Inhaltsangabe zur Vorlesung „Funktionalanalysis“

JProf.-Dr. Christoph Wockel

7. Juli 2015

Grundlegende Konzepte

1. Vorlesung (02. April)

- Def.: Halbnorm, Norm, normierter Raum
- Lem.: Metrik ($d_{\|\cdot\|}$) auf normiertem Raum $(X, \|\cdot\|)$
- Bsp.:
  - a) $\mathbb{K}^n$
  - b) $\ell^\infty(T)$
  - c) $\mathbb{R}[X]$
- Def.: Vollständigkeit, Banachraum
- Bsp.: $\ell^\infty(T)$ ist ein Banachraum.

2. Vorlesung (06. April)

- Def.: Banachraum
- Bsp.: $\ell^\infty(T)$ ist ein Banachraum
- Lem.: Normierte Räume, (vollständige) Unterräume und Abgeschlossenheit.
- Bsp.:
  a) Für T einen metrischen Raum ist $C^b(T)$ (beschränkte stetige Funktionen) ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(T)$ und somit ein Banachraum.

  b) $C^1([0,1],\mathbb{R})$ (stetig diff'bare Fktn) ist Teilraum von $C^b([0,1],\mathbb{R})$, aber nicht abgeschlossen (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$). Auf $C^1([0,1],\mathbb{R})$ definiert aber

  $$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

  eine Norm, die $C^1([0,1],\mathbb{R})$ zu einem Banachraum macht.
- Def.: invariante und multiplikative Metrik

- Lem.: invariant und multiplikativ $\Leftrightarrow$ Metrik kommt von einer Norm
- Def.: metrischer Vektorraum, F-Raum, Fréchet-Raum
- Beispiele (insbesondere $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$)

3. Vorlesung (08. April)

Im folgenden seien (X, d_X) und (Y, d_Y) immer metrische Vektorräume.

- Def.: stetiger (oder beschränkter) Operator auf einem metrischen VR.
- Def.: Beschränkte Teilmenge, beschränkte Abbildung.
- Def.: Gleichmäßig stetige Abbildung.
- Satz: Für $T\colon X \to Y$ linear gilt: T ist

$$\text{stetig in } 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{stetig} \quad \Leftrightarrow \quad \text{beschränkt} \quad \Leftrightarrow \text{gleichmäßig stetig.}$$

- Kor.: Für X, Y normiert, $T\colon X \to Y$ linear sind äquivalent

  a) T ist stetig

  b) Es ex. $M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$.

- Def.: Für X, Y normiert, $T\colon X \to Y$ linear setze die Operatornorm von T auf

$$\|T\| := \sup\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ für alle } x \in X\}$$

und $L(X,Y) := \{T\colon X \to Y : T \text{ linear und } \|T\| < \infty\}$.

- Satz:
  a) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$
  b) $L(X,Y)$ wird bzgl. punktweiser Operationen und der Operatornorm zu einem normierten Raum.
  c) Y Banachraum $\Rightarrow L(X,Y)$ Banachraum

4. Vorlesung (14. April)

- Satz:

  a) $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$

  b) $L(X, Y)$ wird bzgl. punktweiser Operationen und der Operatornorm zu einem normierten Raum.

  c) Y Banachraum $\Rightarrow L(X, Y)$ Banachraum

- Bezeichnungen B_X (Einheitskugel) und $S_X = \partial B_X$
- Def.: dichte Teilmenge in einem metrischen Raum
- Satz: Fortsetzen von stetigen Abbildungen, die auf dichten Teilräumen definiert sind.
- Lem.: $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$ (Operatornorm ist submultiplikativ)

