C^*-Algebren und GNS-Konstruktion

Seminar zur Funktionalanalysis

Christian Gloy

16. November 2011, Universität Hamburg

Definition 1. Sei A eine Banachalgebra.

(i) Eine Abbildung $* : A \to A$ mit $*(x) := x^*$ heißt *Involution*, falls für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(x+y)^* = x^* + y^* \qquad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^* \qquad x^{**} = x \qquad (xy)^* = y^* x^*$$

(ii) Besitzt A eine Involution, so dass für alle $x \in A$ gilt, dass $||x^* x|| = ||x||^2$, so nennen wir A eine *C^*-Algebra*.

(iii) Ein Algebrenhomomorphismus $\phi : A \to B$ zwischen C^*-Algebren heißt **-Homomorphismus*, falls $\phi(x^*) = (\phi(x))^*$ für alle $x \in A$ erfüllt ist und **-Isomorphismus*, falls er zusätzlich bijektiv ist.

Definition 2. Sei A eine C^*-Algebra und $x \in A$. Dann heißt x

- *selbstadjungiert*, falls $x^* = x$.
- *normal*, falls $x^* x = x x^*$.

Lemma 3. Sei A eine C^*-Algebra - in (c) mit Einheit e - und $x \in A$. Dann gilt:

(a) $||x|| = ||x^*||$ und $||xx^*|| = ||x||^2$

(b) x normal $\Rightarrow ||x||^2 = ||x^2||$ und $r(x) = ||x||$

(c) x selbstadjungiert $\Rightarrow \sigma(x) \subset \mathbb{R}$

Beweis. .

zu (a): Wir haben $||x||^2 = ||x^* x|| \leq ||x^*|| ||x||$
$\Rightarrow ||x|| \leq ||x^*||$, also auch $||x^*|| \leq ||x^{**}|| = ||x||$.
Dies ergibt $||x^*|| = ||x||$ und somit $||xx^*|| = ||x^{**} x^*|| = ||x^*||^2 = ||x||^2$.

zu (b): Es gilt $||x^2||^2 = ||x^2 (x^2)^*|| = ||(x^* x)^* (x^* x)|| = ||x^* x||^2 = (||x||^2)^2$,
d.h. $||x^2|| = ||x||^2$.
Per Induktion erhalten wir nun $||x^{2^k}|| = ||x||^{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also
$r(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} ||x^{2^k}||^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} ||x||^{2^k \cdot \frac{1}{2^k}} = ||x||$

zu (c): Für alle $x \in A$ gilt $e^* x = e^* x^{**} = (x^* e)^* = x^{**} = x$, analog $xe^* = x$,
d.h. $e^* = e$. Seien nun $\alpha + i\beta \in \sigma(x)$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.
Dann gilt $\alpha + i\beta + i\lambda = \alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(x + i\lambda)$, also $|\alpha + i(\beta+\lambda)| \leq ||x + i\lambda||$ und somit

$$\begin{aligned}
\alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 &= |\alpha + i(\beta+\lambda)|^2 \\
&\leq ||x + i\lambda||^2 \\
&= ||(x+i\lambda)^*(x+i\lambda)|| \\
&= ||x^2 + \lambda^2 e|| \\
&\leq ||x||^2 + \lambda^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha^2 + 2\beta\lambda + \beta^2 \leq ||x^2||$.
Da $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $\beta = 0$ und damit $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ wie gewünscht.

$\square$

Theorem 4. Sei A eine kommutative C^*-Algebra mit Einheit e.
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge : A &\to C(\Gamma_A) \\ x &\mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

ein isometrischer *-Isomorphismus mit $\hat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ für alle $x \in A$.

Beweis. Nach dem Gelfandschen Darstellungssatz ist $\wedge$ ein Algebrenhomomorphismus und es gilt mit Lemma 3 (b) $||\hat{x}||_\infty = r(x) = ||x||$ für alle $x \in A$, d.h. $\wedge$ ist isometrisch ($\Rightarrow$ injektiv), also ist $\hat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}$ abgeschlossen.
Wir werden zeigen, dass $\hat{A}$ dicht in $C(\Gamma_A)$ liegt. Dafür nutzen wir den Satz von Stone-Weierstraß, welcher folgende vier Voraussetzungen benötigt:

(1) Dass $\hat{A} \subset C(\Gamma_A)$ eine Unteralgebra ist, ist klar.

