Mannigfaltigkeiten

Brüning Cords

25. Januar 2012

1 Mannigfaltigkeiten

Definition 1.1: 1. Sei M ein topologischer Hausdroff-Raum und X ein lokalkonvexer Raum. Eine $X-$Karte auf M ist ein homöomorphismus

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset X$$

Für eine offene Teilmenge $U \subset M$

2. Zwei $X-$Karten
$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \varphi(U) \\ \psi &: V \to \psi(V) \end{aligned}$$
heißen kompatibel wenn die Abbildung
$$\begin{aligned} \Phi : \varphi(U \cap V) &\to \psi(U \cap V) \\ x &\mapsto \psi(\varphi^{-1}(x) \end{aligned}$$
ein Diffeomorphismus ist.

3. Ein <u>$X-$Atlas</u> ist auf M ist eine Familie
$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)\}$$
von <u>paarweisen kompaktiblen</u> Karten mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ gilt.

4. Zwei Atlanten heißen Kompatibel wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist.

5. Ein maximaler Atlas heißt auch <u>glatte-X-Strucktur auf M</u> und das paar $(M, \mathcal{A})$ dann <u>glatte Mannigfaltigkeit</u>.

Beispiel 1.2:
Die einfachsten Mannigfaltigkeiten sind offene Teilmengen von lokalkonvexen Räumen. Zum Beispiel, $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ oder $A^\times$ für eine Banachalgebra A. Als Karte wählt man einfach die identität. Um dies zu zeigen benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 1.3:
Für eine Algebra $\mathcal{A}$ mit stetiger Multiplikation (topologische Algebra) mit 1 gilt: Wenn es eine Umgebung U gibt die die 1 enthält, dann ist $\mathcal{A}^\times$ offen in $\mathcal{A}$

Beweis. Die Linksmultiplikation $\lambda_x : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \lambda_x(y) = xy$ ist stetig da die Algebramultiplikation stetig ist. Für $x \in \mathcal{A}^\times$ ist λ_x invertierbar mit $\lambda_x^{-1} = \lambda_{x^{-1}}$. Also ist λ_x eingeschränkt auf die Einheiten ein Homöomorphismus. Dann gilt aber

$$x = \lambda_x(1) \in \lambda_x(int(A^\times))$$

welches offen ist. Also ist jeder Punkt in einer offenen Umgebung. □

Weiterhin gilt für eine Banachalgebra das sie eine topologische Algebra ist mit einer 1 Umgebung.

1. Die Multiplikation λ ist stetig da für zwei Folgen $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt,

$$||x_n y_n - xy|| = ||x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|| \leq ||x_n(y_n - y)|| + ||(x_n - x)y|| \to 0$$

2. Es gibt eine Umgebung U um die 1 die eine Teilmenge von den Einheiten ist. Sei also nun $||x|| < 1$. Dann gilt für die Neumannreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Das sie absolut konvergiert, da

$$||\sum_{n=0}^{\infty} x^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x||^n = \frac{1}{1 - ||x||} < \infty$$

Also gilt

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1$$

Also sind Elemente um die 1 wieder invertierbar.

Also ist $\mathcal{A}^{\times}$ offen in $\mathcal{A}$ welcher ein Lokalkonvexer Raum ist.

Beispiel 1.4:
Sind M eine X-Mannigfaltigkeit und N eine Y-Mannigfaltigkeit, So ist $M \times N$ eine $X \times Y$-Mannigfaltigkeit. Ein Atlas $\mathcal{A}$ erhält man durch

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$$

, für die Atlanten $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ von M und $\{\psi_j\}_{j\in J}$ von N.

Beispiel 1.5 (Spähren)**:**
Sei $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$
Dann ist

$$\begin{aligned} U_N &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0,\dots,0,-1)\} \\ U_S &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x \neq (0,\dots,0,+1)\} \end{aligned}$$

eine offene Überdeckung von von $\mathbb{S}^n$.

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_{n+1}+1)^{-1}(x_1,\dots,x_n) \\ \varphi_S : U_S &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_{n+1}-1)^{-1}(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

definieren Kompaktible Karten.