- Bsp.:
  - $T\colon X \to Y$ mit $\dim(X) < \infty \Rightarrow T$ beschränkt
  - $T\colon C([0,1]) \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x(0)$ beschränkt mit $\|T\| = 1$
  - ebenso: $T|_{\{x:x(1)=0\}}$, aber hier wird das Supremum nicht angenommen
  - $D := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{K}, x_n \neq 0$ für nur endlich viele $n\}$,

    $$T\colon c_0 \to \mathbb{K}, \quad (x_n) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

    unbeschränkt (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_p$)
  - $T\colon C^1([0,1],\mathbb{R}) \to C^0([0,1],\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ist unbeschränkt bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und beschränkt bzgl. $\|\cdot\|_{C^1}$
  - $T\colon C([0,1],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ ist beschr. mit $\|T\| = 1$
  - $T_k\colon C([0,1],\mathbb{K}) \to C([0,1],\mathbb{K})$, $T(x)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)dt$ ist für $k \in C([0,1]^2,\mathbb{K})$ beschränkt mit $\|T\| = \|k\|_\infty$

5. Vorlesung (16. April)

Es sein (falls nicht anders erwähnt) $(X, \|\cdot\|)$ immer ein normierter Raum.

- Satz: Stetigkeit von Addition, Skalarmultiplikation und $\|\cdot\|$ in X.
- Kor.: (x_n) ist C.F. $\Rightarrow$ $(\|x_n\|)$ ist C.F.
- Abschlüsse von UVR sind wieder UVR.
- Def.: Äquivalente Normen
- Satz: Äquivalente Charakterisierungen äquivalenter Normen (insbesondere: zwei Normen sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleichen offenen Mengen auf X induzieren).
- Bsp.:
  - Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.
  - Auf $C^1([0,1],\mathbb{R})$ sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_{C^1}$ nicht äquivalent.
- Lem.: Rieszsches Lemma

- Satz: Für X sind äquivalent:
  - $\dim(X) < \infty$.
  - B_X ist kompakt.
  - Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.
- Allgemeiner gilt: Ist X ein metrischer Vektorraum mit stetiger Skalarmultiplikation, so ist X genau dann endlich-dimensionale, wenn X eine kompakte Nullumgebung hat.

6. Vorlesung (21. April)

- Def.: Separabler Raum
- Lem.: Ein metrischer VR X ist genau dann separabel, wenn $A \subseteq X$ mit $\overline{\operatorname{span} A} = X$ existiert.
- Bsp.:
  a) ℓ^p ist separabel

  b) ℓ^∞ ist nicht separabel
- Def.: Abstand $d(x, U) := \inf\{\|x - u\| : u \in U\}$ von x zu UVR U.
- Lem.: $d(x, U) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{U}$
- Satz:
  a) $d(x, U)$ ist Halbnorm auf X/U und Norm falls U abgeschlossen

  b) X vollständig und U abgeschlossen $\Rightarrow X/U$ vollständig
- Bsp.: $C([0,1])$, $D \subseteq [0,1]$ abgeschlossen $\Rightarrow$

$$C([0,1])/\{f : f|_D \equiv 0\} \cong C(D).$$

- Lem.: p-Normen auf direkten Summen von normierten Räumen
- Def.: Quotientenabbildung
- Lem.: Quotientenabbildungen sind surjektiv und haben Norm 1.

Der Satz von Hahn-Banach

7. Vorlesung (23. April)

- Def.: Isomorphismen von Banachräumen und isometrische Isomorphismen.
- Satz: Quotientenabbildungen sind bis auf isometrische Isomorphismen genau die Projektionabbildungen nach abgeschlossenen UVR.
- Lem.: Zornsches Lemma.
- Def.: Sublineares Funktional auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum (VR).
- Satz: Fortsetungssatz von Hahn-Banach für $\mathbb{R}$-VR.
- Thm.: Normgleiche Fortsetzung von stetigen linearen Funktionalen von UVR in normieren Räumen.

7. Vorlesung (28. April)

- Beweis den Fortsetungssatzes von Hahn-Banach für $\mathbb{R}$-VR.
- Satz: Fortsetungssatz von Hahn-Banach für $\mathbb{C}$-VR.
- Def.: Topologischer Dualraum (für X Banachraum)

$$X' := \{x' \colon X \to \mathbb{K} \mid x' \text{ stetig und linear}\}$$

- Kor.: Für $X \ni x \neq 0$ existiert $x' \in X'$ mit $x'(x) = \|x\|$, $\|x'\| = 1$. Insbesondere trennt X' die Punkte von X.
- Kor.: $\|x\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)|$
- Satz:
  a) Für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist $T \colon \ell^q \to (\ell^p)'$, $T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ein isometrischer Isomorphismus.

  b) Die Abbildung $T \colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ ist eine Isometrie, die nicht surjektiv ist.
- Satz: Jeder normierte Raum X ist isometrisch isomorph zu einer dichten Teilmenge in einem Banachraum $\overline{X}$.

