Kettenregel für differenzierbare Abbildungen in lokalkonvexen Räumen

Thilo Merz

Seminar Funktionalanalysis
Januar 2012

Literatur:
Johannes Ebert ua.: examples of non metrizable spaces. [Zugriff: 11.01.2012]
URL: http://mathoverflow.net/questions/52032/examples-of-non-metrizable-spaces
Christoph Wockel: Infinite-dimensional Lie Groups. [Zugriff: 27.12.2011]
URL: http://www.math.uni-hamburg.de/home/wockel/teaching/data/SeminarFunkAnaWS2011/Infinite-dimensionalLiegroups.pdf

Wir werden in diesem Skript den Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit erweitern auf lokalkonvexe Räume. Dazu beweisen wir zunächst die Kettenregel für die von uns definierte Differentiation und definieren anschließend Karte, Atlas und Mannigfaltigkeit für (reelle) lokalkonvexe topologische Vektorräume (TVR). Dabei werden wir reflektieren, welche Struktur dieser Begriffe wesentlich ist und welche Eigenschaften der Differentiation darin eingehen.
Zunächst aber ein nicht-metrisierbares Beispiel für einen unendlich-dimensionalen lokalkonvexen Vektorraum:

Beispiel 1 ($\mathbb{R}^\infty$).
Sei $\mathbb{R}^\infty := \{x \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid x^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ ist endlich}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller rellen Folgen mit endlich vielen Einträgen ungleich Null, versehen mit punktweiser Addition und punktweiser skalarer Multiplikation.
Auf $\mathbb{R}^\infty$ betrachten wir die Familie P aller Halbnormen. Diese ist bestimmt eine punktetrennende Familie, da die Teilfamilie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R},\quad x \mapsto |x(n)|$ bereits

punktetrennend ist. Es induziert P also eine Topologie τ_P auf $\mathbb{R}^\infty$, bezüglich derer $\mathbb{R}^\infty$ ein lokalkonvexer Vektorraum ist.

Außerdem ist jede lineare Abbildung g von $\mathbb{R}^\infty$ in einen lokalkonvexen Vektorraum X stetig:
Sei nämlich U eine offene, konvexe und kreisförmige Nullumgebung in X. Da g linear ist, ist auch $g^{-1}(U)$ konvex, kreisförmig und enthält die 0 aus $\mathbb{R}^\infty$. Ihr Minkowski-Funktional $p_{g^{-1}(U)}$ ist also eine Halbnorm und nach Voraussetzung stetig.
Wegen $g^{-1}(U) = p_{g^{-1}(U)}^{-1}(]-1,1[)$ ist somit $g^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^\infty$. Da ein lokalkonvexer TVR eine Nullumgebungsbasis aus kreisfoermigen konvexen offenen Nullumgebungen hat, ist g also stetig.

Ferner ist $(\mathbb{R}^\infty, \tau_P)$ nicht metrisierbar, denn:
Angenommen es gäbe eine Metrik d auf $\mathbb{R}^\infty$, deren induzierte Topologie τ_P ist. Bezeichne e_k mit $e_k(n) = \delta_{kn}$ den k-ten Basisvektor. Dann konstruiere eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $t_k \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall k \in \mathbb{N}$, sodass $d(0, t_k e_k)$ gegen Null konvergiert, wie folgt:
Falls $d(0, e_k) \leq \frac{1}{k}$, setze $t_k := 1$. Andernfalls ist die Abbildung $d_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto d(0, te_k)$ stetig mit $d_k(0) = 0$ und $d_k(1) > \frac{1}{k}$. Nach Zwischenwertsatz existiert also ein t' mit $d(t') = \frac{1}{k}$. Setze dann $t_k := t'$.
Die Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $v_k := t_k e_k$ konvergiert also per Konstruktion gegen $0 \in \mathbb{R}^\infty$. Sei nun $f \colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung definiert durch $f(e_k) = \frac{1}{t_k}$. Dann ist f stetig (siehe oben), aber $\lim_{n\to\infty} f(v_k) = 1 \neq 0 = f(\lim_{n\to\infty} v_k)$. Widerspruch.

