von Neumann Algebren

Sören Berger
Seminar zur Funktionalanalysis
Universität Hamburg

10. Februar 2012

Definition 1. Sei $\mathcal{B}$ eine Algebra und $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ dann heißt

$$\mathcal{A}' := \{T \in \mathcal{B} | AT = TA \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$$

die *Kommutante* von $\mathcal{A}$. Wir schreiben $\mathcal{A}''$ statt $(\mathcal{A}')'$ und $\mathcal{A}'''$ statt $(\mathcal{A}'')'$ (Offensichtlich gilt $(\mathcal{A}'')' = ((\mathcal{A}')')' = (\mathcal{A}')''$).

Lemma 2. Für Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ einer Algebra gilt:

1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}'$
2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}' \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$
3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$
4. $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'''$

Beweis.
1. Für $T \in \mathcal{B}'$ gilt $TB = BT$ für alle $B \in \mathcal{B}$ insbesondere gilt also $TB = BT$ für alle $B \in \mathcal{A}$ also $T \in \mathcal{A}'$.
2. Aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'$ folgt das für alle $A \in \mathcal{A}$ und für alle $B \in \mathcal{B}$ $AB = BA$ gilt also $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$ Und umgekehrt genauso.
3. Es gilt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'$ und aus 2. folgt $\mathcal{A} \subset (\mathcal{A}')' = \mathcal{A}''$
4. Es gilt nach 3. $\mathcal{A}' \subset (\mathcal{A}')'' = \mathcal{A}'''$. Und es gilt wieder nach 3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$ und nach 1. folgt dann $\mathcal{A}''' = (\mathcal{A}'')' \subset (\mathcal{A})' = \mathcal{A}'$.

$\square$

Erinnerung 3. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $A, \tilde{A} \in \mathcal{A}$.

- Eine Abbildung $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $*(A) := A^*$ heißt *Antilinearer Antihomomorphismus*, falls für alle $A, \tilde{A} \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:
  1. $(A + \tilde{A})^* = A^* + \tilde{A}^*$
  2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ *antiliear*
  3. $(AB)^* = B^* A^*$ *antihomomorph*
- Eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit solch einer Abbildung $*$ nennen wir *Banach-$*$-Algebra.*
- Ein Algebrenhomomorphismus $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen Banach-$*$-Algebren heißt $*$-*Homomorphismus*, falls $\phi(A^*) = (\phi(A))^*$ für alle $A \in \mathcal{A}$ erfüllt ist und $*$-*Isomorphismus*, falls er zusätzlich bijektiv ist.

Bemerkung 4. Im folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ der Raum aller stetigen Operatoren $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Wir wissen, theoretisch dank Christians Vortrag, dass $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der Adjunktion eine Banach-$*$-Algebra ist.

Definition 5. Eine $*$-Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ heißt *von Neumann Algebra.*

Erinnerung 6. Ein Maßraum (Ω, Σ, μ) heißt σ-endlich, falls eine Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}(\Omega)$ existiert, mit:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ...$$

wobei $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und:

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

Bemerkung 7. Man kann zeigen, dass jede kommutative von Neumann Algebra auf einem seperablen Hilbertraum isomorph zu $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))$ für einen passenden Maßraum (Ω, Σ, μ) ist.

Bemerkung 8. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Wir wissen, dass $L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ ein Hilbertraum ist und werden nun $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ in $\mathcal{L}L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ einbetten. Für $[f] \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, definieren wir die Abbildung:

$$\Phi_{[f]} \colon L^2((\Omega, \Sigma, \mu)) \to L^2((\Omega, \Sigma, \mu)), \quad [g] \mapsto [fg]$$

und hiermit definieren wir den $*$-Isomorphismus:

$$i \colon L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)) \subset \mathcal{L}L^2((\Omega, \Sigma, \mu)), \quad [f] \mapsto \Phi_{[f]}$$

Satz 9. $i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))$ ist eine (sogar kommutative) von Neumann Algebra.

Beweis. $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))$ ist eine kommutative Banach-$*$-Algebra und da i ein $*$-Isomorphismus ist, ist auch $i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))$ eine kommutative Banach-$*$-Algebra und ist damit insbesondere $*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$. Weiter zeigen wir die stärkere Aussage:

$$i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)) = i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))'$$

Da $i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))$ kommutativ ist gilt bereits:

$$i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)) \subset i(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu))'$$

Für die andere Inklusion sei nun $T \in \mathcal{L}L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegeben mit:

$$T\Phi_{[f]} = \Phi_{[f]}T \tag{1}$$

für alle $[f] \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Seien $\Omega_n \subset \Omega$ gegeben, mit $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, wobei $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset ...$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $\chi_{\Omega_n} \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ und wir setzen:

$$[g_n] := T([\chi_{\Omega_n}]) \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu)) \tag{2}$$

