In diesem Seminarvortrag wollen wir Möglichkeiten vorstellen, aus vorhandenen Lie-Gruppen neue Lie-Gruppen zu konstruieren. Unser Hauptwerkzeug hierfür wird Satz 5 sein, welcher uns erlaubt eine Mannigfaltigkeitstruktur, die auf einer Einsumgebung einer Gruppe G definiert ist, auf die gesamte Gruppe zu erweiteren. Bevor wir allerdings hierzu kommen, geben wir noch ein nüztliches Kriterium, um im endlichdimensionalen fall zu entscheiden, ob eine (algebraische) Untergruppe einer Lie-Gruppe bereits eine Lie-Untergruppe ist:

Satz 1 (*Cartans Theorem*)**.** *Sei G eine Lie-Gruppe, modelliert über $\mathbb{R}^n$, für ein $n \in \mathbb{N}$. G erfülle zusätzlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist jede Untergruppe $A \subseteq G$, die in G abgeschlossen ist, bereits eine eingebette Untermannigfaltigkeit und Lie-Gruppe (d.h. eine Lie-Untergruppe von G). Ferner ist die differenzierbare Struktur, die A zu einer Lie-Untergruppe macht, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe z.B. [3] □

Bemerkung 2. Zur Erinnerung:

(i) Eine Basis eines topologischen Raumes X (mit Topologie τ) ist eine Familie von in X offenen Mengen $\mathcal{B} \subseteq \tau$, sodass jede in X offene Menge O dargestellt werden kann als $O = \bigcup_{i \in I} B_i$, mit $B_i \in \mathcal{B}$ für alle $i \in I$. X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom bzw. ist second countable, falls X eine abäzhlbare Basis besitzt.

(ii) Eine k-dimensionale, eingebettete Untermannigfaltigkeit N einer über dem $\mathbb{R}^n$ modellierten Mannigfaltigkeit M, ist eine Teilmenge $N \subseteq M$, für die um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ von M existiert, dessen Definitionsbereicht p enthält und die $N \cap U$ auf $\varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$ abbildet.

Beispiel 3. Jede abgeschlossene Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ ist eine Lie-Gruppe

Beispiel 4. Der Kern jedes stetigen Homomorphismus $G \to H$ von einer über $\mathbb{R}^n$ modellierten Lie-Gruppe G (die second countable ist) in eine topologische Gruppe H ist eine Lie-Gruppe.

Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Umständen wir eine gegebene Mannigfaltigkeitenstruktur zu einer Lie-Gruppenstruktur ausdehnen können. Motiviert ist dies durch die Beobachtung, dass für jede Lie-Gruppe G eine einzelne Karte $\varphi : U \to \varphi(U)$ bereits die gesamte Topologie und Mannigfaltigkeitenstruktur von G bestimmt, weil wir zu jedem Element $g \in G$ das Kartengebiet U nach $gU = \{gu \mid u \in U\}$ verschieben und anschließend auf gU die Abbildung $\varphi_g(k) := \varphi(g^{-1}k)$ betrachten können. Jede dieser Abbildungen φ_g muss dann eine Karte von G sein, weil die Multiplikation glatt und die Linksmultiplikation $G \ni k \mapsto gk$ für jedes $g \in G$ daher ein Diffeomorphismus ist - insbesondere können wir mit den φ_g also die Topologie auf G aus der des Bildes $\varphi(U)$ rekonstruieren. Weil wir mit der Einheit in jeder Gruppe ein ausgezeichnetes Element haben, liegt es daher nahe Mannigfaltigkeitenstrukturen um die Eins zu betrachten und zu versuchen, diese zu einer Lie-Gruppenstruktur auszuweiten. Dass dies unter geeigneten Anforderungen tatsächlich möglich ist, besagt gerade der nachfolgende

Satz 5. *Sei G eine Gruppe mit Multiplikation m und Inversion i. Es sei $U \subseteq G$ mit $1_G \in U$ eine Teilmenge, die bereits glatte X-Mannigfaltigkeit ist und $V \subseteq U$ eine in U offene Einsumgebung mit*

$$V \cdot V \subseteq U$$
$$V^{-1} = V$$

auf der $m_{|V \times V} : V \times V \to U$ und $i_{|V} : V \to V$ glatt sind. Zu jedem $g \in G$ existiere desweiteren eine offene Einsumgebung W_g, sodass

$$g \cdot W_g \cdot g^{-1} \subseteq U$$

gelte und die Konjugationsabbildung

$$c_g : W_g \to U, k \mapsto gkg^{-1}$$

glatt sei. Dann gibt es auf G eine eindeutig bestimmte Lie-Gruppenstruktur, in der V offene Teilmenge von G ist und die von U auf V induzierte glatte Struktur mit der von G übereinstimmt.

Bemerkung 6. Die Bedingung an die Konjugationsabbildungen lokal glatt zu sein, muss nicht immer explizit überprüft werden: Wird G beispielsweise von V erzeugt, d.h. gilt

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n$$

wobei $V^n := \left\{ \prod_{i=1}^n v_i \,|\, v_i \in V \right\}$ ist, so folgt die Glattheit der Konjugationsabbildung bereits, falls m und i auf $V \times V$ bzw. V glatt sind.

Beweis. Es ist hilfreich sich vorzustellen, dass G bereits Lie-Gruppe ist und wir nun die glatte Struktur aus einer Einsumgebung rekonstruieren wollen. Sei also

$$\varphi : W \to \varphi(W)$$

eine von U auf V induzierte Karte mit $1 \in W \subseteq V$, von der wir o.B.d.A. annehmen können, dass sie

$$W \cdot W \cdot W \subseteq V, \quad i(W) = W$$

erfüllt (Weil nämlich V in U offen ist und die Multiplikationsabbildung stetig auf $V \times V$, können wir per Definition der Produkttopologie wegen $m(1,1) = 1 \in V$ eine in V und damit auch U offene Einsumgebung Q' finden, sodass

$$m(Q' \times Q') \subseteq V$$

gilt. Indem wir das selbe Argument nochmals für Q' wiederholen, finden wir daher eine offene Einsumgebung $Q \subseteq V$ mit

$$m(Q \times Q) \subseteq Q'$$

die dann insbesondere $Q \cdot Q \cdot Q \subseteq V$ erfüllt. Wegen $V = V^{-1}$ ist i auf V ein Homöomorphismus und