Um die Kettenregel zu beweisen, hilft es zu zeigen:

Satz 1. Seien X, Y lokalkonvexe TVR, $U \subseteq X$ offen und $f \colon X \to Y$. Dann ist

$$U^{[1]} := \{(x, v, t) \in U \times X \times \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$$

offen in $U \times X \times \mathbb{R}$ und f ist C^1 genau dann, wenn eine stetige Funktion $f^{[1]} \colon U^{[1]} \to Y$ existiert, sodass

$$f^{[1]}(x, v, t) = \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x))$$

für $t \neq 0$. In diesem Fall gilt auch $\mathrm{d}f(x, v) = f^{[1]}(x, v, 0)$.

Beweis. Dass $U^{[1]}$ offen ist, folgt daraus, dass $g \colon U \times X \times \mathbb{R} \to X$ mit $g(x, v, t) = x + tv$ als Verkettung stetiger Abbildungen stetig ist und $U^{[1]} = g^{-1}(U)$ gilt.

Falls $f^{[1]}$ existiert und stetig ist, gilt für alle $(x, v) \in U \times X$:

$$f^{[1]}(x, v, 0) = \lim_{t\to 0} f^{[1]}(x, v, t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)) = \mathrm{d}f(x, v)$$

und somit ist f eine C^1-Abbildung.

Seien nun f C^1 und $x \in U$ gegeben. Da U offen ist, existiert eine offene konvexe Nullumgebung $W_x \subseteq X$ mit $W_x = -W_x$ und $x + 2W_x \subseteq U$. Für $y \in x + W_x$, $tv \in W_x$ gilt dann $y + [0,1]tv \subseteq U$ und somit nach einem Satz aus dem vorigen Vortrag:

$$\frac{1}{t}(f(y+tv) - f(y)) = \int_0^1 \mathrm{d}f(y+stv)(v)\ \mathrm{d}s$$

Da $p(\int_a^b \gamma(t)\ \mathrm{d}t) \leq (\int_a^b p(\gamma(t))\ \mathrm{d}t) \leq \sup_{t\in[a,b]}\{p(\gamma(t))\} \cdot |b-a|$ gilt, definiert die rechte Seite eine stetige Funktion auf $(x+W_x) \times W_x \times [-1,1]$. Also ist durch

$$f^{[1]}(x,v,t) := \begin{cases} \frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x)), & \text{falls } t \neq 0 \\ \int_0^1 \mathrm{d}f(x+stv)(v)\ \mathrm{d}s, & \text{falls } x + [0,1]tv \subseteq U \end{cases}$$

eine stetige Funktion definiert, welche die geforderten Bedingungen erfüllt. □

Satz 2 (Kettenregel). Seien X, Y, Z lokalkonvexe TVR; $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen; $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to Z$ C^1-Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f\colon U \to Z$ eine C^1-Abbildung und es gilt:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}(g)(f(x)) \circ \mathrm{d}f(x)$$

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 1 gilt für $(x,v,t) \in U^{[1]}$:

$$\frac{1}{t}((g\circ f)(x+tv) - (g\circ f)(x)) = \frac{1}{t}(g(f(x)+t\cdot f^{[1]}(x,v,t)) - g(f(x))) = g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x,v,t), t).$$

Da die rechte Seite eine stetige Funktion auf $U^{[1]}$ definiert folgt die erste Aussage aus Satz 1. Für $t = 0$ folgt damit dann auch:

$$\mathrm{d}(g\circ f)(x)(v) = (g\circ f)^{[1]}(x,v,0) = g^{[1]}(f(x), f^{[1]}(x,v,0), 0) = \mathrm{d}(g)(f(x))(\mathrm{d}f(x)(v)).$$

□

Definition 1. Sei M ein topologischer Hausdorff-Raum und X ein lokalkonvexer TVR.

Eine **X-Karte** auf M ist ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ für offene Teilmengen $U \subseteq M$, $\varphi(U) \subseteq X$.

Zwei X-Karten $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ und $\psi\colon U \to \psi(U)$ heißen **kompatibel**, wenn $U \cap V = \emptyset$ gilt oder $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U\cap V) \to \psi(U \cap V)$ ein Diffeomorphismus ist (also glatt mit glattem Inversem).

Ein **X-Atlas** auf M ist ein System $\mathcal{A} = \{(\varphi_i\colon U_i \to \varphi_i(U_i))\}_{i\in I}$ von paarweise kompatiblen X-Karten auf M mit $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.