- Def.: Der Banachraum im vorigen Satz heißt Vervollständigung von X.
- Bsp.: $\overline{C([0,1],\mathbb{K})}^{\|\cdot\|_p} \cong L^p([0,1],\mathbb{K})$

8. Vorlesung (30. April)

- Def.: Minkowski-Funktional, absorbierende Menge
- Lem.: offene und absorbierende Mengen in normierten Räumen
- Lem.: X: normiert, $V \subseteq X$ offen, konvex, $0 \notin V \Rightarrow$ es ex. $x' \in X'$ mit $\mathrm{Re}(x')(x) < 0$ für alle $x \in V$.
- Satz: Trennungssatz von Hahn-Banach (für zwei konvexe Mengen, eine davon offen)
- Satz: Strikter Trennungssatz von Hahn-Banach (für eine abgeschlossene und konvexe Menge und einen dazu disjunken Punkt)
- Satz von Baire: X vollst., metr. Raum, $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offen, dicht

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ dicht.}$$

Grundprinzipien der Funktionalanalysis:

Folgerungen aus dem Satz von Baire

9. Vorlesung (5. Mai)

- Bem.: Vollständigkeit im Satz von Baire ist wichtige Voraussetzung.
- Def.: nirgends dicht, dünn, dick (für TM eines metrischen Raumes X)
- Lem.: Y dünn $\Leftrightarrow X \setminus Y$ dick
- Kor.:
  a) X vollständig , $Y \subseteq X$ dick $\Rightarrow Y$ dicht

  b) X vollständig $\Rightarrow X$ nicht dünn

  c) X nicht dünn, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \Rightarrow \operatorname{int}(\overline{X_n}) \neq \emptyset$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$.
- Satz: Es gibt stetige, nirgends differenzierbare Funktionen.
- Satz: Punktweise Grenzwerte haben dünne Mengen von Unstetigkeitssetellen.

- Kor.: X, Y normiert, X vollständig, $T_n \in L(X, Y)$ für $n \in \mathbb{N}$ punktweise konvergent. Dann ist

$$T\colon X \to Y, \quad x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

ist stetig und linear.

9. Vorlesung (7. Mai)

- Def.: Gleichgradig stetige Menge von stetigen Funktionen (zwischen metrischen Räumen)
- Thm.: (Banach-Steinhaus) X, Y: metr. VR mit stetiger Skalarmultiplikation, $H \subseteq L(X, Y)$. Ist die Menge der $x \in X$ beschränkten Bahnen $H_x := \{T(x) \mid T \in H\}$ nicht dünn, dann ist H gleichgradig stetig (und alle Bahnen sind automatisch beschränkt).
- Kor.: X, Y metr. VR mit stetiger Skalarmultiplikation, X vollständig, $H \subseteq L(X, Y)$. Ist jedes H_x beschränkt, so ist H gleichgradig stetige.
- Kor.: X, Y: normiert, X:Banach, $H \subseteq L(X, Y)$. Dann gilt

$$\sup_{T \in H} \|T(x)\| < \infty \text{ für alle } x \in X \Rightarrow \sup_{T \in H} \|T\| < \infty.$$

- Alternativer Beweis für letztes Korollar aus voriger VL.