$$W' := i(Q \cap W) \cap (Q \cap W) \subseteq W$$

folglich eine offene Einsumgebung die

$$i(W') = i^2(Q \cap W) \cap i(Q \cap W) = W'$$

erfüllt und auf welche wir φ gegebenenfalls einschränken können) Zu jedem $g \in G$ definieren wir nun

$$\varphi_g := \varphi \circ l_{g^{-1}|gW} : gW \to \varphi(W)$$

wobei zu $k \in G$

$$l_k : G \to G, h \mapsto k \cdot h$$

die Linksmultiplikation mit dem Element k bezeichnet und $kW := l_k(W)$ ist. Aneschließend erklären wir auf G die Topologie τ_G, deren Subbasis gegeben ist durch

$$\{\varphi_g^{-1}(O) \,|\, g \in G,\, O \subseteq \varphi(W) \text{ offen}\}$$

(wären die Abbildungen φ_g auf ganz G definiert, so wäre dies also gerade die Initialtopologie bezüglich der Familie $(\varphi_g)_{g \in G}$) d.h. eine Menge $O \subseteq G$ ist genau dann offen in G, wenn wir zu jedem Punkt $g \in O$ eine endliche Teilmenge $K \subseteq G$ finden können, sodass

$$g \in \bigcap_{k \in K} \varphi_k^{-1}(O_k) \subseteq O \tag{$*$}$$

ist, wobei $O_k \subseteq \varphi(W)$ eine in $\varphi(W)$ offene Menge bezeichnet. Wir verifizieren nun, dass G auf diese Weise zu einer Lie-Gruppe wird, machen aber zuvor noch die folgende Beobachtung: Ist $v \in V$ ein beliebiges Element und $Q \subseteq V$ eine in (V, τ_U) offene Menge, sodass auch $vQ \subseteq V$ ist, dann ist

$$l_v : (Q, \tau_U) \to (vQ, \tau_U)$$

ein Diffeomorphismus in U, weil die Linksmultiplikation auf V glatt ist und die Inverse Abbildung gegeben durch die ebenfalls glatte Abbildung $l_{v^{-1}} : (vQ, \tau_U) \to (Q, \tau_U)$. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn $g, k \in G$ zwei Elemente sind mit

$$kW \cap gW \neq \emptyset$$

Denn dann existieren $w, w' \in W$ mit

$$g^{-1}k = ww' \in W \cdot W$$

und

$$k^{-1}g = (g^{-1}k)^{-1} = w'^{-1}w^{-1} \in W \cdot W$$

D.h. nach Wahl von W gilt dann

$$\begin{aligned} k^{-1}gW &\subseteq W \cdot W \cdot W \subseteq V \\ g^{-1}kW &\subseteq W \cdot W \cdot W \subseteq V \end{aligned}$$

1. <u>φ_g ist ein Homöomorphismus:</u>
   Nach Konstruktion der Subbasis ist die Abbildung φ_g für jedes $g \in G$ stetig und als Komposition bijektiver Abbildungen selbst bijektiv. Es verbleibt also nur zu zeigen, dass φ_g^{-1} ebenfalls stetig ist. Da nach $(*)$ jede in G offene Menge als Vereinigung endlicher Schnitte von Mengen der Form

   $$\varphi_k^{-1}(O)$$

   mit $O \subseteq \varphi(W)$ offen dargestellt werden kann, reicht es zu zeigen, dass das Urbild unter φ^{-1} von Mengen genau dieser Form wieder offen ist, d.h. das

   $$\varphi_g(\varphi_k^{-1}(O) \cap gW)$$

   offen ist. Falls nun $kW \cap gW$ leer ist, so ist insbesondere

   $$\varphi_g(\underbrace{\varphi_k^{-1}(O)}_{\subseteq kW} \cap gW) = \emptyset$$

   eine in $\varphi(W)$ offene Teilmenge. Ist der Schnitt von kW und gW aber nicht leer, so ist also $k^{-1}gW \subseteq V$ und

   $$\begin{aligned} \varphi_g \circ \varphi^{-1}_{k|\varphi(k^{-1}gW)} &= \varphi \circ l_{g^{-1}} \circ l_k \circ \varphi^{-1}_{|\varphi(k^{-1}gW)} \\ &= \varphi \circ l_{g^{-1}k|k^{-1}gW} \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

   als Verknüpfung von Homöomorphismen selbst ein Homöomorphismus. Daher ist

   $$\varphi_g(\varphi_k^{-1}(O) \cap gW) = \left(\varphi_g \circ \varphi_k^{-1}\right)(\varphi(k^{-1}gW) \cap O)$$

   offen und φ_g ein Homöomorphismus.

2. <u>G ist hausdorffsch</u>
   Seien $g, k \in G$ zwei voneinander verschiedene Punkte. Falls der Schnitt von gW und kW leer ist, so haben wir zwei in τ_G offene Menge gefunden, die g und k trennen. Ist der Schnitt aber nicht leer, so ist wieder $k^{-1}gW \subseteq V$. Da $k^{-1}g \neq 1$ ist und (V, τ_U) bereits hausdorffsch, finden wir zwei in τ_U

offene und disjunkte Mengen W_1, W_2 mit $k^{-1}g \in W_1$ und $1 \in W_2$, von denen wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $W_1 \subseteq k^{-1}gW$ und $W_2 \subseteq W$ gilt (denn $k^{-1}gW$ und W sind offen in τ_U). Weil aber

$$\mathrm{id}_{k^{-1}gW} : (k^{-1}gW, \tau_G) \xrightarrow{\varphi_{k^{-1}g}} \varphi(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (W, \tau_U) \xrightarrow{l_{k^{-1}gW}} (k^{-1}gW, \tau_U)$$

ein Homöomorphismus ist, müssen folglich W_1 und W_2 auch in τ_G offen sein. Indem wir nun die Linksmultiplikation mit k als

$$l_k : (k^{-1}gW, \tau_G) \xrightarrow{\varphi_{k^{-1}g}} \varphi(W) \xrightarrow{\varphi_g^{-1}} (gW, \tau_G)$$

bzw.

$$l_k : (W, \tau_G) \xrightarrow{\varphi} \varphi(W) \xrightarrow{\varphi_k^{-1}} (kW, \tau_G)$$

schreiben, sehen wir, dass $l_{k|k^{-1}gW}$ und $l_{k|W}$ Homöomorphismen von τ_G sind. Die Mengen $kW_1 = l_{k|k^{-1}gW}(W_1)$, $kW_2 = l_{k|W}(W_2)$ sind daher Umgebungen von g und k, die einander nicht schneiden.