Wir zeigen jetzt $[g_n] \in L^\infty((\Omega, \Sigma, \mu))$. Sei hierfür $g_n \in [g_n]$. Angenommen es gibt ein $E \subset \Omega$ und $0 < \mu(E) < \infty$, sodass $|g_n| > \|T\|$ auf E. Dann $\chi_E \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ (außerdem gilt $\chi_M \in L^\infty((\Omega, \Sigma, \mu))$ für alle $M \subset \Omega$) und

$$g_n\chi_E = \chi_E g_n = \chi_E T(\chi_{\Omega_n}) = \Phi_{\chi_E}(T(\chi_{\Omega_n})) = T(\Phi_{\chi_E}(\chi_{\Omega_n})) = T(\chi_{E\cap\Omega_n})$$

also

$$\begin{aligned}
\int_E |g_n|^2 d\mu = \int_\Omega |g_n|^2 \chi_E d\mu &= \int_\Omega |g_n\chi_E|^2 d\mu \\
&= \|g_n\chi_E\|_{L^2}{}^2 = \|T(\chi_{E\cap\Omega_n})\|_{L^2}{}^2 \\
&\leq \|T(\chi_E)\|_{L^2}{}^2 \\
&\leq \|T\|^2 \|\chi_E\|_{L^2}{}^2 = \|T\|^2 \int_E d\mu = \int_E \|T\|^2 d\mu
\end{aligned}$$

Das aber ist ein Widerspruch zur Annahme, also gilt $\|g_n\|_\infty \leq \|T\|$ bis auf eine Nullmenge. Und für $\tilde{g}_n \in [g_n]$, mit $\tilde{g}_n \neq g_n$, gilt für eine weitere Nullmenge $N \subset \Omega$ $\|\tilde{g}_n|_{\Omega\setminus N}\|_\infty = \|g_n\|_\infty \leq \|T\|$ bis auf eine Nullmenge. Also gilt $[g_n] \in L^\infty((\Omega, \Sigma, \mu))$ und $\|[g_n]\|_{L^\infty} \leq \|T\|$.

Für $m \leq n$ gilt:

$$[g_n \chi_{\Omega_m}] = T([\chi_{\Omega_m \cap \Omega_n}]) = T([\chi_{\Omega_m}]) = [g_m]$$

Hiermit können wir nun ein $[g] \in L^\infty((\Omega, \Sigma, \mu))$ mit $\|[g]\|_{L^\infty} \leq \|T\|$ durch $[g|_{\Omega_n}] := [g_n]$ definieren. Sei nun $[f] \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ eine Elementare Funktion mit Träger in Ω_n (alle Elementaren Funktionen $[f] \in L^\infty((\Omega, \Sigma, \mu)))$ dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_{[g]}([f]) &= [gf] = [g\chi_{\Omega_n} f] = [g_n f] = [f g_n] = \Phi_{[f]}([g_n]) \\ &= \Phi_{[f]}(T([\chi_{\Omega_n}])) = T(\Phi_{[f]}([\chi_{\Omega_n}])) = T([f\chi_{\Omega_n}]) \\ &= T([f])\end{aligned}$$

Da $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ gilt dies für alle Elementaren Funktionen $[f] \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$. Und da die Elementaren Funktionen dicht in $L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ liegen für alle $[f] \in L^2((\Omega, \Sigma, \mu))$ $\square$

Bemerkung 10. Im folgenden bezeichnen wir mit τ die Normtopologie auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist $\overline{\mathcal{A}}$ der Abschluss von $\mathcal{A}$ bezüglich τ.

Definition 11. Auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definieren wir die *schwache Topologie* τ_w als die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen:

$$w_{a,b} \colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}, \quad T \to \langle Ta, b\rangle \quad a, b \in \mathcal{H}$$

und die *starke Topologie* τ_s als die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen:

$$s_a \colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{H}, \quad T \to Ta \quad a \in \mathcal{H}$$

Bemerkung 12. Seinen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $a, a_1, ..., a_n, b, b_1, ...b_n \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$ dann sind:

- $S_{T,a,b,\varepsilon} := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) || \langle (S - T)a, b\rangle| < \varepsilon\}$
  $B_{T,a_1,...,a_n,b_1,...,b_n,\varepsilon} := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) || \langle (S - T)a_i, b_i\rangle| < \varepsilon \quad i \in 1, ..., n\}$
  jeweils Elemente einer Subbasis und Basis von τ_w
- $S_{T,a,\varepsilon} := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) ||\|(S - T)a\| < \varepsilon\}$
  $B_{T,a_1,...,a_n,\varepsilon} := \{S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) ||\|(S - T)v_i\| < \varepsilon \quad i \in 1, ..., n\}$
  jeweils Elemente einer Subbasis und Basis von τ_s