(2) $\hat{A}$ trennt die Punkte von Γ_A: Seien nämlich $\varphi \neq \psi \in \Gamma_A$,
dann existiert ein $x \in A$, s.d. $\varphi(x) \neq \psi(x)$, also ist für dieses x

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \neq \psi(x) = \hat{x}(\psi)$$

(3) Die konstanten Funktionen sind in $\hat{A}$, denn $\hat{A} \ni \hat{e} = \mathbf{1}$ und damit auch $\lambda\hat{e} \in \hat{A}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ nach (1).

(4) Es bleibt zu zeigen: $\hat{x} \in \hat{A} \Rightarrow \overline{\hat{x}} \in \hat{A}$.
Dafür zeigen wir $(\hat{A} \ni)\hat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ für alle $x \in A$. Ist x selbstadjungiert, so ist diese Aussage gleichbedeutend mit '$\hat{x}$ ist reellwertig'.
Dies gilt in der Tat wegen $\text{Bild}(\hat{x}) = \{\varphi(x) : \varphi \in \Gamma_A\} = \sigma(x) \subset \mathbb{R}$.
Ist nun x beliebig, so schreibe

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i\frac{x - x^*}{2i}$$

mit selbstadjungierten Summanden und es folgt (4).

Damit liegt $\hat{A}$ dicht in $C(\Gamma_A)$ und der Beweis ist vollbracht. □

Bevor wir in der Thematik weitermachen, hier noch ein Lemma sowie ein Satz, auf deren Beweis wir verzichten, deren Aussage jedoch später nutzen werden.

Definition 5. Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e und $x \in A$ normal.
Wir bezeichnen mit $A_0(x)$ die kleinste C^*-Unteralgebra in A, welche x, x^* und e enthält. Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir auch nur A_0 statt $A_0(x)$.

Lemma 6. Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e, $x \in A$ normal und $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra mit $e, x \in B$. Dann ist $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

Satz 7. Für $x \in A$ normal und $A_0 = A_0(x)$ gilt:

(a) Es existiert ein Homöomorphismus $\Psi : \Gamma_{A_0} \to \sigma(x)$.

(b) Ψ induziert isometrische *-Isomorphismen

$$C(\sigma(x)) \cong C(\Gamma_{A_0}) \cong A_0$$

s.d. id bzw. $\overline{id}$ bzw. $\mathbf{1} \in C(\sigma(x))$
auf x bzw. x^* bzw. $e \in A_0$ abgebildet werden.

Als nächstes möchten wir beliebige C^*-Algebren als Unteralgebren der Operatoren $L(H)$ auf einem geeigneten Hilbertraum H realisieren; dafür ist die GNS-Konstruktion vonnöten, welche den Hilbertraum H schrittweise mit Hilfe bestimmter Funktionale auf der C^*-Algebra konstruiert:

Definition 8. Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e.
Wir bezeichnen ein $\omega \in A^{'}$ als *Zustand*, falls $\omega(e) = ||\omega|| = 1$ gilt und notieren die Menge aller Zustände auf A als $S(A)$.

Definition 9. Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e.
Ein selbstadjungiertes $x \in A$ heißt *positiv*, falls $\sigma(x) \subset [0, \infty[$ gilt.

Folgendes Lemma soll es uns nun ermöglichen, zu einem gegebenen Zustand ω auf A ein Skalarprodukt zu konstruieren und somit einen Hilbertraum zu assoziieren:

Lemma 10. Sei A eine C^*-Algebra mit Einheit e und $x, y \in A$ selbstadjungiert. Dann gilt:

(a) Für alle $\omega \in S(A)$ ist $\omega(x) \in \mathbb{R}$ und für alle $\lambda \in \sigma(x)$ existiert ein $\omega \in S(A)$ mit $\omega(x) = \lambda$.

(b) x ist positiv $\Leftrightarrow$ $\omega(x) \geq 0$ für alle $\omega \in S(A)$.

(c) x, y positiv $\Rightarrow$ $x + y$ ist positiv.