3. <u>G ist X-Mannigfaltigkeit und induziert auf V die gleiche Struktur wie U:</u> Seien φ_g und φ_k zwei Karten, deren Definitionsbereich einen nicht-trivialen Schnitt hat, es gelte also $gW \cap kW \neq \emptyset$. Dann ist der Kartenwechsel

$$\begin{aligned} \varphi_g \circ \varphi^{-1}_{k|\varphi(k^{-1}gW)} &= \varphi \circ l_{g^{-1}} \circ l_k \circ \varphi^{-1}_{|\varphi(k^{-1}gW)} \\ &= \varphi \circ l_{g^{-1}k|k^{-1}gW} \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

glatt und G somit eine X-Mannigfaltigkeit. Um einzusehen, dass V in τ_G offen ist, wählen wir $v \in V$ beliebig und bedienen uns abermals der Linksmultiplikation

$$l_v : (V, \tau_U) \to (U, \tau_U)$$

Weil diese nämlich stetig und (V, τ_U) in (U, τ_U) offen ist, definiert

$$W_v := (l_v)^{-1}(V) \cap W$$

eine in (V, τ_U) und damit auch (W, τ_U) offene Menge, die unter l_v noch vollständig nach V abgebildet wird und zudem die 1 enthält. Nun sind (W, τ_U) und (vW, τ_G) nach dem zuvor gezeigten homöomorph zueinander, vermöge der Abbildung

$$(W, \tau_U) \xrightarrow{id_W} (W, \tau_G) \xrightarrow{l_{v|W}} (vW, \tau_G)$$

Daher muss

$$vW_v = l_{v|W}(W_v) = l_v(W_v) \subseteq V$$

offen in (vW, τ_G) und damit G sein, was wegen $v \in vW_v$ schließlich zeigt, dass

$$V = \bigcup_{v \in V} vW_v$$

offen in G ist. G induziert daher auf V eine glatte Struktur, von der wir überprüfen, dass sie mit der von der von U induzierten Struktur verträglich ist. Sei hierfür $v \in V$ beliebig und

$$\psi : Q \to \psi(Q)$$

eine von U gegebene Karte um v, d.h. es gelte $v \in Q \subseteq V$. Weil die Linksmultiplikation mit v als Abbildung $(V, \tau_U) \to (U, \tau_U)$ glatt ist und Q in (V, τ_U) und damit auch (U, τ_U) offen, kann wieder eine in W enthaltene Einsumgebung W_v gefunden werden, die von l_v in Q abgebildet wird. Analog zu oben, muss dann $vW_v \subseteq V$ in (G, τ_G) offen sein und

$$\varphi_{v|vW_v} : vW_v \to \varphi(W_v)$$

daher eine von G induzierte Karte. Ferner ist dann

$$\psi \circ (\varphi_{v|vW_v})^{-1}_{|\varphi(v^{-1}Q \cap W_v)} = \psi \circ l_{v|W_v} \circ \varphi^{-1}_{|\varphi(v^{-1}Q \cap W_v)}$$

glatt, weil ψ, φ Karten von U sind und

$$l_v : W_v \subseteq V \to vW_v \subseteq U$$

glatte Abbildung auf U ist. Weil v beliebig war, folgt hiermit bereits, dass die glatten Strukturen auf V übereinstimmen.

4. <u>G ist Lie-Gruppe:</u>
Seien hierfür $g, k \in G$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass die Koorinatendarstellung von m

$$\varphi_{gk} \circ m \circ (\varphi_g^{-1} \times \varphi_k^{-1})$$

in geeigneten Karten glatt ist, müssen aber, um überhaupt von Differenzierbarkeit sprechen zu können, zunächst überprüfen, dass obige Abbildung auf einer offenen Teilmenge definiert ist. Wir bemerken hierfür, dass

$$\varphi_{gk} \circ m \circ (\varphi_g^{-1} \times \varphi_k^{-1}) = \varphi \circ l_{k^{-1}g^{-1}} \circ m \circ (l_g \times l_k) \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})$$

gilt und

$$\begin{aligned} l_{k^{-1}g^{-1}} \circ m \circ (l_g \times l_k)(h, f) &= l_{k^{-1}g^{-1}}(gh, kf) \\ &= c_{k^{-1}}(h)f \end{aligned}$$

ist. Weil m auf $V \times V$ stetig ist und $W \subseteq U$ offen, können wir wegen

$$(1, 1) \in m^{-1}(W)$$

per Definition der Produkttopologie eine offene Einsumgebung Q mit

$$m(Q \times Q) \subseteq W$$

finden von der wir - gegebenenfalls nach Übergang zu $Q \cap W$ - annehmen können, dass sie vollständig in W enthalten ist. Weil zu k^{-1} nach Voraussetzung eine in U offene Einsumgebung $W_{k^{-1}}$ existiert auf welcher die Konjugationsabbildung $c_{k^{-1}}$ glatt und insbesondere stetig ist, können wir wiederum eine in Q enthaltene offene Einsumgebung P finden, sodass noch

$$c_{k^{-1}}(P) \subseteq Q$$

gilt. Für die in $(W \times W, \tau_U \times \tau_U)$ und damit auch $(G \times G, \tau_G \times \tau_G)$ offene Menge $P \times P$ gilt dann

$$l_{k^{-1}g^{-1}} \circ m \circ (l_g \times l_k)(P \times P) = m\big(\underbrace{(c_{k^{-1}} \times \mathrm{id}_W)(P \times P)}_{\subseteq Q \times P}\big) \subseteq W$$

d.h.

$$\varphi_{gk} \circ m \circ (\varphi_g^{-1} \times \varphi_k^{-1})$$

ist zumindest auf $\varphi(P) \times \varphi(P)$ auswertbar. Dort gilt ferner

$$\begin{aligned}
&\varphi_{gk} \circ m \circ (\varphi_g^{-1} \times \varphi_k^{-1})_{|\varphi(P)\times\varphi(P)} \\
&= \varphi \circ l_{k^{-1}g^{-1}} \circ m \circ (l_g \times l_k) \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})_{|\varphi(P)\times\varphi(P)} \\
&= \varphi \circ m \circ (c_{k^{-1}} \times \mathrm{id}_W) \circ (\varphi^{-1} \times \varphi^{-1})_{|\varphi(P)\times\varphi(P)}
\end{aligned}$$

was eine Komposition von glatten Abbildungen ist. Es bleibt also noch die Glattheit der Inversion zu zeigen. Da wir nun aber wissen, dass Links- und Rechtsmultiplikation auf gesamt G glatte Abbildungen definieren,

$$i : V \to V$$

als glatte Abbildung auf U vorausgesetzt war und sich die Mannigfaltigkeitenstruktur von V mit der von G verträgt, ist auch

$$i : gV \xrightarrow{l_{g^{-1}|V}} V \xrightarrow{i_{|V}} V \xrightarrow{r_{g^{-1}}} Vg^{-1}$$

glatt. Somit ist i lokal und dann aber auch auf ganz G glatt, d.h. G eine Lie-Gruppe.

