Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

11. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgaben

Aufgabe 47

(a) Für jedes a_n gilt $M_a e_n = a_n e_n$ (und $e_n \in D_{M_a}$). Also ist a_n ein Eigenwert. Da $\sigma(M_a)$ abgeschlossen ist gilt $\sigma(M_a) \subseteq \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Für $\lambda \notin \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$ existiert ein $\delta > 0$ so dass $\frac{1}{|\lambda - a_n|} < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge

$$\left(\frac{1}{\lambda - a_n} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

wieder in $\ell^2 \cap D_{\lambda - M_a}$ und folglich ist $\lambda - M_a$ bijektiv.

(b) Ist $\sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < K$, so ist $D_{M_a} = \ell^2$ und $\|M_a\| < K$.

(c) Es ist

$$\|x\|_{M_a} = \|x\| + \|M_a x\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^2}$$

die 1-Norm auf $\Gamma M_a \subseteq X \oplus Y$. Diese ist nach Satz I.4.15 äquivalent zu der 2-Norm

$$(\|x\|^2 + \|M_a x\|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|^2)|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

auf ΓM_a. Ebenso wie im Fall ℓ^2 sieht man, dass

$$D_a = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|^2)|x_n|^2 < \infty\}$$

einen Banachraum bezüglich $\|(x_n)\|_a := (\sum_{n=0}^{\infty} (1 + |a_n|^2)|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ bilden. Also ist $(D_{M_a}, \|\cdot\|_{M_a})$ abgeschlossen und folglich M_a ein abgeschlossener Operator (nach dem Hinweis).

(d) Idee: die Einbettung i ist der Limes der 'Einschränkungen' $i_n\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Sei $\epsilon > 0$. Sei nun N so dass $1 + |a_n|^2 > \frac{1}{\epsilon}$ für alle $k > N$ (existiert weil $|a_n| \to \infty$ bestimmt divergiert). Für alle $n > N$ gilt:

$$\|i_n - i\| = \sup_{\|x\|_{M_a}=1} \|i_n(x) - i(x)\|_{\ell^2} = \sup_{\|x\|_{M_a}=1} \sqrt{\sum_{k>n} |x_k|^2} \leq \sup_{\|x\|_{M_a}=1} \epsilon \sqrt{\sum_{k>n} (1 + |a_n|^2)|x_k|^2} \leq \epsilon.$$

Dann ist i das Limes von i_n, die endlich-dimensionales Bild haben. Deshalb ist i kompakt.

Aufgabe 48
Sei (a_n) eine dichte Folge in K und $T\colon \ell^2 \to \ell^2$ durch $(s_n) \mapsto (a_n s_n)$ definiert. Wir bemerken $\|T\| = \sup |a_n| < \infty$, also ist T stetig. Jedes a_n ist ein Eigenwert (mit Eigenvektor e_n). Deshalb ist $K = \overline{\bigcup\{a_n\}} \subset \sigma(T)$. Um die andere Inklusion zu zeigen, sei $\lambda \notin K$. Da K abgeschlossen ist, existiert $\epsilon > 0$, so dass $|\lambda - a_n| \geq \epsilon$ für alle n gilt. Dann ist $\lambda - T$ invertierbar, und sein Inverses ist stetig (mit Norm $\leq \frac{1}{\epsilon}$). Deshalb gilt $K = \sigma(T)$.

Aufgabe 49 Seien $T, S \in L(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, und $\lambda \in Y'$. Dann gilt

$$(T+S)'(\lambda) = \lambda \circ (T+S) = \lambda \circ T + \lambda \circ S = T'(\lambda) + S'(\lambda) = (T'+S')(\lambda),$$

also ist $T \mapsto T'$ linear. Zur Isometrie: Nach Aufgabe H9 gibt es zu jedem $x \in X$ ein $\lambda \in Y'$ mit $\|\lambda\| = 1$ und $\|Tx\| = |\lambda(Tx)|$. Wir haben also

$$\|Tx\| = |\lambda(Tx)| = |(T'\lambda)(x)| \leq \|T'\lambda\|\|x\| \leq \|T'\|\|x\|$$

und somit $\|T\| \leq \|T'\|$.
Andererseits gibt es zu jedem $\lambda \in Y'$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und der Eigenschaft, dass $\|T'\lambda\| - \epsilon \leq \|(T'\lambda)(x)\|$. Damit folgt dann

$$\|T'\lambda\| - \epsilon \leq \|\lambda(Tx)\| \leq \|\lambda\|\|Tx\| \leq \|\lambda\|\|T\|\|x\| = \|\lambda\|\|T\|$$

und somit auch $\|T'\| \leq \|T\|$.

Aufgabe 50

(a) Wir nehmen $N_F = \ker(F)$ und $X_F = \operatorname{im}(F)$ (abgeschlossen, da $dim < \infty$). Satz IV.1.5 a) sagt dann, dass dies eine Banachraum-Zerlegung ist.

(b) Wir bemerken $(\mathrm{Id} - F)|_{N_F} = \mathrm{Id}|_{N_F}$. Deshalb ist $\ker(\mathrm{Id} - F) \subset \operatorname{im}(F)$ endlich-dimensional. Wir benutzen die obige Zerlegung und die Bemerkung, um zu zeigen, dass

$$X/\operatorname{im}(\mathrm{Id} - F) = X_F/\operatorname{im}\,(\mathrm{Id} - F)|_{X_F} \cong \ker(\mathrm{Id} - F).$$

Deshalb ist $\mathrm{Id} - F$ ein Fredholmoperator mit Index 0.

Aufgabe 51

(a) $\ker(UT) = \ker(T)$ und $X/\operatorname{im}(T) \cong UX/U\operatorname{im}(T)) \cong X/\operatorname{im}(UT)$. Deshalb gilt $\operatorname{ind}(UT) = \operatorname{ind} T$.

(b) Sei (T_n) Folge von stetigen linearen Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild, so dass $S = \lim T_n$. Dann existiert n so dass $\|S - T_n\| < 1$. Der Operator $\mathrm{Id} - (S - T_n)$ ist dann bijektiv. Wir berechnen $(\mathrm{Id} - (S-T_n))^{-1}(\mathrm{Id} - S) = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - (S-T_n))^{-1}T_n$, wobei $(\mathrm{Id} - (S-T_n))^{-1}T_n$ endlich-dimensionales Bild hat. Aufgabe 50 (b) sagt dann, dass $\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - (S - T_n))^{-1}T_n$ Fredholm mit Index 0 ist. Nach Aufgabenteil (a) (mit $U = \mathrm{Id} - (S - T_n)$ und $T = \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - (S - T_n))^{-1}T_n$) ist $\mathrm{Id} - S = UT$ noch Fredholm mit Index 0.