(d) Es existieren positive $x_+, x_- \in A$, s.d. $x = x_+ - x_-$ und $x_+x_- = x_-x_+ = 0$.

(e) x ist positiv $\Leftrightarrow$ es existiert ein $u \in A$ mit $x = u^*u$.

Beweis. wir führen an dieser Stelle nur den Beweis zu a):
Betrachte den *-Isomorphismus $\Phi : A_0 \to C(\sigma(x))$ aus Satz 7. Wir definieren

$$\omega_0 : C(\sigma(x)) \to \mathbb{C} \qquad \omega_0(\Phi(a)) := \omega(a)$$

ω_0 ist wohldefiniert, da Φ bijektiv ist, und stetig, d.h. $\omega_0 \in C(\sigma(x))'$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (s. Werner, Theorem II.2.5) existiert nun ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ, s.d. $\omega_0(\Phi(a)) = \int \Phi(a) d\mu$. Des Weiteren ist

$$1 = \omega_0(1) = \mu(\sigma(x)) \leq ||\mu|| = ||\omega_0|| \leq ||\omega|| = 1$$

d.h. μ ist ein positives Wahrscheinlichkeitsmaß.
Nun gilt aber $\omega(x) = \omega_0(\Phi(x)) = \int \Phi(x) d\mu \in \mathbb{R}$, da $\Phi(x) = id$ die Menge $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ (Lemma 3 (c)) identisch auf sich abbildet und $\mu \geq 0$ ist. Damit wäre der erste Teil von (a) gezeigt.
Für den zweiten Teil sei $\lambda \in \sigma(x)$. Betrachte $\omega_0 \in A_0'$ mit $\omega_0(a) := \Phi(a)(\lambda)$ für $a \in A_0$. Da $\Phi(a)(\lambda) \in \sigma(a)$, gilt $|\omega_0(a)| \leq ||a||$ für alle $a \in A_0$.
Außerdem ist $\omega_0(e) = \Phi(e)(\lambda) = \mathbf{1}(\lambda) = 1$, woraus $||\omega_0|| = 1$ folgt.
Also ist $\omega_0 \in S(A_0)$ und wir können ω_0 mit dem Satz von Hahn-Banach zu einem Zustand $\omega \in S(A)$ fortsetzen, welcher nun $\omega(x) = \lambda$ erfüllt. $\square$

Sei nun $\omega \in S(A)$. Für $x, y \in A$ setzen wir $[x, y]_\omega := \omega(y^* x)$.
Offensichtlich gilt für alle $x, x_1, x_2, y \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $[x_1 + x_2, y]_\omega = [x_1, y]_\omega + [x_2, y]_\omega$
- $[\lambda x, y]_\omega = \lambda [x, y]_\omega$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned}
\overline{[x, y]_\omega} &= \overline{\omega(y^* x)} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{\omega(a + ib)} \\
&= \overline{\omega(a) + i\omega(b)} \\
&\overset{(**)}{=} \omega(a) - i\omega(b) \\
&= \omega(a - ib) \\
&= \omega((a + ib)^*) \\
&= \omega(x^* y) = [y, x]_\omega
\end{aligned}$$

wobei wir in (*) $z := y^* x \in A$ als $z = a + ib$ geschrieben haben, mit selbstadjungierten a und b, genauer $a := \frac{1}{2}(z + z^*)$ und $b := \frac{1}{2i}(z - z^*)$
und in (**) Lemma 10 (a) ($\omega(x) \in \mathbb{R}$) nutzten.
Mit Lemma 10 (e) ist $x^* x$ positiv für alle $x \in A$ und mit (b) gilt dann
$[x, x]_\omega = \omega(x^* x) \geq 0$. Außerdem gilt offensichtlich $x = 0 \Rightarrow [x, x]_\omega = 0$.
Hingegen gilt i.A. nicht, dass $[x, x]_\omega = 0 \Rightarrow x = 0$; wir definieren daher
$I_\omega := \{x \in A \quad | \quad [x, x]_\omega = 0\}$ und werden nach dem folgenden Lemma zu A/I_ω übergehen.