Beispiel 1.6 (Torus)**:**
Wir betrachten den Torus T als Quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sei $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$. Dann wählen wir dazu die offenen quadrate $(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}) \times (y_0 - \frac{1}{2}, y_0 + \frac{1}{2})$. Betrachten wir dazu die Bilder in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ so erhalten wir eine offene Überdeckung. Setzen wir nun

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\to \varphi_i(U_i) \\ (x, y) &\mapsto (x - x_i, y - y_i) \end{aligned}$$

dann erhalten wir Karten von T in den $\mathbb{R}^2$. Wenn wir die Punkte $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ wählen, und dann die entsprechenden offenen quadrate darum so sieht man das drei Mengen schon reichen.

Beispiel 1.7 (Kleinsche Flasche)**:**
Betrachten wir die Die kleinsche Flasche K als Qutient vom Torus nach der Involution $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$ ist ebenfals eine Mannigfaltigkeit. Als Karte kann man jedes offene Rechteck nehmen, das in x-Richtung maximal die länge $\frac{1}{2}$ hat und in y-Richtung höhstens länge 1.

Beispiel 1.8 ($\mathbb{R}P^n$)**:**
Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Darauf betrachten wir die Äquvalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dieser Raum wird dann $\mathbb{R}P^n$ genannt.
Als offene Überdeckung wählen wir $U_i := \mathbb{R}P^n \setminus \{x_i \neq 0\}$. Für die ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_i : U_i &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Die Kartenwechsel sind dann gegeben durch

$$\psi_{i,j}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

Die ist beliebig oft differenzierbar. Dadruch wird $\mathbb{R}P^n$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1.9 (Drehgruppe $SO(3)$)**:**
Wir Betrachtenzunähst die Abbildung

$$CAY : \mathbb{R}^3 \to SO(3) \quad A \mapsto (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} - A)^{-1}$$

Wobei wir hier $A \in \mathbb{R}^3$ auffassen als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

. Die Cayley Abbildung ist injektiv, ihre Umkehrabbildung kann dann als Karte von $SO(3)$ dienen und wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} CAY(A) = B \qquad &\Leftrightarrow B(\mathbb{1} - A) = \mathbb{1} + A \\ &\Leftrightarrow (B + \mathbb{1})A = B - \mathbb{1} \\ &\Leftrightarrow A = (B + \mathbb{1})^{-1}(B - \mathbb{1}) \end{aligned}$$

Der Ausdruck $(B+\mathbb{1})^{-1}$ ist genau dann definiert wenn -1 kein Eigenwert ist. Das sind aber genau die Matrizen die eine Drehung um π darstellen. Also brauch man für jede Drehung um π eine Abbildung $CAY_{e_i}^{-1}$

Satz 1.10:
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit dann ist M auch eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ ein Atlas im Sinne einer Untermannigfaltigkei von M mit $\varphi_i(U_i) = V_i \cap \mathbb{R}_0^d$ für alle $i \in I$ und $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Dann ist $\pi \circ \varphi_i(U_i) = \tilde{V}_i \subset \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus. Also ist $\bigcup\limits_{i\in I}\{\pi \circ \varphi\}$ ein Atlas im Sinne einer Mannigfaltigkeit. □

Satz 1.11:
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ $M \neq \emptyset$. Dann ist äquivalent:

1. M ist $d-$dimensionale Untermannigfaltigkei.
2. Für alle $a \in M$ gibt es $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $n-d$ C^1- Abbildungen $f_1, \ldots, f_{n-d} : U \to \mathbb{R}$, so dass
   a) $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{n-d}(x) = 0\}$
   b) $df_1(a), \ldots, df_{n-d}(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind linear Unabhängig.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$
Per Definition gibt es $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $\varphi : U \to V$, Diffeomorphismus, so dass $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}_0^d \cap V$. Wähle

$$\left.\begin{array}{rcl} f_1 & = & \varphi_{d+1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-d} & = & \varphi_n \end{array}\right\} : U \to \mathbb{R}$$

Da $d\varphi(a) = (d\varphi_1(a), \ldots, d\varphi_n(a)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ invertierbar ist folgt 2.
$2 \Leftarrow 1$
Wähle $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ so dass $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d, df_1(a), \ldots, df_{n-d}(a)\}$ Basis von $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist (möglich nach b). Betrachte

$$\begin{aligned} F : U &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \lambda_1(x), \ldots, \lambda_d(x), f_1(x), \ldots, f_{n-d}(x) \end{aligned}$$

