Operatorhalbgruppen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, dann ist die Loesung der gewoehnlichen DGl $u' = Au, \quad u(0) = x_0$ gegeben durch $u(t) = x_0 e^{tA}$. Ist A ein stetiger Operator auf einem Banachraum, so laesst sich auch hier die Loesung der zugehoerigen partiellen DGl als absolut konvergente Exponentialreihe $\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ schreiben. Mit dem Konzept der Operatorhalbgruppen soll dieser Ansatz auf algemeine Operatoren erweitert werden.
Sei im folgenden immer X ein Banachraum.

Definition 1 (Operatorhalbgruppe, C_0-Halbgruppe)
Eine Operatorhalbgruppe ist eine Famillie von Operatoren $(T_t)_{t\geq 0}$, $T_t \in L(X)$, die folgende Eigenschaften erfuellt:

(1) $T_0 = Id$

(2) $T_{s+t} = T_s T_t, \quad \forall s,t \geq 0$

(3) $\lim_{t\to 0} T_t x = x$
Wir nennen (T_t) stark stetig oder C_0-Halbgruppe.

(3') $\lim_{t\to 0} \|T_t - Id\| = 0$
In diesem Fall nennen wir (T_t) Normstetig

Lemma 2 (Eigenschaften von C_0-Halbgruppen)
Sei $(T_t)_{t\geq 0}$eine C_0-Halbgruppe in X.

(a) Es existieren $M \geq 1,\ \omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T_t\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$

(b) $T : [0,\infty) \times X \to X,\ (t,x) \mapsto T_t x$ ist stetig, isbesondere ist fuer alle $x \in X$, $u_x : t \mapsto T_t x$ gleichmaessig stetig auf beschraenkten Intervallen.

Definition 3 (Erzeuger)
Sei (T_t) eine $C_0 Halbgruppe$ in X. Als (infitesimalen) Erzeuger von (T_t) bezeichen wir die Abbildung $A : dom(A) \to X$

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{T_h x - x}{h}, \qquad dom(A) = \{x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{T_h x - x}{h}\ existiert\}$$

Offenbar ist A linear in x, somit ist A ein (unbeschraenkter) Operator und $dom(A)$ ein Unterraum von X.

BESPIELE:
1.) Ist $A \in L(X)$, so ist $T_t = x_0 e^{tA}$ eine Normstetige Halbgruppe mit Erzeuger A.
2.) Die Waermeleitungshalbgruppe auf verschiedenen Raumen $(L^p(\mathbb{R}^n), C_0(\mathbb{R}^n))$ ist gegeben durch: $T_0 = Id$,

$$T_t f(x) = \sqrt{(4\pi t)}^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\ dy$$

Dies ist eine C_0-Halnbgruppe. Der Erzeuger ist der Laplace-Operator Δ. Dies laesst sich mithilfe der Fourier-Transformation einsehen. Wir betrachten die Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)}^n} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, dann ist $T_t f = \gamma_t * f$ die Faltung von f mit γ_t. Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, dann gilt:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\gamma_t * f - f}{t} = \Delta f, \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2\pi}^n \mathscr{F}\gamma_t \mathscr{F} f - \mathscr{F} f}{t} = \mathscr{F}\Delta f \ \Leftrightarrow \ \lim_{t\to 0} \frac{e^{-ty^2}\mathscr{F} f - \mathscr{F} f}{t} = -y^2 \mathscr{F} f$$

Mit $\Phi(x) = \frac{e^x - 1}{1} - 1,\ g = \mathscr{F} f$ sieht man nun

$$\left\| \frac{e^{-ty^2} g - g}{1} + y^2 g \right\|^2 = \left\| \Phi(-y^2 t)(-y^2 g) \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(-y^2 t)^2 (-y^2 g)^2\ dy \to 0$$

Da der Integrand punktweise gegen null geht und von der L^2 funktion $y^2 g$ majorisiert wird.

$$dom(A) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : y^2 \mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} = W^2(\mathbb{R}^n) \textit{ der Sobolevraum}$$

Lemma 4 Sei A der Erzeuger von $(T_t)_{t\geq 0}$so gilt:

(a) $\int_0^t T_s x\ ds \in dom(A), \quad A(\int_0^t T_s x\ ds) = T_t x - x, \quad \forall x \in X$

(b) $T_t(dom(A)) \subset dom(A)$

(c) $\frac{d}{dt} T_t x = A T_t x = T_t A x, \quad \forall\ x \in dom(A)$

(d) $\int_0^t T_s A x\ ds = T_t x - x, \quad \forall\ x \in dom(A)$

Satz 5 Erzeuger von C_0-Halbgruppen sind dicht definiert und abgeschlossen.

Satz 6 Sei A Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf X, $x_0 \in dom(A)$ so hat das abstrakte Cauchyproblems

$$u' = Au, \quad u(0) = x_0$$

genau eine Loesung $u \in C^1([0,\infty), dom(A))$. Diese ist gegeben durch $u(t) = T_t x_0$. Ausserdem haengt u stetig von x_0 ab.

Korollar 7 Operatorhalbgruppen mit gleichem Erzeuger sind gleich.

Satz 8 Sei A Erzeuger der C_0-Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ auf X, dann sind Aequivalent:

(1) $(T_t)_{t\geq 0}$ist Normstetig

(2) A ist stetig

(3) dom(A)=X

des weiteren gilt $T_t = x_0 e^{tA}$.

Satz 9 (Hille-Yosida)
Ein Operator A ist genau dann Erzeuger einer C_0-Halbgruppe T_t wenn gilt:

(1) A ist dicht definiert und abgeschlossen

(2) $\exists M \geq 1, \omega \in \mathbb{R} : (\omega, \infty) \subset \rho(A)$,
$\|(\lambda - \omega)^n (\lambda - A)^{-n}\| \leq M, \quad \forall \lambda > \omega, n \in \mathbb{N}$

des weiteren gilt $\|T_t\| \leq M e^{\omega t}$