Universität Hamburg
Department Mathematik

Unbeschränkte Operatoren

Seminar über Funktionalanalysis
J.- Prof. Dr. Christoph Wockel

Ausgearbeitet und vorgetragen von
Babette Bode

1 Einleitung

Die Erkenntnisse aus den vorherigen Kapiteln ("Funktionalanalysis"von Dirk Werner, Kapitel 1-6) sollen auf Differentialoperatoren übertragen werden.
Dabei treten zwei Probleme auf:
Zum einen sind Differentialoperatoren in der Regel nicht auf Hilberträumen definiert (sondern nur auf Teilräumen), außerdem sind sie auf dem Definitionsbereich nicht unbedingt stetig.
In diesem Kapitel geht es darum, den "richtigen"Definitionsbereich für unbeschränkte Operatoren zu finden.

H bezeichnet in diesem Kapitel immer einen komplexen Hilbertraum.

1.1 Definitionen

1. Ein *Operator* $T : H \supset dom(T) \to H$ ist eine lineare Abbildung, wobei $dom(T)$ ein Unterraum von H ist, der im Allgemeinen nicht abgeschlossen ist.

2. Falls gilt: $\overline{dom(T)} = H$, so heißt T *dicht definiert.*

3. Ein *Operator* $S : H \supset dom(S) \to H$ heißt *Erweiterung* von T, falls $dom(T) \subset dom(S)$ und $Sx = Tx$ für $x \in dom(T)$ gilt.

4. T und S sind *gleich* ($T = S$), falls $T \subset S$ und $S \subset T$ gilt (also $dom(T) = dom(S)$ und $Sx = Tx$ für $x \in dom(T)$).

5. T heißt *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in dom(T)$ gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

1.2 Bemerkung

- Nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz ist ein symmetrischer Operator mit $dom(T) = H$ stetig und somit selbstadjungiert, also $T = T^*$.

- Definiere $dom(T^*) := \{y \in H : x \mapsto \langle Tx, y\rangle \text{ stetig auf } dom(T)\}$.
Für $y \in dom(T^*)$ lässt sich $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ eindeutig zu einem stetigen linearen Funktional auf H fortsetzen (nach Fréchet-Riesz: $\langle ., z\rangle$, $z \in H$).
Schreibe $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \ \forall x \in dom(T)$. z ist eindeutig durch y festgelegt, da T dicht definiert ist. Wir setzen dann $z = T^*y$.

1.3 Definitionen

Sei T dicht definiert.

1. $T^* : H \supset dom(T^*) \to H$ ist der *adjungierte Operator* von T.
2. T heißt *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.

1.4 Beispiele

Siehe Seite 345 f. in "Funktionalanalysis"von Dirk Werner.

1. $T = i\frac{d}{dt}$ mit $dom(T) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$ ist symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert.
2. Der Multiplikationsoperator $Tx = fx$ mit

   $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $dom(T) = \{x \in L^2 : fx \in L^2\}$ ist selbstadjungiert.

1.5 Satz

Sei $T : H \supset dom(T) \to H$ dicht definiert.

Dann gilt:

a) T^* ist abgeschlossen.

b) T^* dicht definiert $\Rightarrow T \subset T^{**}$.

c) T^* ist dicht definiert und S ist eine abgeschlossene Erweiterung von T impliziert $T^{**} \subset S$.

1.6 Bemerkung

Im Punkt c) ist T^{**} die sogenannte Abschließung von T- die *kleinste abgeschlossene Erweiterung.*

Beweis vom Satz:

a) zu zeigen: für $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in dom(T^*)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in H$ und $\lim\limits_{n\to\infty} T^* y_n = z \in H$ gilt $y \in dom(T^*)$ und $z = T^* y$.

   Es gilt: $\langle Tx, y\rangle = \lim \langle Tx, y_n\rangle = \lim \langle x, T^* y_n\rangle = \langle x, z\rangle$.
   $\Rightarrow x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ist stetig.
   $\Rightarrow y \in dom(T^*)$ und $T^* y = z$.