5. Die glatte Struktur auf G ist eindeutig bestimmt:
Sei $(G, \mathcal{A})$ eine weitere glatte Struktur, welche die Voraussetzungen des Theorems erfüllt. Da

$$\varphi : W \to \varphi(W)$$

Karte von U ist und die glatten Strukturen mit der von U auf V induzierten kompatibel sind, ist

$$\mathrm{id}_{G|W} : (W, (\varphi_g)_{g\in G})) \xrightarrow{\varphi} \varphi(W) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (W, \mathcal{A})$$

ein Diffeomorphismus. Weil G mit beiden Strukturen Lie-Gruppe wird, ist die Linksmultiplikation aber in beiden Strukturen ebenfalls ein Diffeomorphismus und somit auch

$$\mathrm{id}_{G|gW} : (gW, \mathcal{A}) \xrightarrow{l_{g^{-1}}} (W, \mathcal{A}) \xrightarrow{\mathrm{id}_{G|W}} (W, (\varphi_g)_{g\in G}) \xrightarrow{l_g} (gW, (\varphi_g)_{g\in G})$$

D.h.

$$\mathrm{id}_G : (G, \mathcal{A}) \to (G, (\varphi_g)_{g\in G})$$

ist ein Diffeomorphismus, genauso wie

$$\varphi_g \circ \psi = \varphi_g \circ \mathrm{id}_G \circ \psi$$

für jede Karte $\psi : Q \to \psi(Q)$ aus $\mathcal{A}$ und jedes $g \in G$. Damit stimmen die beiden glatten Strukturen überein.

□

Korollar 7. *Seien (G, m_G, i_G) und (H, m_H, i_H) zwei topologische Gruppen,*

$$\pi : G \to H$$

ein surjektiver Homomorphismus und $U^G \subseteq G$ sowie $U^H \subseteq H$ offene Einsumgebungen, sodass die Einschränkung von π auf U^G ein Homöomorphismus mit Bild U^H ist. Falls dann $L \in \{G, H\}$ eine auf X modellierte Lie-Gruppe ist, so existiert auch auf $K \in \{G, H\}\backslash\{L\}$ eine eindeutig bestimmte Lie-Gruppenstruktur, bezüglich derer π eingeschränkt auf eine Einsumgebung ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Nach Voraussetzung existieren offene Einsumgebung $U^G \subseteq G$, $U^H \subseteq H$ auf welcher

$$(\pi_{|U^G}) : U^G \to U^H$$

ein Homöomorphismus ist. Indem wir die Mengen gegebenenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass wir eine Karte

$$\psi : U^L \to \psi(U^L)$$

von L um $1_L \in L$ finden. Wir definieren auf U^K wie folgt die Struktur einer Mannigfaltigkeit: Sei

$$\varphi := \begin{cases} (\pi_{|U^G}), & L = G \\ (\pi_{|U^G})^{-1}, & L = H \end{cases}$$

d.h. φ ist ein Homöomorphismus von U^L nach U^K. Damit ist U^K als Bild eines Hausdorffraumes unter einem Homöomorphismus insbesondere selbst ein Hausdorffraum. Wir definieren eine Karte auf U^K durch

$$\eta := \psi \circ \varphi^{-1} : U^K \xrightarrow{\varphi^{-1}} U^L \xrightarrow{\psi} \psi(U^L)$$

Weil ψ, φ Homöomorphismen sind, ist es auch η. Da η ganz U^K überdeckt und η mit sich selbst glatt kompatibel ist, wird U^K also zu einer glatten Mannigfaltigkeit. Um K zu einer Lie-Gruppe zu machen, nutzen wir das vorherige Theorem. Hierzu wählen wir eine offene Einsumgebung $V' \subseteq U^K$ mit

$$m_K(V' \times V') \subseteq U^K$$

was möglich ist, da K bereits topologische Gruppe ist. Da i_K (die Inversion auf K) ein Homöomorphismus ist, ist

$$V := i_K(V') \cap V'$$

dann eine offene Einsumgebung mit

$$V \cdot V \subseteq U^K$$

und

$$V^{-1} = V$$

Um die Glattheit der Multiplikation auf V nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass für $x, y \in U^H$ mit $x \cdot y \in U^H$

$$(\pi_{|U^G})\Big((\pi_{|U^G})^{-1}(xy)\Big) = xy$$

gilt und ebenso

$$(\pi_{|U^G})\Big((\pi_{|U^G})^{-1}(x) \cdot (\pi_{|U^G})^{-1}(y)\Big) = xy$$

weil π ein Homomorphismus ist. Aus der Injektivität von $(\pi_{|U^G})$ folgt daher, dass $(\pi_{|U^G})^{-1}$ und damit aber auch φ lokaler Homomorphismus ist, d.h. für $x, y \in U^L$ mit $xy \in U^L$ gilt $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, analoges für $x, y \in U^K$. Da nach Wahl von V mit $x, y \in V$ auch $xy \in U^K$ ist, muss φ auf $\varphi^{-1}(V)$ daher ein lokaler Homöomorphismus sein und für $x, y \in \varphi^{-1}(V)$

$$\begin{aligned}\big(\varphi^{-1} \circ m_K \circ (\varphi \times \varphi)\big)(x, y) &= \varphi^{-1}\Big(\varphi(x) \cdot \varphi(y)\Big) \\ &= \varphi^{-1}\big(\varphi(xy)\big) \\ &= m_L(x, y)\end{aligned}$$