Satz 13. Es gilt:

$$\tau_w \subset \tau_s \subset \tau$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathcal{H}$, mit $\|a\|, \|b\| \leq 1$ und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gegeben, dann gilt:

$$\langle (S - T)a, b\rangle \leq \|(S - T)A\|\|b\| \leq \|(S - T)a\| \leq \|(S - T)\|$$

Hieraus folgt nach Definition der jeweiligen Basiselemente die Behauptung. □

Bemerkung 14. Aus Satz **??** folgt insbesondere für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w$$

Lemma 15. Es gilt für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{A}' = \overline{\mathcal{A}'}^w$$

Beweis. Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Es gilt $T \in \mathcal{A}'$ genau dann, wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ und $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (TA - AT)h, \tilde{h} \rangle \\ &= \langle TAh, \tilde{h} \rangle - \langle ATh, \tilde{h} \rangle \\ &= \langle TAh, \tilde{h} \rangle - \langle ATh, \tilde{h} \rangle \\ &= \langle TAh, \tilde{h} \rangle - \langle Th, A^*\tilde{h} \rangle \\ &= w_{Ah,\tilde{h}}(T) - w_{h,A^*\tilde{h}}(T) \\ &= (w_{Ah,\tilde{h}} - w_{h,A^*\tilde{h}})(T) \end{aligned}$$

Also gilt: $\mathcal{A}' = \bigcap_{h,\tilde{h}\in\mathcal{H},A\in\mathcal{A}} \ker(w_{Ah,\tilde{h}} - w_{h,A^*\tilde{h}})$ und ist damit Abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie. □

Erinnerung 16. Auf einem Abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ existiert die *orthogonale Projektion* $P_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ mit unter anderem $P_{\mathcal{A}}(h) = h$ für $h \in \mathcal{A}$ und $P_{\mathcal{A}}(h) = 0$ für $h \in \mathcal{A}^{\perp}$

Satz 17. Bikommutantensatz
Sei $\mathcal{A}$ eine $*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit 1, dann gilt:

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^w = \overline{\mathcal{A}}^s$$

Bemerkung 18. Die Voraussetzung $1 \in \mathcal{A}$ kann fallengelassen werden.

Beweis. Es gilt nach Satz **??** und Lemma **??** und **??**
$\overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w \subset \overline{\mathcal{A}''}^w = \mathcal{A}''$.
Bleibt zu zeigen:
$\mathcal{A}'' \subset \overline{\mathcal{A}}^s$

1. Sei also $T \in \mathcal{A}''$ und ein $U \in \tau_s$ gegeben mit $T \in U$, dann existieren $h_1, ..., h_n \in \mathcal{H}$ und $\varepsilon > 0$, sodass (siehe Bemerkung **??**):

   $$B_{T,h_1,...,h_n,\varepsilon} \subset U$$

   Wir werden nun ein $A \in \mathcal{A} \cap B_{T,h_1,...,h_n,\varepsilon}$ finden, indem wir eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ "konstruieren" mit:

   $$\lim_{m\to\infty} (A_m h_1, ..., A_m h_n) = (Th_1, ..., Th_n)$$

   Dies zeigt dann die Behauptung.

2. Für gegebenes $h \in \mathcal{H}$ betrachten wir $\overline{\mathcal{A}h} := \overline{\{Ah | A \in \mathcal{A}\}}$.
Es gilt $A\overline{\mathcal{A}h} \subset \overline{\mathcal{A}h}$ für alle $A \in \mathcal{A}$, denn für alle $\tilde{h} \in \mathcal{A}h$ existiert ein $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ mit $\tilde{A}h = \tilde{h}$ da $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra ist gilt auch $A\tilde{A} \in \mathcal{A}$ und damit auch $A\tilde{h} = A\tilde{A}h \in \mathcal{A}h$, also $A\mathcal{A}h \subset \mathcal{A}h$
Insbesondere gilt also auch $\overline{A\mathcal{A}h} \subset \overline{\mathcal{A}h}$ und da A stetig ist auch $A\overline{\mathcal{A}h} \subset \overline{A\mathcal{A}h}$ und damit:
$$A\overline{\mathcal{A}h} \subset \overline{\mathcal{A}h}$$
Nun gilt also $0 = \langle A\overline{\mathcal{A}h}, \overline{\mathcal{A}h}^\perp \rangle = \langle \overline{\mathcal{A}h}, A^*\overline{\mathcal{A}h}^\perp \rangle$ Also gilt $A^*\overline{\mathcal{A}h}^\perp \subset \overline{\mathcal{A}h}^\perp$. Und da $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* := \{A^* | A \in \mathcal{A}\}$ gilt auch $A\overline{\mathcal{A}h}^\perp = (A^*)^*\overline{\mathcal{A}h}^\perp \subset \overline{\mathcal{A}h}^\perp$ Sei $P_{\overline{\mathcal{A}h}}$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\overline{\mathcal{A}h}$, dann gilt für $g \in \mathcal{H}$:
$$\begin{aligned}
P_{\overline{\mathcal{A}h}}Ag &= P_{\overline{\mathcal{A}h}}A(g - P_{\overline{\mathcal{A}h}}g + P_{\overline{\mathcal{A}h}}g) \\
&= P_{\overline{\mathcal{A}h}}A(\underbrace{g - P_{\overline{\mathcal{A}h}}g}_{\in\overline{\mathcal{A}h}^\perp}) + P_{\overline{\mathcal{A}h}}A(\underbrace{P_{\overline{\mathcal{A}h}}g}_{\in\overline{\mathcal{A}h}}) \\
&= 0 + AP_{\overline{\mathcal{A}h}}g \\
&= AP_{\overline{\mathcal{A}h}}g
\end{aligned}$$
und somit $P_{A_h} \in \mathcal{A}'$
Wegen $T \in \mathcal{A}''$ gilt auch $TP_{\overline{\mathcal{A}h}} = P_{\overline{\mathcal{A}h}}T$ und da $1 \in \mathcal{A}$ gilt ist $1h = h \in A_h$.
Also gilt:
$$Th = TP_{\overline{\mathcal{A}h}}h = P_{\overline{\mathcal{A}h}}Th \in \overline{\mathcal{A}h} \tag{3}$$

