies J' = A$$

Lemma 1.9 *Sei A eine Banachalgebra*

1. *Der Abschluss eines Ideals ist ein Ideal.*

2. *Ist J ein abgeschlossenes Ideal der Banachalgebra A, so ist A/J mit der Quotientennorm eine Banachalgebra (Multiplikation: $[x][y] = [xy]$ ist wohldefiniert). Ist A kommutativ, so ist auch A/J kommutativ.*

Beispiel
Der Kern eines Charakters $\varphi \neq 0$ ist ein abgeschlossenes maximales Ideal.

Lemma 1.10 *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit e.*

1. *Ein echtes Ideal von A liegt nicht dicht.*
2. *Maximale Ideale sind abgeschlossen.*
3. *Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.*
4. *Ist J ein echtes Ideal, so hat A/J eine Einheit.*
5. *Ist J ein maximales Ideal, so ist A/J eindimensional.*

Beweis:

1. folg direkt aus Satz 1.3 und der Tatsache, dass echte Ideale keine invertierbaren Elemente enthalten.
2. folgt aus 1. und Lemma 1.9
3. ergibt sich aus einer Standardanwendung des Zornschen Lemmas: Beachte nur, dass für eine Kette (bzgl. der Inklusionordnung) $\{J_i \big| i \in I\}$ von echten Idealen $\bigcup_{i\in I} J_i$ ein echtes Ideal ist.
4. $[e]$ ist Einheit von A/J: Es gilt $\|[e]\| = \inf_{x\in J} \|e - x\| \leq 1$, da aber „$<$1“ nicht möglich ist (sonst enthielte J invertierbare Elemente) gilt die Gleichheit.
5. Nach 2. und 4. ist A/J eine kommutative Banachalgebra mit Einheit. Nach dem Satz von Gelfand-Mazur (1.4) reicht es $\forall x \in A \setminus J \exists y \in J : \ xy \in e + J = [e]$ zu zeigen. Zu $x \in A \setminus J$ setze $J_x = \{xa + b \big| a \in A, b \in J\}$. Dann ist J_x ein Ideal, und es gelten $J \subseteq J_x$ $(a = 0)$ und $J \neq J_x$ $(a = e,\ b = 0)$. Da J ein maximales Ideal ist, ist $J_x = A$, d.h. es existieren $y \in A,\ b \in J$ mit $xy + b = e$, also $xy \in e + J$. $\square$

Definition 1.11 *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.*

1. *Dann heißt:*
$$\Gamma_A := \big\{\varphi : A \to \mathbb{C} \,\big|\, \varphi \neq 0,\ \varphi \ \textit{Homomorphismus}\big\}$$
Gelfandraum (oder Spektrum oder maximaler Ideal-Raum) von A.
2. *Zu $x \in A$ und $\varphi \in \Gamma_A$ setze $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. Die Abbildung $x \mapsto \widehat{x}$ heißt Gelfandtransformation.*

Satz 1.12 *Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit.*

1. *Γ_A ist mit der schwach*-Topologie $\sigma(A', A)$ ein kompakter Hausdorffraum, und es ist $\widehat{x} \in C(\Gamma_A)$.*
2. *$J \subset A$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn J der Kern eines $\varphi \in \Gamma_A$ ist.*

3. Es ist $\Gamma_A \neq 0$. Genauer gilt $\sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Gamma_A\}$ für alle $x \in A$.

Beweis:

1. Es gilt:
$$\Gamma_A = \bigcap_{x,y \in A} \{\varphi \in A' \big| \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = 0\} \cap \{\varphi \big| \varphi(e) = 1\}$$
Da die Abbildungen $\varphi \mapsto \varphi(a)$, $a \in A$, $\sigma(A', A)$-stetig sind, ist Γ_A eine schwach*-abgeschlossene Teilmenge der schwach*-kompakten Einheitskugel, also selber schwach*-kompakt. Da die Gelfandtransformation $\widehat{x}$ eine Einschränkung der schwach*-stetigen Abbildung $x' \mapsto x'(x)$ ist, ist sie selbst eine stetige Funktion.

2. Sei J ein maximales Ideal. Nach Lemma 1.10 5. ist $A/J = \mathbb{C} \cdot [e] \cong \mathbb{C}$, und die Quotientenabbildung ist ein Homomorphismus, dessen Kern mit J übereinstimmt. Umgekehrt ist für $\varphi \in \Gamma_A$ der Kern $\ker(\varphi)$ ein 1-kodimensionales, also maximales Ideal.

3. Es ist $\Gamma_A \neq \emptyset$ nach 2., da es nach Lemma 1.10 3. maximale Ideale gibt. Ist $\lambda \in \rho(x)$, also $\lambda - x$ invertierbar, so sind alle $\varphi(\lambda - x) = \lambda - \varphi(x)$ $(\varphi \in \Gamma_A)$ in $\mathbb{C}$ invertierbar (d.h. $\neq 0$), denn φ ist multiplikativ. Folglich gilt: $\lambda \notin \{\varphi(x) \big| \varphi \in \Gamma_A\}$. Ist $\lambda \in \sigma(x)$, so ist $J = \{(\lambda - x)a \big| a \in A\}$ ein echtes Ideal, das nach Lemma 1.10 3. in einem maximalen Ideal liegt. Nach 2. existiert also $\varphi \in \Gamma_A$ mit $\lambda - x \in J \subset \ker(\varphi)$, also $\lambda = \varphi(x)$ □

Theorem 1.13 (Gelfandscher Darstellungssatz)
Seien A eine kommutative Banachalgebra mit Einheit e, Γ_A (mit der schwach-Topologie) der zugehörige Gelfandraum und $x \mapsto \widehat{x}$ die Gelfandtransformation von A nach $C(\Gamma_A)$.*

1. Die Gelfandtransformation ist ein wohldefinierter stetiger Algebrenhomomorphismus mit $\widehat{e} = \mathbf{1}$. Es gilt:
$$\|\widehat{x}\|_\infty = r(x) \leq \|x\|$$

2. Es gilt $\sigma(x) = \sigma(\widehat{x})$ für $x \in A$.

Beweis:
2. folgt aus Satz 1.12 3. mit der Tatsache, dass für $C(T)$ stets $\sigma(f) = \{f(t) \big| t \in T\}$ gilt. Insbesondere gilt $r(f) = \|f\|_\infty$.
1. Bis auf die Ungleichung ist alles klar (siehe Satz 1.12 1.). Die Ungleichung folgt aus 2. und Satz 1.3: $\|\widehat{x}\|_\infty = r(\widehat{x}) = r(x) \leq \|x\|$. □