gelten. Eingeschränkt auf $\eta(V)$ ist

$$\begin{aligned}\eta \circ m_K \circ (\eta^{-1} \times \eta^{-1})_{|\eta(V)\times\eta(V)} &= \psi \circ \varphi^{-1} \circ m_K \circ (\varphi \circ \psi^{-1} \times \varphi \circ \psi^{-1})_{|\eta(V)\times\eta(V)} \\ &= \psi \circ m_L \circ (\psi^{-1} \times \psi^{-1})_{|\eta(V)\times\eta(V)}\end{aligned}$$

also die Koordinatendarstellung von m_L und daher glatt. Desweiteren gilt für jedes $x \in \varphi^{-1}(V)$

$$1_L = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(\underbrace{x}_{\in U^L}) \cdot \varphi(\underbrace{x^{-1}}_{\in U^L})$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} \circ i_K \circ \varphi(x) &= \varphi^{-1}\Big(\big(\varphi(x)\big)^{-1}\Big)\\ &= \varphi^{-1}\big(\varphi(x^{-1})\big)\\ &= i_L(x)\end{aligned}$$

und die Koordinatendarstellung der Inversion i_K

$$\begin{aligned}\eta \circ i_K \circ \eta^{-1}_{|\eta(V)} &= \psi \circ \varphi^{-1} \circ i_K \circ \varphi \circ \psi^{-1}_{|\eta(V)}\\ &= \psi \circ i_L \circ \psi^{-1}_{|\eta(V)}\end{aligned}$$

daher glatt. Verbleibt die lokale Glattheit der Konjugationsabbildung für jedes Element zu zeigen. Wir unterscheiden hierfür die Fälle

1. $\underline{L = G}$
   Die Abbildung φ ist also die Einschränkung $(\pi_{|U^G})$ und wir wollen die Glattheit der Konjugationsabbildung c_h für $h \in H$ nachweisen. Weil H bereits topologische Gruppe ist und c_h somit zumindest stetig, können wir eine offene Einsmgebung $P_h \subseteq U^H$ mit

   $$h \cdot P_h \cdot h^{-1} \subseteq U^H$$

   finden. Weil $\pi : G \to H$ surjektiv ist, finden wir desweiteren ein Element $g \in G$ mit $\pi(g) = h$ und noch eine offene Einsumgebung $Q_g \subseteq U^G$ mit

   $$g \cdot Q_g \cdot g^{-1} \subseteq U^G$$

   Wir setzen

   $$W_h := (\pi_{|U^G})(Q_g) \cap P_h$$

   Dann gilt für $x \in (\pi_{|U^G})^{-1}(W_h) \subseteq Q_g$:

   $$\begin{aligned}(\pi_{|U^G})\big(\underbrace{g \cdot x \cdot g^{-1}}_{=c_g(x) \in U^G}\big) &= \pi(g \cdot x \cdot g^{-1})\\ &= \pi(g) \cdot \pi(x) \cdot \pi(g^{-1})\\ &= \underbrace{h \cdot \pi(x) \cdot h^{-1}}_{=c_h(\pi(x)) \in U^H}\\ &= (\pi_{|U^G})\Big((\pi_{|U^G})^{-1}\big(h \cdot \pi(x) \cdot h^{-1}\big)\Big)\end{aligned}$$

Weil aber $(\pi_{|U^G})$ injektiv ist, muss

$$c_g(x) = \big((\pi_{|U^G})^{-1} \circ c_h \circ (\pi_{|U^G})\big)(x)$$

für jedes $x \in (\pi_{|U^G})^{-1}(W_h)$ sein und auf $\eta(W_h)$ folglich

$$\begin{aligned} \eta \circ c_h \circ \eta^{-1} &= \psi \circ (\pi_{|U^G})^{-1} \circ c_h \circ (\pi_{|U^G}) \circ \psi^{-1} \\ &= \psi \circ c_g \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

gelten. Das aber bedeutet gerade, dass die Konjugationsabbildung c_h auf W_h glatt ist.

2. <u>L = H</u>
Dann also ist $\varphi = (\pi_{|U^G})^{-1}$ und die Glattheit der Abbildung c_g für $g \in G$ zu zeigen. Wir wählen wiede eine in U^G enthaltene offene Einsumgebung W_g mit

$$g \cdot W_g \cdot g^{-1} \subseteq U^G$$

Dann gilt für jedes $x \in (\pi_{|U^G})(W_g)$:

$$\begin{aligned} (\pi_{|U^G}) \circ c_g \circ (\pi_{|U^G})^{-1}(x) &= \pi\big(g \cdot (\pi_{|U^G})^{-1}(x) \cdot g^{-1}\big) \\ &= \pi(g) \cdot x \cdot \pi(g)^{-1} \\ &= c_{\pi(g)}(x) \end{aligned}$$

d.h. die Koordinatendarstellung von c_g in $\eta(W_g)$ ist auf

$$\begin{aligned} \eta \circ c_g \circ \eta^{-1} &= \psi \circ \varphi^{-1} \circ c_g \circ \varphi \circ \psi^{-1} \\ &= \psi \circ c_{\pi(g)} \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

und daher glatt.

Wir können also das vorherige Theorem verwenden und erhalten auf K eine eindeutige Lie-Gruppenstruktur, die mit der von U^K auf V induzierten Struktur übereinstimmt. Das bedeutet: $(\eta_{|V})$ ist ebenfalls Karte dieser neuen Struktur und

$$\psi^{-1} \circ \eta_{|V} = \varphi_{|V}$$

somit also Komposition von Diffeomorphismen selbst ein Diffeomorphismus. □

Bemerkung 8. Wir haben die Surjektivität der Abbildung π nur für den Fall gebraucht, dass G eine Lie-Gruppe ist.