- Kor.: X, Y:Banachräume , $A_n \in L(X, Y)$: folge beschränkter Operatoren.
  Dann sind äquivalent:
  - A_n konvergiert punktwiese gegen $A \in L(X, Y)$
  - $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle x aus einer dichten Teilmenge.
- Def.: Offene Abbildung zischen metrischen Räumen

11. Vorlesung (12. Mai)

- Lem.: Verschiedene Charakterisierungen offener linearer Abbildungen.
- Thm.: Satz von der offenen Abbildung für F-Räume (mit stetiger Skalarmultiplikation).
- Kor.: X, Y F-Räume mit stetiger Skalarmultiplikation, $T\colon X \to Y$ linear und stetig. Dann ist T surjektiv genau dann, wenn T offen ist.
- Kor.: Kanonische Faktorisierung auf für Banachräume.
- Def.: Abgeschlossener Operator $T\colon X \supseteq D \to Y$.
- Lem.: T is abgeschlossen genau dann, wenn der Graph in $X \oplus Y$ abgeschl. UVR ist.
- Lem.: Abgeschlossene Operatoren und die Graphennorm.
- Bsp.: $\| \cdot \|_{C^1}$ ist die Graphennorm des Ableitungsoperators auf $(C([0,1],\mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$.
- Thm.: Satz vom Abgeschlossenen Graphen für F-Räume mit stetiger Skalarmultiplikation.

11. Vorlesung (19. Mai)

- Def.: $P\colon X \to X$ linear heißt Projektion $\Leftrightarrow P^2 = P$
- Lem.: X:normiert, P stetige Projektion
  - a) $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$
  - b) $\ker(P)$ und $\mathrm{im}(P)$ abgeschlossen
  - c) $X \cong \ker(P) \oplus \mathrm{im}(P)$ (stetiger Isomorphismus)
- Bsp.: Stetige Projektionen auf ℓ^∞ und $L^p(\mu)$ durch Multiplikation mit charakteristischen Funktionen
- Satz: $U \leq X$ endlichdim. $\Rightarrow$ ex. stetige Projektion P mit $P(X) = U$
- Satz: X:Banachraum, $U, V \leq X$ abgeschl. mit $U \cap V = \{0\}$, $U + V = X$.
  - a) $X \cong U \oplus V$ (stetiger Isomorphismus)
  - b) Ex. stetige Projektion $P\colon X \to X$ mit $P(X) = U$
  - c) $X/U \cong V$ (stetiger Isomorphismus)

- Def.: X: Banachraum, $U \leq X$ heißt komplementiert falls $V \leq X$ abgeschlossen existiert mit $U \cap V = \{0\}$, $U + V = X$.

- Satz: Der Raum c_0 der Nullfolgen ist nicht komplementiert in ℓ^∞.

Hilberträume

11. Vorlesung (21. Mai)

- Def.: Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,,\cdot\rangle\colon V\times V\to\mathbb{K}$, orthogonales Komplement $A^\perp$ für $A\subseteq V$.
- Satz: Caucy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

(mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig).

- Lem.: $x\mapsto\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert Norm auf V.
- Def.: Prähilbertraum, Hilbertraum.
- Bem.: $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ ist eindeutig durch $\|\cdot\|$ bestimmt.
- Lem.: X: Prähilbertraum, $U\subseteq X$ beliebig. Dann gilt

$$\operatorname{span}U \text{ dicht } \Rightarrow U^\perp=\{0\}$$

- Satz: Normierte Räume als Prähilberträume. Insbesondere ist die Vervollständigung eines Prähilbertraums ein Hilbertraum.

- Bsp.: $L^2(\mu)$ ist ein Hilbertruam für (X, Ω, μ) ein Maßraum.
- Lem.: Eigenschaften orthogonaler Komplemente
- Satz: (Projektionssatz) H: Hilbertraum, $K \subseteq H$ abgeschlossen und Konvex, $x_0 \in H$. Dann existiert genau ein $x \in K$ mit

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|.$$

- Lem.: Notation wie im vorigen Satz. Dann sind äquivalent

  a) $\|x_0 - x\| = \inf_{y \in K} \|x_0 - y\|$

  b) $\mathrm{Re}\langle x_0 - x, y - x_0 \rangle \leq 0$ für alle $y \in K$.