3. Wir betrachten nun $\mathcal{L}(\oplus_{i=1}^n \mathcal{H})$ und definieren die Abbildung:
$p\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to L(\mathcal{H}^n)$, durch $p(A)(h_1, ..., h_n) := (Ah_1, ..., Ah_n)$
Da $\mathcal{A}$ eine $*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit 1 ist auch $p(\mathcal{A})$ eine $*$-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\oplus_{i=1}^n \mathcal{H})$ mit $1 = p(1)$. Als nächstes zeigen wir nun $p(T) \in p(\mathcal{A})''$.
Sei dazu $S \in p(\mathcal{A})'$, und sei $\pi_i\colon \mathcal{L}(\oplus_{i=1}^n \mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ die orthogonale Projektion auf den i-ten Faktor. Dann gilt für $g \in \mathcal{H}$ und alle $i, j \in \{1, ..., n\}$:
$$\pi_i S \pi_j^* Ag = \pi_i S p(A) \pi_j^* g = \pi_i p(A) S \pi_j^* g = A \pi_i S \pi_j^* g$$
Also gilt $\pi_i S \pi_j^* \in \mathcal{A}'$ und da $T \in \mathcal{A}''$ gilt auch:
$$T \pi_i S \pi_j^* = \pi_i S \pi_j^* T \quad \forall i, j \in \{1, ..n\}$$

Das ergibt nun für $p(T)$ und $(g_1, ..., g_n) \in \oplus_{i=1}^n \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
p(T)S(g_1, ..., g_n) &= p(T)(\sum_{i=1}^n \pi_1 S\pi_i^* g_i, ..., \sum_{i=1}^n \pi_n S\pi_i^* g_i) \\
&= p(T)\sum_{i=1}^n (\pi_1 S\pi_i^* g_i, ..., \pi_n S\pi_i^* g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n p(T)(\pi_1 S\pi_i^* g_i, ..., \pi_n S\pi_i^* g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (T\pi_1 S\pi_i^* g_i, ..., T\pi_n S\pi_i^* g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (\pi_1 S\pi_i^* T g_i, ..., \pi_n S\pi_i^* T g_i) \\
&= (\sum_{i=1}^n \pi_1 S\pi_i^* T g_i, ..., \sum_{i=1}^n \pi_n S\pi_i^* T g_i) \\
&= (\pi_1 Sp(T)g_1, ..., \pi_n Sp(T)g_n) \\
&= Sp(T)(g_1, ..., g_n)
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$p(T) \in p(\mathcal{A})'' \tag{4}$$

Und nach Teil 2 folgt jetzt für $(h_1, ..., h_n)$:

$$(Th_1, ..., Th_n) = p(T)(h_1, ..., h_n) \in \overline{p(\mathcal{A})(h_1, ..., h_n)}$$

Es existiert also eine Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit:

$$\lim_{m\to\infty}(A_m h_1, ..., A_m h_n) = (Th_1, ..., Th_n)$$

und somit $T \in \overline{\mathcal{A}}^s$

□

Korrolar 19. Eine $*$-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist also genau dann eine von Neumann Algebra wenn eine der folgenden Äquivalenten Bedingungen gilt:

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$
- $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^w$
- $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}^s$

Insbesondere gilt dann auch $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$, also ist jede von Neumann Algebra auch eine C^*-Algebra