Beispiel 9. Die Abbildung

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot) \subseteq \mathbb{C}^x, t \mapsto e^{it}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus der additiven Lie-Gruppe $\mathbb{R}$ in die multiplikative topologische Gruppe S^1 (die Topologie ist die von $\mathbb{C}$ induzierte). Ferner schränkt exp auf einer Nullumgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ zu einem Homöomorphismus ein, weshalb nach dem vorherigen Korollar S^1 mit der Multiplikation zu einer Lie-Gruppe wird und $(\exp_{|U})$ zu einem Diffeomorphismus. Weil die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}$ eine Karte ist, ist dann insbesondere

$$(\exp_{|U})^{-1} : \exp(U) \to U$$

eine Karte von S^1. Damit können wir errechnen, dass die durch das Korollar gegebene Mannigfaltigkeitstruktur mit der uns bekannten Struktur übereinstimmt: Ist nämlich beispielsweise

$$\varphi_N : U_n := S^1 \setminus \{(0,-1)^T\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \frac{x}{y+1}$$

die Karte um den Nordpol, so gilt

$$\begin{aligned}\varphi_N \circ (\exp_U)(x) &= \varphi_N(\cos(t), \sin(t)) \\ &= \frac{\cos(t)}{\sin(t)+1}\end{aligned}$$

für alle t für welche $(\exp_{|U})$ definiert ist und nach U_n abbildet. Obige Abbildung ist aber ein Diffeomorphismus (im klassischen Sinne) und die Karten (und nach dem Satz über die Umkehrabbildung auch ihr Inverses) daher kompatibel.

Beispiel 10. Aufgefasst als Teilmenge der Quaternionen $\mathbb{H}$, wird die 3-Sphäre

$$S^3 = \{x \in \mathbb{H} \,|\, \|x\|_2 = 1\}$$

zu einer topologischen Gruppe. Die Abbildung, die einer Einheitsquaternion $q \in S^3$ die darstellende Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto qx\overline{q} \in \mathbb{R}^3$$

zuordnet (wobei die Identifikation des Standardbasisvektors $e_i \in \mathbb{R}^3$ mit $i, j, k \in \mathbb{H}$ durch $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$, $e_3 \mapsto k$ gegeben ist und $\overline{q}$ die zu q konjugierte Quaternion bezeichnet) ist ein Homomorphismus mit Bild SO_3 und Kern $\mathbb{Z}_2$, d.h. eine Überlagerung (in der Tat sogar die universelle Überlagerung, weil S^3 zusammenhängend ist). Nach dem vorherigen Korollar ist die 3-Sphäre somit eine Lie-Gruppe.

Beispiel 11. Allgemeiner: Ist $G \xrightarrow{\pi} H$ eine topologische Überlagerung (d.h. G ist nicht bereits notwendig eine Gruppe) einer topologischen Gruppe H und sind G, H wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so kann für jede Wahl eines Elementes $\widetilde{e} \in \pi^{-1}(\{e\})$ in der Faser des neutralen Elementes $e \in H$ eine Gruppenstruktur auf G etabliert werden, bezüglich welcher π ein Homomorphismus ist und $\widetilde{e}$ neutrales Element. Da π per Definition auf einer Einsumgebung zu einem Homomorphismus einschränkt, ist G also bereits eine Lie-Gruppe.

Bevor wir mit einem weiteren Korallar zu Satz 5 fortfahren können, müssen wir zunächst noch die Topologie des in dem Vortrag über die Kettenregel bereits eingeführten Raums

$$\mathbb{R}^{\infty} := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid |\mathrm{supp} f| < \infty \right\}$$

der endlichen Folgen in $\mathbb{R}$ besser verstehen. Man kann sich überlegen, dass die zuvor eingeführte lokalkonvexe Topologie bezüglich aller Halbnormen mit der sogenannten endlichen Topologie überereinstimmt: Diese ist für einen abzählbar unendlich-dimensionalen Vektorraum E über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gerade die Finaltopologie bezüglich der Inklusionsabbildungen $F \hookrightarrow E$, wobei F ein endlich-dimensionaler Unterraum von E ist, versehen mit der durch (jeden beliebigen) Isomorphismus $F \simeq \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} F}$ gegebenen Topologie (Zur Erinnerung: Ist $(f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen von topologischen Räumen X_i, so ist die Finaltopologie auf X diejenige Topologie, bei der eine Teilmenge $O \subseteq X$ genau dann offen ist, wenn $f_i^{-1}(O)$ für jedes $i \in I$ offen ist). Die endliche Topologie besitzt unter anderem die folgende Eigenschaft: Ist $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $E_n \subseteq E_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von endlich-dimensionalen Vektorräumen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$, und $U_n \subseteq E_n$ mit $U_n \subseteq U_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von in E_n offenen Mengen, so ist auch $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ offen in E: Denn sei $F \subseteq E$ irgendein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $F \subseteq E_n$. Weil E_n endlich-dimensional ist und jeder Untervektorraum von E mit der durch den $\mathbb{K}^m$ induzierten Topologie versehen, muss für jede in E_n offene Menge O auch $O \cap F$ in F offen sein. Daher genügt es nachzuweisen, dass das Urbild von U unter den Inklusionsabbildungen $\iota_{E_n} : E_n \hookrightarrow E$ offen ist. Nun gilt für jedes $k \geq n$ $E_n \subseteq E_k$. Deswegen ist $E_n \cap U_k$ für $k \geq n$ offen und folglich auch

$$\begin{aligned}
(\iota_{E_n})^{-1}(U) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\iota_{E_n})^{-1}(U_k) \\
&= \bigcup_{k \leq n} (E_n \cap U_k) \cup \bigcup_{k > n} (E_n \cap U_k) \\
&= U_n \cup \bigcup_{k > n} (E_n \cap U_k)
\end{aligned}$$

als Vereinigung offener Mengen. Es gilt ferner das folgende

Lemma 12. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und E ein abzählbar unendlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum versehen mit der endlichen Topologie. Es sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $E_n \subseteq E_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von endlich-dimensionalen Untervektorräumen von E mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$ und $U_n \subseteq E_n$ mit $U_n \subseteq U_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von in E_n offenen Mengen. Ist dann $f : U \to F$ eine auf der in E offenen Menge $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ definierte Abbildung in einen topologischen $\mathbb{K}$-Vektorraum F und $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist f genau dann eine C^r Abbildung, wenn $f_{|U_n} : U_n \to F$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ es ist.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall des Lemmas 1.9 in [2] □

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne nun

$$\mathbb{R}^\infty_n := \{f \in \mathbb{R}^\infty \,| \forall k > n : f(k) = 0\}$$

der Raum aller Folgen in $\mathbb{R}$ mit höchstens n Folgengliedern. Dann ist $\mathbb{R}^\infty_n \simeq \mathbb{R}^n$ und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^\infty_n = \mathbb{R}^\infty$$

Nach vorherigem ist für jede aufsteigende Folge von in $\mathbb{R}^\infty_{d_n}$ offenen Mengen $U_{d_n} \subseteq \mathbb{R}^\infty_{d_n}$ mit $d_n \leq d_{n+1}$ und $U_{d_n} \subseteq U_{d_{n+1}}$ die Menge

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{d_n}$$

eine in $\mathbb{R}^\infty$ offene Menge.