11. Vorlesung (4. Juni)

- Thm.: Zu $U \leq H$ abgeschlossen ex. eine eindeutige Projektion $P_U\colon H \to H$ mit $P_U(H) = U$, $\ker(P_U) = U^\perp$ und $\|P_U\| = 1$. Ferner gilt $\mathrm{id} - P_U = P_{U^\perp}$ und $H = U \oplus_2 U^\perp$.
- Bem.: Hilberträume sind *genau* die Banachräume, in denen jeder abgeschlossene UVR komplementiert ist [LT71].
- Kor.: Für $U \subseteq H$ beliebe TM gilt $\overline{\operatorname{span} U} = U^{\perp\perp}$
- Thm.: (Fréchet-Riesz) Die Abbildung $\Phi\colon H \to H'$, $X \mapsto \langle \cdot, x\rangle$ ist ein isometrischer und antilinearer Isomorphismus.
- Bsp.: Für jede Menge I mit dem Zählmaß ζ ist $L^2(\zeta)$ ein Hilbertraum, der auch mit $L^2(I)$ bezeichnet wird (und $\ell^2 := L^2(\mathbb{N})$).
- Def.: Orthonormalsystem und Orthonormalbasis
- Bsp.: In ℓ^2 ist $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB.
- Satz: Gram-Schmidt Verfahren für abzählbare lin. unabh. Teilmengen.

- Bsp.: GS auf $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ liefert die Legendrepolynome.
- Satz: (Besselsche Ungleichung) Für $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS, $x \in H$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

- Kor.: Für $x, y \in H$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle| < \infty$$

- Kor.: Für $S \subseteq H$ ein ONS, $x \in H$ ist

$$S_x := \{e \in S \mid \langle e, x \rangle \neq 0\}$$

  höchstens abzählbar.

11. Vorlesung (9. Juni)

- Def.: Unbedingte Konvergenz $\sum_{i\in I} x_i \to x$
- Satz: Für $S \subseteq H$ ein ONS gilt

$$\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle^2 \leq \|x\|^2$$

- Satz: Für $S \subseteq H$ ein ONS
  - konvergiert $\sum_{e\in S}\langle x, e\rangle e$ unbedingt
  - ist $x \mapsto \sum_{e\in S}\langle x, e, \rangle e$ die Orthogonalprojektion auf $\overline{\mathrm{span}(S)}$
- Satz: Existenz und Charakterisierung von ONB
- Korollar zu separablen Hilberträumen.
- Lem.: Sind S und T ONB von H, so sind S und T leich mächtig.
- Satz: (Klassifikation von Hilberträumen) Jeder Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu einem $L^2(I)$ und ist bis auf isometrische Isomorphie durch die Kardinalität von I eindeutig bestimmt.

Spektraltheorie kompakter Operatoren

11. Vorlesung (11. Juni)

- Def.: Kompakter Operator zwischen Banachräumen ($K(X, Y)$: Normierter UVR von $L(X, Y)$ der kompakten Operatoren)
- Bsp.: $\dim(\mathrm{im}(T)) < \infty \Rightarrow T$ kompakt
- Satz:
  - $K(X, Y)$ ist abgeschlossen in $L(X, Y)$
  - $L(Y, Z) \circ K(X, Y) \subseteq K(X, Z)$, $K(Y, Z) \circ L(X, Y) \subseteq K(X, Z)$
- Kor.: $T_n \in L(X, Y)$ mit $\dim(\mathrm{im}(T_n)) < \infty$ und $T_n \to T \Rightarrow T \in K(X, Y)$
- Satz: (Arzela-Ascoli)

$$M \subseteq C(S, \mathbb{K}) \text{ beschränkt und gleichgradig stetig } \Rightarrow \overline{M} \text{ kompakt}$$

- Bsp.: Fredholmoperatoren sind kompakt
- Def.: Adjungierte Operatoren auf Hilberträumen
- Lem.: Für $T \in L(H_1, H_2)$ ist $L^* \in L(H_2, H_1)$ und T^* ist eindeutig durch $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1}$ $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$ bestimmt.

- Satz:

  a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

  b) $(\lambda S)^* = \overline{\lambda} S^*$

  c) $(RS)^* = S^* R^*$

  d) $S^{**} = S$

  e) $\|S\| = \|S^*\|$

- Def.: Unitärer, selbstadjungierter und normaler Operator.