b) $x \in dom(T)$ und $y \in dom(T^*) \Rightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$
Somit ist $y \mapsto \langle T^*y, x\rangle$ stetig auf $dom(T^*)$.
$\Rightarrow x \in dom(T^{**})$ und $\langle x, T^*y\rangle = \langle T^{**}x, y\rangle$ für $y \in dom(T^*)$.
Da $dom(T^*)$ dicht ist, gilt $Tx = T^{**}x \; \forall x \in dom(T)$, also

$$T \subset T^{**}.$$

c) Um die Behauptung zu zeigen, kann man den Graphen eines Operators nutzen.
Wiederholung: $gr(T) := \{(x, Tx) : x \in dom(T)\}$.
Es gilt: T ist abgeschlossen $\Leftrightarrow gr(T)$ ist abgeschlossen in $H \times H$.
$H \times H$ wird durch das Skalarprodukt

$$\langle (u, v), (x, y)\rangle = \langle u, x\rangle + \langle v, y\rangle$$

zum Hilbertraum und genügt der folgenden Norm:

$$\|(u, v)\| := (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}.$$

Es bleibt zu zeigen: $\overline{gr(T)} = gr(T^{**})$ (denn wenn T^{**} Abschließung von T ist, ist T^{**} Teilmenge jeder anderen abgeschlossenen Erweiterung S).

- " $\subset$ ": Dies folgt aus a) und b).
- " $\supset$ ": Es reicht zu zeigen: $gr(T)^\perp \subset gr(T^{**})^\perp$.

Für $(u, v) \in gr(T)^\perp$ gilt : $\langle x, u\rangle + \langle Tx, v\rangle = 0, \; \forall x \in dom(T)$.
$\Rightarrow v \in dom(T^*)$ und $T^*v = -u$.
Für $(z, T^{**}z) \in gr(T^{**})$ gilt dann:

$$\langle (z, T^{**}z), (u, v)\rangle = \langle z, u\rangle + \langle T^{**}z, v\rangle = \langle z, u\rangle + \langle z, T^*v\rangle = \langle z, u + T^*v\rangle = 0.$$

Dies zeigt die Behauptung.

1.7 Korollar

Sei $T : H \supset dom(T) \to H$ dicht definiert.

Dann gilt:

a) T ist symmetrisch $\Leftrightarrow T \subset T^*$.
Dann gilt auch $T \subset T^{**} \subset T^* = T^{***}$ und T^{**} ist symmetrisch.

b) T ist abgeschlossen und symmetrisch $\Leftrightarrow T = T^{**} \subset T^*$.

c) T ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow T = T^{**} = T^*$.

1.8 Definition

Ein symmetrischer, dicht definierter Operator heißt *wesentlich selbstadjungiert*, wenn seine Abschließung selbstadjungiert ist.

Die Cayley-Transformation

1.9 Lemma

Sei $T : H \supset dom(T) \to H$ dicht definiert.

Dann gilt:

a) $ker(T^* \mp i) = im(T \pm i)^\perp$
   $(\Rightarrow ker(T^* \mp i) = \{0\} \Leftrightarrow im(T \pm i)$ ist dicht in $H)$.

b) T ist abgeschlossen und symmetrisch $\Rightarrow im(T \pm i)$ ist abgeschlossen.

Beweis:

a) Es gilt $(T + i)^* = (T^* - i)$.

   $y \in im(T + i)^\perp$
   $\Leftrightarrow \langle (T + i)z, y\rangle = 0 \quad \forall z \in dom(T)$.
   $\Leftrightarrow y \in dom(T^*)$ und $0 = \langle z, (T^* - i)y\rangle \quad \forall z \in dom(T)$.
   $\Leftrightarrow y \in ker(T^* - i)$.

   $y \in im(T - i)^\perp$ geht genauso.

b) T ist symmetrisch, somit ist $\langle Tx, x\rangle$ immer reell. Somit ist

$$\|(T + i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 + 2Re\langle Tx, ix\rangle = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2.$$

   $\Rightarrow (T + i)^{-1} : im(T + i) \to dom(T)$ ex. und ist stetig.

   Für eine Folge $(x_n) \in dom(T)$ mit $(T + i)x_n \to y \in \overline{im(T + i)}$ ist $((T + i)x_n)$ eine Cauchfolge in $im(T + i)$ und somit ist (x_n) eine Cauchyfolge in $dom(T)$.
   $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in H$ und $Tx_n \to y - ix$.
   T ist abgeschlossen $\Rightarrow x \in dom(T)$ und $y - ix = Tx$,
   also $y = (T + i)x \in im(T + i)$.
   $(T - i)$geht genauso.

1.10 Satz

T sei dicht definiert und symmetrisch.
Dann sind äquivalent:

a) T ist selbstadjungiert.

b) T ist abgeschlossen und $ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

c) $im(T \pm i) = H$.

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b) Dass T abgeschlossen ist, folgt aus Satz 1.4 .
Sei $(T^* + i)x = 0$
$\Rightarrow \langle (T^* + i)x, (T^* + i)x \rangle = 0$
$\Rightarrow \langle T^*x, T^*x \rangle + \langle x, x \rangle = 0$
$\Rightarrow \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 = 0 \quad \forall x$
$\Rightarrow x = 0$.