Dann ist $dF(a) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d, df_1(a), \ldots, df_{n-d}(a))$ ist invertierbar. Nach den Satz über die Umkehrfunktion:
Es gibt $U_0 \subset U$ offen $a \in U_0$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $V = F(U_0)$ so dass $F : U_0 \to V$ ist Diffeomorphismus. Sei $x \in U_0$,

$$x \in M \underset{a}{\Leftrightarrow} f_1(x) = \cdots = f_{n-d}(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) \in \mathbb{R}_0^d \cap V$$

Also $F(M \cap U_0) = \mathbb{R}_0^d \cap V$

□

Definition 1.12:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar. Dann ist x einn regulärer Punkt falls $d[f(x)]$ surjektiv ist.
Wenn $y = f(x) \Rightarrow x$ regulärer Punkt gilt, dann heißt y regulärer Wert.

Satz 1.13:
$u \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^k$ C^1-Abbildung und $c \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert.
Falls $M := f^{-1}(\{c\})$ nicht leer ist, dann ist M eine $(n-k)-$dimensionale Untermannigffaltigkeit vom $\mathbb{R}^n$

Beweis. Sei $a \in M$. Setze

$$\begin{aligned} F : U &\to \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto f(x) - c \end{aligned}$$

Dann erfüllen $F_1, \dots, F_k$ die Bedingung aus Teil 2

1. $F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \Leftrightarrow x \in M$
2. $df(a) = (df_1(a), \dots, df_k(a))$ ist surjektiv $\Rightarrow dF_1(a), \dots\ dF_k(a)$ ist linear unabhängig.

□

Beispiel 1.14:
Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Dann gilt $f^{-1}(\{d\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = d\}$ und $df(x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2x \quad 2y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist surjektive genau dann, wenn $(x,y) \neq 0$

$$0 \in f^{-1}(\{d\}) \Leftrightarrow 0 \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = d\} \Leftrightarrow 0 = d$$

2 Lie-gruppen

Definition 2.1 (Lie-Gruppen)**:**
Sei G eine Gruppe. Falls G zusätzlich eine glatte X-Struktur besitzt und die Gruppenoperationen

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\to G & L : G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

glatte Abbildungen sind, so heißt G auf X modellierte Lie-gruppe

Beispiel 2.2 ($GL_n\mathbb{K}$)**:**
Wir wollen zeigen das die Menge der invertierbaren Matrizen eine Liegruppe sind.
Seien $M, N \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $||M||_{op}, ||N||_{op} \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$||MN||_{op} = \sup_{||v|| \leq 1} ||MNv|| \leq \sup_{||w|| \leq ||N||_{op}} ||Mw|| = ||N||_{op} \sup_{||w|| \leq 1} ||Mw|| = ||N||_{op} ||M||_{op} \leq \varepsilon^2$$

Also ist MN stetig.
Um die stetigkeit von $A \mapsto A^{-1}$ zu zeigen, verwenden wir die cramersche Regel die besagt:
Für ein Gleichungssystem $Ax = b$ gilt $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det A}$ mit

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun $AB = \mathbb{1}$ so erhält man n Gleichungssysteme der Form $AB_i = e_i$ die alle von der Determinaten abhängen, welche stetig ist.
Somit ist $GL_n(\mathbb{K})$ eine topologische Gruppe. Da $GL_n(\mathbb{K})$ eine Mannigfaltigkeit ist, ist es somit auch eine Liegruppe.

Beispiel 2.3 (S^3)**:**
Wir betrachten den 4-dimensionalen Einheitskreis

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \quad : ||x|| = 1\}$$

Dies ist eine Mannigfaltigkeit nach den ersten Teil.Bleibt zu zeigen das es auch eine topologische Gruppe ist.
Als erstes werden wir $\mathbb{S}^3$ eine Gruppenstrucktur geben. Dazu werden wir $\mathbb{S}^3$ einbetten in $\mathbb{H}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{H} \\ e_1 &\mapsto 1 \\ e_2 &\mapsto i \\ e_3 &\mapsto j \\ e_4 &\mapsto k \end{aligned}$$