- Bsp.: Multiplikationsoperatoren und Shiftoperatoren

11. Vorlesung (16. Juni)

- Lem.: Für $T \in L(H_1, H_2)$ gilt
  - T Isometrie $\Leftrightarrow \langle TX, Ty\rangle = \langle x, y\rangle\ \forall x, y \in H_1$
  - T unitär $\Leftrightarrow T$ ist surjektive Isometrie
- Satz: Ist $S\colon H \to H$ linear und gilt $\langle x, Sy\rangle = \langle Sx, y\rangle\ \forall x, y \in H$, so ist S abgeschlossen und somit stetig.
- Satz: Für $T \in L(H)$ gilt

$$T \text{ ist selbstadjungierter } \Leftrightarrow \langle x, Ty\rangle \in \mathbb{R}\, \forall x \in H$$

- Satz: Für $T \in L(H)$ selbstadjungiert gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x, Tx\rangle|$$

- Kor.: $T \in L(H)$ selbstadjungiert ist genau dann 0, wenn $\langle x, Tx\rangle = 0$ für alle $x \in H$ gilt.
- Satz: Äquivalente charakterisierungen selbstadjungierter Projektionen

- Kor.: Ist $T \in L(H)$ normal, so gilt $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$.
- Einschub: Ein paar Grundbegriffe aus der Funktionentheorie, insbesondere
  - analytische Funktion
  - Laurententwicklung
  - Satz von Liouville: eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte analytische und beschränkte Funktion ist konstant.

11. Vorlesung (18. Juni)

- Def.: X : Banachraum, $T\colon X \supseteq D \to X$ abgeschlossen
  - Resolventenmenge: $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda - T \text{ bijektiv}\}$
  - Resolvente: $R_\lambda(T) := (\lambda - T)^{-1}$ für $T \in \rho(T)$
  - Spektrum: $\sigma(T) := \mathbb{K} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda - T \text{ nicht bijektiv}\}$
- Bem.:
  - $R_\lambda(T)$ ist immer stetig, auch wenn T nur abgeschlossen ist
  - Unterscheidung von Punkt- stetigem und residuellem Spektrum
- Satz: $T \in L(X) \Rightarrow \sigma(T) = \sigma(T')$ und $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ falls X Hilbertraum.

- Bsp.: Mit den Mitteln der Analysis 1 und 2:
  - $X = C([0,1])$, $T(x)(s) = \int_0^s x(t)\,dt$
  - $X = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = 0\}$, $T(x)(s) = \int_0^s x(t)\,dt$
  - $d\colon C([0,1]) \supseteq C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $d(f) = f'$
  - $d_0 := d|_{X_0}$ mit $X_0 = \{f \in C^1([0,1]) \mid x(0) = 0\}$
- Def.: Analytische Funktion auf einem normierten Raum
- Thm.: Satz von Liouville
- Thm.: (Hauptsatz über das Spektrum) Für $T\colon X \supseteq D \to X$ abgeschlossen gilt
  a) $\rho(T)$ ist offen
  b) $\rho(T) \to L(X)$, $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ ist analytisch
  c) $T \in L(X) \Rightarrow \sigma(X)$ kompakt
  d) $T \in L(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(T) \neq \emptyset$

11. Vorlesung (23. Juni)

- Def.: Skektralradius $r(T) := \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$
- Lem.: Wohldefiniertheit des Spektralradius.
- Satz:
  - $|\lambda| \leq r(T)$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$
  - $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \exists \lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = r(T)$
- X Hilbertraum und T normal $\Rightarrow r(T) = \|T\|$.
- Satz: (Schauder) Für $T \in L(X,Y)$ gilt: T kompakt $\Leftrightarrow T'$ kompakt
- Lem.: Für $T \in L(X,Y)$ gilt

$$\operatorname{im}(T) \text{ abgeschlossen } \Rightarrow \operatorname{im}(T') = \ker(T)^{\perp}$$