Korollar 13. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $d_n \in \mathbb{N}$, $d_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ und G_n eine über $\mathbb{R}^{d_n}$ modellierte Lie-Gruppe mit Multiplikation m_n und Inversion i_n. Ist $G_n \subseteq G_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit und die Inklusionsabbildung*

$$\iota_n : G_n \hookrightarrow G_{n+1}$$

ein Homomorphismus, so trägt $G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ die Struktur einer Lie-Gruppe, modelliert auf $\mathbb{R}^\infty$, wobei die Multiplikation m und Inversionsabbildungen gegeben sind durch

$$m_{|G_n \times G_n} = m_n$$
$$i_{|G_n} = i_n$$

und die Inklusionsabbildungen $\eta_n : G_n \hookrightarrow G$ glatt sind.

Beweis. Ähnlich zu der Multiplikation und Inversion wollen wir eine Karte auf G über ihre Wirkung auf jeder der Mannigfaltigkeiten G_n vorgeben, d.h. wir suchen eine Folge von Karten, $(\varphi_n : U_n \to \varphi_n(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $\varphi_{n+1|U_n} = \varphi_n$ gilt. Dass wir tatsächlich einen solchen Familie von Karten finden können, ist zunächst nicht klar und bedarf eines weiteren Lemmas, welches wir allerdings nur zitieren:

Lemma 14. *Seien M_1, M_2 endlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten, modelliert über $\mathbb{R}^{k_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{k_2}$. Ist dann M_1 Teilmenge von M_2 und die Inklusionsabbildung $M_1 \hookrightarrow M_2$ glatt, so existiert zu jeder Karte $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ von M_1, bei der U_1 (offene), relativ-kompakte und zusammenziehbare Teilmenge von M_1 ist, eine Karte $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ von M_2, sodass $V_2 \cap (\mathbb{R}^{k_1} \times \{0\}^{k_2 - k_1}) = V_1 \times \{0\}^{k_2 - k_1}$ gilt und*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi_{2|U_1}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & V_2 \cap (\mathbb{R}^{k_1} \times \{0\}) \arrow[dl, "\pi_{k_1}"] \\
V_1 &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hierbei bezeichnet $\pi_{k_1} : \mathbb{R}^{k_2} \to \mathbb{R}^{k_1}$ die Projektion auf die ersten k_1-Komponenten (der Standardbasis des $\mathbb{R}^{k_2}$).

Beweis. Siehe Lemma 2.1 in [2] □

Man beachte hierbei, dass jede offene Menge einer Mannigfaltigkeit eine relativ-kompakte und zusammeziehbare Menge besitzt und die Inklusionsabbildungen glatt sind, weil wir eingebettete Untermannigfaltigkeiten betrachten. Sei also $(\varphi_n : U_n \to \varphi(U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Satz solcher geeigneten Karten. Dann gilt also

$$\pi \circ \varphi_{n+1|U_n} = \varphi_n$$

wobei $\pi : \mathbb{R}^{d_{n+1}} \to \mathbb{R}^{d_n}$ wieder die Projektion auf die ersten d_n-Komponenten bezeichnet. Es sei nun $\xi_n : \mathbb{R}^{d_n} \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty_{d_n}$ die Einbettungsabbildung. Wir setzen

$$\psi_n := \xi_n \circ \varphi_n$$

und ferner $W_n := \psi_n(U_n)$. Dann gilt sogar

$$\psi_{n+1|U_n} = \psi_n$$

d.h. wir können eine Abbildung

$$\psi : U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \to W := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \subseteq \mathbb{R}^\infty$$

dadurch definieren, dass wir $\psi_{|U_n} = \psi_n$ fordern. Weil $U_n \subseteq U_{n+1}$ ist, muss dann auch für die Bildfolge $W_n \subseteq W_{n+1}$ gelten. Weil die W_n somit eine aufsteigende Folge von in $\mathbb{R}^\infty_{d_n}$ offenen Mengen bilden, ist dann auch W offen in $\mathbb{R}^\infty$. Statten wir nun U mit der 'Initialtopologie' bezüglich der Abbildungen ψ_n aus (damit ist die Topologie aus Satz 5 gemeint), so wird ψ zu einem Homöomorphismus: Dass ψ bijektiv ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\psi_{|U_n} = \psi_n$ bijektiv ist, die U_n eine aufsteigende Folge bilden und jedes ψ_{n+1} mit seinem Vorgänger ψ_n auf U_n übereinstimmt. Ist nun $O \subseteq W$ eine offene Menge, so muss, da ψ_n stetig ist, auch $\psi_n^{-1}(O)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen sein. Damit ist

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}(O) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\psi^{-1}(O) \cap U_n) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\psi_{|U_n})^{-1}(O) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \psi_n^{-1}(O)
\end{aligned}$$

als Vereinigung offener Mengen offen in U und ψ somit stetig. Ähnlich folgt für jedes Subbasiselement $\bigcap_{i\in I} \psi_i^{-1}(O_i)$ mit $I \subseteq \mathbb{N}$, $|I| < \infty$ und $O_i \subseteq W_i$ offen, dass

$$\begin{aligned}
\psi\left(\bigcap_{i\in I} \psi_i^{-1}(O_i)\right) &= \bigcap_{i\in I} \psi\big(\underbrace{\psi_i^{-1}(O_i)}_{\subseteq U_i}\big) \\
&= \bigcap_{i\in I} \psi_i(\psi_i^{-1}(O_i)) = \bigcap_{i\in I} O_i
\end{aligned}$$

als endlicher Schnitt von offenen Mengen wieder offen in W ist. ψ ist also ein Homöomorphismus und U somit hausdorffsch, weil $W \subseteq \mathbb{R}^\infty$ es ist. Da ψ U überdeckt und mit sich selbst glatt kompatibel ist, wird U also zu einer über $\mathbb{R}^\infty$ modellierten Mannigfaltigkeit. Wir rechnen nun wieder nach, dass auch die restlichen Bedingungen des Satzes 5 erfüllt sind. Sei hierfür $V'_n \subseteq U_n$ eine offene Einsumgebung mit