Für $x, y \in \mathbb{H}$ gilt $||xy|| = ||x|| \quad ||y||$ somit ist $\mathbb{S}^3$ abgeschlossen unter multiplikation. Weiterhin gilt da $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist das für alle $x \in \mathbb{H}^\times$ existiert ein x^{-1}. Dies ist auch ein Element in $\mathbb{S}^3$ da $1 = ||xx^{-1}|| = ||x|| \quad ||x^{-1}|| = ||x^{-1}||$. Dadurch erhalten wir somit eine Gruppenstrucktur auf $\mathbb{S}^3$.
Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist die selbe wie $x \mapsto \overline{x}$ somit kann man $\delta = \varepsilon$ wählen. Somit ist die abbildung stetig da $||x|| = ||\overline{x}||$ gilt.
Seien $x_n \to x$ und $y_n \to y$ zwei folgen in S^3. Dann gilt,

$$||x_n y_n - xy|| = ||x_n y_n - x_n y + x_n y - xy|| \leq ||x_n(y_n - y)|| + ||(x_n - x)y|| \to 0$$

Die Stetigkeit folgt aus

Beispiel 2.4 (Einheitengruppe einer Banachalgebra)**:**
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Banachalgebra und $\mathcal{A}^\times$ die Einheiten. Dann wissen wir das $\mathcal{A}^\times$ eine Mannigfaltigkeit ist und das die Multiplikation stetig ist. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
d\lambda(x,y)(v,w) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\lambda(x+vt, y+wt) - \lambda(x,y) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\lambda(x,y) + \lambda(x,wt) + \lambda(vt,y) - \lambda(x,y) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\lambda(x,wt) + \lambda(vty,y) \\
&= \lambda(x,w) + \lambda(v,t)
\end{aligned}$$

Somit ist es Auch eine C^1 Abbildung. Das die Multiplikation eine glatte abbildung folgt dann Induktiv.
Für die stetigkeit der Inversabbildung benötigen wir wieder ein Lemma.

Lemma 2.5:
Für eine topologische Algebra mit eins gilt wenn die Abbildung

$$\iota : \mathcal{A}^\times \to \mathcal{A}^\times \qquad\qquad x \mapsto x^{-1}$$

in der 1 stetig ist dann ist sie stetig.

Beweis. Wir bezeicheinen mit $\mathcal{A}^\times$ die Einheiten, $\lambda_x(a) = xa$ und $\rho_x(a) = ax$. Seien $x, y \in \mathcal{A}^\times$ dann gilt:

$$\iota(\lambda_x(y)) = (\lambda_x(y))^{-1} = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = \rho_{x^{-1}}(y^{-1}) = \rho_{x^{-1}}\iota(y)$$

Wenn man nun $y = 1$ setzt dann folgt die Behauptung. $\square$

Wir betrachten wieder die Neumannreihe für $||x|| < 1$ und denn Ball um die 1. Für die gilt

$$||\iota(1-x)-1|| = ||(1-x)^{-1}-1|| = ||\sum_{n=1}^{\infty} x^n|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} ||x||^n - 1 = \frac{1}{1-||x||} - 1 = \frac{||x||}{1-||x||} \to 0$$

für kleine x. Also ist ι in 1 stetig und somit stetig.
ι ist $n-$mal differenzierbar.
Dies zeigen wir per Induktion. Für $n = 1$ betrachten wir $(x, y, t) \in (\mathcal{A}^\times)^{[\infty]}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(\iota(x+ty) - \iota(x)) &= \frac{1}{t}((x+ty)^{-1} - x^{-1} \\
&= \frac{1}{t}(x+ty)^{-1}(x - (x+ty))x^{-1} \\
&= -(x+ty)^{-1}yx^{-1} \\
&= -\iota(x+ty)y\iota(x)
\end{aligned}$$

und da ι stetig ist, ist auch der Ausdruck in der 0 stetig. Somit existiert $d\iota(x)(v)$. Angenommen die Aussage gilt für $k-1$ und $k>1$. Dann ist ι C^1 nachdem was wir grade gezeigt haben mit $\iota^{[1]}(x,y,t) = -\iota(x+yt)y\iota(x)$.Dies ist aber die Zusammensetzung von der glatten Abbildung $(x,y,t) \mapsto x+ty$ und einer nach Induktionsvorraussetzung einer C^{k-1} ι. Also ist es eine C^k.