Zwei Atlanten heißen **kompatibel**, wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist.
Ein (bezüglich Teilmengenrelation) **maximaler Atlas** $\mathcal{A}$ heißt auch **glatte** X**-Struktur** auf M und das Paar $(M, \mathcal{A})$ dann **(glatte)** X**-Mannigfaltigkeit**.

Bemerkung 1.

- Die Kettenregel versichert uns die für Diffeomorphismen wünschenswerte Eigenschaft, dass die Differentiale zueinander inverser Abbildungen wieder invers zueinander sind.

- Aus der Kettenregel folgt, dass Kompatibilität von Atlanten eine Äquivalenz-Relation ist:
  Seien nämlich $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ drei X-Atlanten auf M, sodass sowohl $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ als auch $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$ kompatibel sind, und seien $\varphi_1 \colon U_1 \to \varphi_1(U_1)$ und $\varphi_3 \colon U_3 \to \varphi_3(U_3)$ Karten aus $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$ mit $U_1 \cap U_3 \neq \emptyset$. Dann ist $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_3) \to \varphi_3(U_1 \cap U_3)$ ein Homöomorphismen. Außerdem gibt es zu jedem $x \in U_1 \cap U_3$ eine Karte $\varphi_2 \colon U_2 \to \varphi_2(U_2)$ in $\mathcal{A}_2$ mit $x \in U_2$. Bezeichnen g_1, g_2, g_3 die Einschränkungen von φ_1, φ_2, φ_3 auf $U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Nach Voraussetzung sind $g_2 \circ g_1^{-1}$ (bzw. $g_3 \circ g_2^{-1}$) glatt auf $\varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$ (bzw. $\varphi_2(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$ und aus der Kettenregel folgt, dass $g_3 \circ g_1^{-1} = (g_3 \circ g_2^{-1}) \circ (g_2 \circ g_1^{-1})$ glatt ist auf $\varphi_1(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$. Da x beliebig war, folgt, dass $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} \colon \varphi_1(U_1 \cap U_3) \to \varphi_3(U_1 \cap U_3)$ glatt ist. Analoges folgt für das Inverse. Reflexivität und Symmetrie waren offensichtlich und es folgt die Behauptung.
  Jede Äquivalenzklasse $\mathbb{A}$ von Atlanten bezüglich Kompatibilität besitzt daher genau einen maximalen Atlanten: $\bigcup \mathbb{A}$. In der Praxis wird deshalb nur ein (nicht notwendigerweise maximaler) Atlas angegeben.

- Die Definition benutzt also vom Differenzierbarkeitsbegriff im Wesentlichen die Kettenregel (um den oben genannten Wunschkatalog zu erfüllen) und kann daher auf andere Definitionen von Differenzierbarkeit (mit Kettenregel) angewendet werden.

- Ist $X = \mathbb{R}^n$, so heißt $n =: \dim(M)$ die **Dimension** von M.

Beispiel 2 (Sphären).
Sei $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$. Dann ist

$$U_N := \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \dots, 0, -1)\},\ U_S := \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0, \dots, 0, 1)\}$$

eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^n$ und

$$\phi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_{n+1}+1)^{-1} \cdot (x_1, \dots, x_n),\ \phi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_{n+1}-1)^{-1} \cdot (x_1, \dots, x_n)$$

definieren kompatible Karten, also einen Atlas.

Definition 2. Sei $(M, \mathcal{A})$ eine X-Mannigfaltigkeit und $(N, \mathcal{B})$ eine Y-Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Abbildung $f\colon M \to N$ **C^1-Abbildung**, falls für alle Karten $(\varphi\colon U \to \varphi(U)) \in \mathcal{A}$ und $(\psi\colon V \to \psi(V)) \in \mathcal{B}$ die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap f^{-1}(V))(\subseteq X) \to V(\subseteq Y)$$

eine C^1-Abbildung ist. Analog werden **C^n-Abbildungen** und **glatte Abbildungen** definiert. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ heißt auch **Koordinatendarstellung** von f (bzgl. φ und ψ).

Bemerkung 2. Aufgrund der Kettenregel genügt es, die obige Bedingung für Karten von zu $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kompatiblen Atlanten zu verifizieren.