$$m_n(V'_n \times V'_n) \subseteq U_n$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $V'_n \subseteq V'_{n+1}$ gilt: Bezeichne nämlich $P_n := m_n^{-1}(U_n) \cap U_n \times U_n$. Diese Menge ist offen in $U_n \times U_n$, weil U_n offen in G_n ist und m_n stetig. Weil U_n die Unterraumtopologie von U_{n+1} trägt und V'_n offen in U_n ist, existiert eine in U_{n+1} offene Menge Q, sodass

$$V'_n = U_n \cap Q$$

gilt. Weil die Inklusion $\iota_n : G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ ein homomorphismus ist, stimmt die Einschränkung von m_{n+1} auf G_n mit m_n überein und es folgt

$$m_{n+1}(P_n) = m_{n+1|U_n \times U_n}(P_n) = m_n(P_n) \subseteq U_n \subseteq U_{n+1}$$

d.h. es gilt $P_n \subseteq P_{n+1}$. Daher ist $V'_n \times V'_n \subseteq (Q \times Q) \cap P_{n+1}$ und letztere Menge offen in $U_{n+1} \times U_{n+1}$. Für jedes $x \in V'_n$ existiert per Definition der Produkttopologie daher eine in U_{n+1} offene Menge S_x mit $x \in S_x$ und

$$S_x \times S_x \subseteq (Q \times Q) \cap P_{n+1} \subseteq P_{n+1}$$

Dann ist (unter Verwendung des Auswahlaxioms)

$$\widetilde{V}_{n+1} := V'_{n+1} \cup \bigcup_{x \in V'_n} S_x$$

eine in U_{n+1} offene Einsumgebung mit $V'_n \subseteq \widetilde{V}_{n+1}$ und $m_{n+1}(\widetilde{V}_{n+1} \times \widetilde{V}_{n+1}) \subseteq U_{n+1}$, auf die wir gegebenenfalls übergehen können. Wir setzen nun noch

$$V_n := i_n(V'_n) \cap V'_n$$

Dann ist wegen $i_{n+1}(V'_n) = i_n(V'_n)$ die Familie $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weiterhin eine aufsteigende Folge von in U_n offenen Einsumgebungen. Es sei

$$V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

Dies ist eine Vereinigung von in U offenen Mengen und daher selbst offen. Ferner gilt

$$\begin{aligned} V \cdot V &= m(V \times V) \\ &= \bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} m(V_k \times V_n) \\ &= \bigcup_{k,n \in \mathbb{N}} \underbrace{m_{\max(k,n)}(V_k \times V_n)}_{\subseteq U_{\max(k,n)}} \subseteq U \end{aligned}$$

sowie

$$V^{-1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} i(V_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{i_n(V_n)}_{=V_n} = V$$

Nun ist

$$\psi(V) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \psi_n(V_n)$$

eine aufsteigende Folge von in $\mathbb{R}^\infty_{d_n}$ offenen Mengen und daher offen in $\mathbb{R}^\infty$. Nach Lemma 12 genügt es für die Glattheit der Abbildung

$$\psi \circ m \circ \psi^{-1}_{|\psi(V)}$$

daher die Glattheit der Einschränkungen auf $\psi_n(V_n)$ nachzuweisen. Aber

$$\psi \circ m \circ \psi^{-1}_{|\psi_n(V_n)} = \psi_n \circ m_n \circ (\psi_n)^{-1}_{|\psi_n(V_n)}$$

ist gerade die Koordinatendarstellung von m_n und damit nach Voraussetzung glatt. Genauso ist $\psi \circ i \circ \psi^{-1}_{|\psi(V)}$ wegen

$$\psi_n \circ i_n \circ (\psi_n)^{-1}_{|\psi_n(V_n)}$$

glatt. Wir zeigen nun noch die Glattheit der Konjugationsabbildung auf einer geeigneten Einsumgebung. Sei hierfür $g \in G$. Dann existiert ein minimales k, sodass $g \in G_k$ ist. Wir setzen

$$W^n_g := \begin{cases} \emptyset, & n < k \\ \left(c^n_g\right)^{-1}(U_n) \cap U_n, & n \geq k \end{cases}$$

wobei c^n_g die Konjugationsabbildung in G_n bezeichne. Dann ist

$$c^{n+1}_g(W^n_g) = c^n_g(W^n_g) \subseteq U_n \subseteq U_{n+1}$$

d.h. $W^n_g \subseteq W^{n+1}_g$ und ferner jedes W^n_g offen, da c^n_g stetig ist und $\emptyset$ offen in jeder Topologie. Wir setzen natürlich

$$W_g := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W^n_g$$

Was eine in U offene Menge ist. Es ist wieder

$$\psi(W_g) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \psi_n(W^n_g)$$

und $\psi_n(W^n_g)$ eine in $\mathbb{R}^\infty_{d_n}$ aufsteigende Folge von offenen Mengen. Daher ist $\psi(W_g)$ offen in $\mathbb{R}^\infty$ und die Glattheit von c_g auf W_g gewährleistet, weil

$$\psi \circ c_g \circ \psi^{-1}_{|\psi_n(W^n_g)} = \psi_n \circ c^n_g \circ (\psi_n)^{-1}_{|\psi_n(W^n_g)}$$

glatt ist. Aus Satz 5 folgt daher, dass G eine Lie-Gruppenstruktur besitzt, in welcher V eine offene Mannigfaltigkeit ist. Damit ist für die Einbettung $\eta_n : G_n \hookrightarrow G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\psi \circ \eta_n \circ (\psi_n)^{-1}_{|\psi_n(V_n)} = \psi_n \circ (\psi_n)^{-1}_{|\psi_n(V_n)}$$

d.h. η_n auf einer Einsumgebung und damit überall glatt. □

Beispiel 15. Wir betrachen die aufsteigende Folge von eingebetteten Lie-Gruppen $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_{n+1}(\mathbb{R})$, wobei wir $GL_n(\mathbb{R})$ in $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ mit

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}$$

identifizieren. Dann ist

$$GL_\infty(\mathbb{R}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} GL_n(\mathbb{R})$$

nach vorherigem Korollar eine Lie-Gruppe.

Literatur

[1] Wockel, C. 'Infinite-dimensional Lie Groups' (Lecture notes)

[2] Gloeckner, H. 'Fundamentals of direct limit Lie theory'

[3] Warner, F. W. 'Foundations of differentiable manifolds and Lie groups'