Dies gilt auch für $(T^* - i)x$. $\Rightarrow ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

b) $\Rightarrow$ c) Folgt sofort aus dem vorherigen Lemma.

c) $\Rightarrow$ a) Da T symmetrisch und dicht definiert ist, gilt $T \subset T^*$.
Es bleibt zu zeigen: $dom(T^*) \subset dom(T)$:
Für $y \in dom(T^*)$ gilt mit c): $(T^* - i)y = (T - i)x$ für ein $x \in dom(T)$.
Da $T \subset T^*$ gilt: $(T^* - i)y = (T^* - i)x$ und mit Lemma 1.8a) folgt $y = x \in dom(T)$.

1.11 Korollar

T sei wie eben definiert.
Dann sind äquivalent:

a) T ist wesentlich selbstadjungiert.

b) $ker(T^* \pm i) = \{0\}$.

c) $im(T \pm i)$ ist dicht in H.

1.12 Satz

Sei $T : H \supset dom(T) \to H$ symmetrisch und dicht definiert.
T hat eine selbstadjungierte Erweiterung, genau dann wenn gilt

$$dimker(T^* + i) = dimker(T^* - i).$$

1.13 Bemerkung

$dimker(T^* \pm i)$ heißen *Defektindizes* von T.

1.14 Definition

Die Abbildung $U = (T+i)(T-i)^{-1}$ heißt *Cayley-Transformierte* des Operators T.

1.15 Lemma

Die Abbildung U ist eine invertierbare Isometrie.
$U^{-1} = i(U+1)(U-1)^{-1}$.

Beweis vom Satz:

" $\Leftarrow$ ": Es gilt: $\|(T+i)x\| = \|(T-i)x\| \ \forall x \in dom(T)$.

$\Rightarrow U : im(T-i) \to im(T+i) : (T-i)x \mapsto (T+i)x$ ist ein wohldefinierter, isometrischer, surjektiver Operator.
Die Orthogonalräume von $im(T \pm i)$ haben nach Annahme die gleichen Dimensionen, also können wir U zu einem unitären Operator $V : H \to H$ fortsetzen.
Zeige $V - Id$ ist injektiv:
Sei $Vy = y$. Dann ist auch $V^* y = y$.
Daher gilt $\forall x \in dom(T)$:

$$2i\langle x, y\rangle = \langle (T+i)x - (T-i)x, y\rangle = \langle (V-Id)(T-i)x, y\rangle = \langle (T-i)x, V^*y - y\rangle = 0.$$

Also ist y orthogonal zu $dom(T)$, also $y = 0$.

Definiere nun den Operator $S : H \supset im(V-Id) \to H : Vz - z \mapsto i(Vz + z)$,
also $S = i(V+Id)(V-Id)^{-1}$ auf $im(V-Id)$.
Zeige: S ist selbstadjungierte Erweiterung von T:

Für $x \in dom(T)$ ist $(V-Id)(T-i)x = 2ix$ und deshalb $x \in dom(S)$ mit $Sx = Tx$.
Also ist $T \subset S$.
S ist symmetrisch (nachrechnen- es gilt: S ist symmetrisch, falls $\langle Tx, x\rangle$ reell ist). Um die Selbstadjungiertheit zu zeigen, kann man Satz 1.9 nutzen.
Zeige $im(S \pm i) = H$:
$S - i = 2i(V-Id)^{-1}$ und $S + i = 2iV(V-Id)^{-1}$
$\Rightarrow$ jedes $z \in H$ lässt sich schreiben als

$$z = (S-i)(V-Id)(\tfrac{z}{2i}) = (S+i)(V-Id)V^*(\tfrac{z}{2i})$$

Also ist S selbstadjungiert.

" $\Rightarrow$ ": Annahme: T hat eine selbstadjungierte Erweiterung S.
Definiere $V = (S+i)(S-i)^{-1}$ auf $dom(V) = H$ und
$U = (T+i)(T-i)^{-1}$ auf $dom(U) = im(T-i)$.
Da $T \subset S$, gilt $U \subset V$.
V ist unitär, da $V : (S-i)x \mapsto (S+i)x$ isometrisch und surjektiv ist.
Nach Konstruktion gilt also: $V : im(T-i) \to im(T+i)$. Somit bildet V auch die Orthogonalräume aufeinander ab.
Mit Lemma 1.9 gilt dann $V : ker(T^*+i) \to ker(T^*-i)$ ist unitär und

$$dim(ker(T^*-i)) = dim(ker(T^*+i)).$$