Lemma 11. Sei A eine C^*-Algebra und $\omega \in S(A)$. Dann gilt:

(a) $|[x, y]_\omega| \leq [x, x]_\omega^{\frac{1}{2}} \cdot [y, y]_\omega^{\frac{1}{2}}$ für alle $x, y \in A$

(b) $[x, x]_\omega = 0 \Leftrightarrow [x, y]_\omega = 0$ für alle $y \in A$

(c) Für alle $a, x \in A$ gilt: $[ax, ax]_\omega \leq ||a||^2 \cdot [x, x]_\omega$

(d) I_ω ist ein Untervektorraum von A mit Linksidealeigenschaft:

$$a \in A, x \in I_\omega \Rightarrow ax \in I_\omega$$

Beweis. .

zu (a) wie der Beweis der CSU.

zu (b) offensichtlich gilt (a) $\Rightarrow$ (b).

zu (c) wir halten fest:
- $[ax, ax]_\omega = \omega((ax)^* ax) = \omega(x^* a^* ax)$
- $||a||^2 [x, x]_\omega = \omega(x^* ||a||^2 x)$

Da A eine C^*-Algebra ist, gilt $||a^* a|| = ||a||^2$ und somit $\sigma(a^* a) \subset [-||a||^2, ||a||^2]$,
da $|\lambda| \leq ||a^* a|| = ||a||^2$ für alle $\lambda \in \sigma(a^* a)$
$\Rightarrow \sigma(||a||^2 e - a^* a) \subset [0, 2||a||^2] \subset [0, \infty[$.

Also ist $||a||^2 e - a^*a$ positiv und mit Lemma 10 (e) wählen wir ein $u \in A$ mit $u^*u = ||a||^2 e - a^*a$. Es folgt

$$\begin{aligned} ||a||^2[x,x]_\omega - [ax,ax]_\omega &= \omega(x^*||a||^2 x - x^*(a^*a)x) \\ &= \omega(x^*(||a||^2 e - a^*a)x) \\ &= \omega(x^*u^*ux) \\ &= \omega((ux)^*ux) \geq 0 \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichung erst Lemma 10 (e), dann Lemma 10 (b) benutzt haben.

zu (d) Mit $x, y \in I_\omega$ ist nach (b) auch $x + y \in I_\omega$. Nach den Vorüberlegungen ist $\lambda x \in I_\omega$ klar für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in I_\omega$, d.h. I_ω ist ein UVR von A.
Seien nun $a \in A, x \in I_\omega$.
Dann ist nach (c) $[ax, ax]_\omega \leq ||a||^2[x,x]_\omega = 0$ und somit auch $ax \in I_\omega$.

□

Wie vorher angemerkt, sind wir mit diesem Lemma nun berechtigt, den Quotienten A/I_ω zu betrachten sowie $\langle x + I_\omega, y + I_\omega\rangle := [x,y]_\omega$ zu definieren. Nun ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ ein Skalarprodukt per Konstruktion und die Vervollständigung von $(A/I_\omega, \langle\cdot,\cdot\rangle_\omega)$ nennen wir $(H_\omega, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d.h. wir ordnen dem Zustand ω kanonisch einen Hilbertraum H_ω zu.
Um zu sehen, dass Elemente aus A mit Operatoren auf H identifiziert werden können, definieren wir

$$\tilde{\pi}_\omega : A \to L(A/I_\omega) \qquad \tilde{\pi}_\omega(a)(x + I_\omega) := ax + I_\omega$$

Nach Lemma 11 (d) ist $\tilde{\pi}_\omega(a)$ wohldefiniert, die Linearität ist klar, (c) dieses Lemmas liefert uns

$$\begin{aligned} ||\tilde{\pi}_\omega(a)|| &= \sup_{||[x]||\leq 1} ||\tilde{\pi}_\omega(a)(x + I_\omega)|| \\ &= \sup_{||[x]||\leq 1} \langle ax + I_\omega, ax + I_\omega\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{||[x]||\leq 1} [ax, ax]_\omega^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{||[x]||\leq 1} ||a|| \cdot [x,x]_\omega^{\frac{1}{2}} \leq ||a|| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{\pi}_\omega(a)$ ist stetig.
Da $||e + I_\omega|| \leq 1$, folgt außerdem $||\tilde{\pi}_\omega(a)|| \geq ||ae + I_\omega|| = [a,a]_\omega^{\frac{1}{2}}$.
A/I_ω liegt per Konstruktion dicht in H_ω; wir können also $\tilde{\pi}_\omega(a)$ auf H_ω normerhaltend zu $\pi_\omega(a)$ fortsetzen, s.d. $\pi_\omega(a) \in L(H_\omega)$ gilt.