11. Vorlesung (25. Juni)

- Lem.: $T \in K(X)$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow Q_\lambda := \lambda - T$ hat abgeschlossenes Bild.
- Thm.: (Spektralsatz für kompakte Operatoren) Für $T \in K(X)$, $\delta > 0$ ist
$$\{\lambda \in \sigma(T)\colon |\lambda| > \delta\}$$
endlich. Insbesondere kann $\sigma(T)$ nur in 0 einen Häufungspunkt haben (und das hat $\sigma(T)$ auch, falls $\dim(X) = \infty$).
- Bsp.: $X = C([0,1])$, $Tx(s) = \int_0^s f(t)\,dt$
- Satz und Definition: Operatoren mit kompakter Resolvente
- Lem.: $T \in L(X)$ hat kompakte Resolvente $\Rightarrow \dim(X) < \infty$
- Thm.: (Spektralsatz für Operatoren mit kompakter Resolvente) Hat $T\colon X \supseteq D \to X$ kompakte Resolvente, so ist $\sigma(T)$ höchstens abzählbar und hat keinen Häufungspunkt.
- Bsp.: Differentialoperatoren

11. Vorlesung (30. Juni)

- Satz: Für $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONS und (λ_n) Nullfolge ist

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle f_n$$

  ein kompakter Operator mit

$$T^* y = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle y, f_n\rangle e_n$$

- Satz:

$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

  ist komapkt und normal. T ist selbstadjungiert falls $\lambda_{n\in\mathbb{R}}$ für alle n. Ferner gilt $\sigma(T) = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ und jedes λ_n ist Eigenwert.

- Satz: $T \in L(H)$ normal und kompakt $\Rightarrow$ jeder Spektralwert $\neq 0$ ist Eigenwert. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ex. ein Eigenwert λ mit $|\lambda| = \|T\|$.

- Bem.: Fredholsche Alternative.

- Thm.: (Spektralzerlegung) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim(H) = \infty$ und $T \in L(H)$ normal und kompakt, dass ex. ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Nullfolge (λ_n) mit
$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

- Bsp.: Ingetraloperator mit Kern $k(s,t) := \min\{s,t\}$

- Kor.: Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim(H) = \infty$ und $T \in L(H)$ kompakt, dass ex. ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Nullfolge (λ_n) mit
$$Tx := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle f_n.$$

11. Vorlesung (2. Juli)

(Kurzer Abriss über partielle Differentialgleichungen, vgl. [Ulb, Kap. 4])

- Lem.: Lax-Milgram
- Motivation: (Poisson-Gleichung) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschr., $f \in C(\overline{\Omega})$

$$-\Delta y = f, \quad y|_{\partial\Omega} = 0$$

  und $y \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{(}\Omega))$ gesucht.
- Def.: Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$ und Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{H^k}$.
- Satz: $C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ liegt dicht in H^k.
- Def.: $H_0^k(\Omega)$
- Def./Bem.: Schwache Ableitungen $u^{(\alpha)}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $u \in L^2(\Omega)$
- Satz:

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u^{(\alpha)} \text{ existiert für alle } |\alpha| \leq k\}$$

- Schwache formulierung von Randwertproblemen:

$$y \in H_0^1(\Omega), \quad a(y,u) = \langle f, u\rangle_{L^2} \text{ für alle } u \in H_0^1(\Omega)$$

mit $a(u,v) = \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2}$.

- Satz: Die obige Bilinearform a ist stetig und Koerziv. Somit hat das schwache RWP nach Lax-Milgram genau eine Lösung in $H_0^1(\Omega)$.

- Bem.: Von $y \in H_0^1(\Omega)$ zu einer Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ durch Regularitätstheorie und Sobolevsche Einbettungssätze

Literatur

[Kab11] Kaballo, W. *Grundkurs Funktionalanalysis.* (Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011). doi:10.1007/978-3-8274-2721-2

[LT71] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *On the complemented subspaces problem.* Israel J. Math. **9** (1971):263–269

[Rud91] Rudin, W. *Functional analysis.* International Series in Pure and Applied Mathematics (McGraw-Hill Inc., New York, 1991), second edn.

[Ulb00] Ulbrich, M. *Funktionalanalysis und anwendungen* 2000. URL http://www.math.uni-hamburg.de/home/ulbrich/fa/skript/skriptum.pdf

[Wer00] Werner, D. *Funktionalanalysis* (Springer-Verlag, 2000). doi:10.1007/978-3-642-21017-4