Lemma 12. $\pi_\omega : A \to L(H_\omega)$ ist ein stetiger *-Homomorphismus, welcher

$$[a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} \leq ||\pi_\omega(a)|| \leq ||a||$$

für alle $a \in A$ erfüllt.

Beweis. Da A/I_ω dicht in H_ω liegt, genügt es, im Folgenden Elemente aus A/I_ω zu betrachten; für Elemente in $H_\omega \setminus (A/I_\omega)$ folgen die Aussagen aus Stetigkeitsgründen. Per Konstruktion gilt für alle $a, b \in A$

$$\begin{aligned}\pi_\omega(ab)(x + I_\omega) &= abx + I_\omega \\ &= \pi_\omega(a)(bx + I_\omega) \\ &= \pi_\omega(a)(\pi_\omega(b + I_\omega)) \\ &\Rightarrow \pi_\omega(ab) = \pi_\omega(a)\pi_\omega(b)\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für $x, y \in A$ beliebig:

$$\begin{aligned}\langle x + I_\omega, \pi_\omega(a^*)(y + I_\omega)\rangle_\omega &= \langle x + I_\omega, a^*y + I_\omega\rangle_\omega \\ &= \omega(y^*ax) \\ &= \langle ax + I_\omega, y + I_\omega\rangle_\omega \\ &= \langle \pi_\omega(a)(x + I_\omega), y + I_\omega\rangle_\omega\end{aligned}$$

und somit $\pi_\omega(a^*) = (\pi_\omega(a))^*$.
Der zweite Teil des Lemmas wurde bereits gezeigt. □

Definition / Satz 13. Wir definieren nun einen Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit

$$H := \bigoplus_{\omega \in S(A)} H_\omega = \{(t_\omega)_{\omega \in S(A)} : t_\omega \in H_\omega, \sum_{\omega \in S(A)} \langle t_\omega, t_\omega\rangle_\omega < \infty\}$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle (t_\omega)_{\omega \in S(A)}, (s_\omega)_{\omega \in S(A)}\rangle := \sum_{\omega \in S(A)} \langle t_\omega, s_\omega\rangle_\omega$$

sowie den Operator

$$\pi : A \to L(H) \qquad \pi(a)((t_\omega)_{\omega \in S(A)}) := (\pi_\omega(a)(t_\omega))_{\omega \in S(A)}$$

Bemerkung 14. Folgendes stellen wir fest:

- π_ω ist ein *-Homomorphismus für alle $\omega \in S(A) \Rightarrow \pi$ ist ein *-Homomorphismus.
- $||\pi(a)|| = \sup_{\omega \in S(A)} ||\pi_\omega(a)||$ und somit

  $$\sup_{\omega \in S(A)} [a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{\omega \in S(A)} ||\pi_\omega(a)|| = ||\pi(a)|| \leq ||a||$$

  für alle $a \in A$.

Dass π isometrisch ist, zeigt das nächste

Lemma 15. Für jedes $a \in A$ existiert ein $\omega \in S(A)$ mit $[a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} = ||a||$.

Beweis. Sei $a \in A$ beliebig und setze $x := a^*a$.
x ist selbstadjungiert $\Rightarrow$ x ist normal $\Rightarrow$ $||x|| = r(x) \in \sigma(x)$.
Mit Lemma 10 (a) existiert ein $\omega \in S(A)$ mit $\omega(x) = ||x||$, d.h.

$$[a,a]_\omega = \omega(a^*a) = \omega(x) = ||x|| = ||a^*a|| = ||a||^2$$

und somit $[a,a]_\omega^{\frac{1}{2}} = ||a||$. $\square$

Insgesamt haben wir also mit der GNS-Konstruktion folgendes Theorem bewiesen:

Theorem 16. (Satz von Gelfand-Naimark)
Für eine C^*-Algebra A mit Einheit existiert ein Hilbertraum H und ein isometrischer *-Homomorphismus

$$\pi : A \to L(H)$$