Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

10. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe

Aufgabe 41

$\Rightarrow$ $T\colon (D, \|\cdot\|_T) \to Y$ ist offen nach dem Satz über die offenen Abbildung für stetige Operatoren. Da $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_T$ ist jede $\|\cdot\|_X$-offene Menge auch $\|\cdot\|_T$-offen und somit ist D auch bzgl. $\|\cdot\|_X$ offen.

$\Leftarrow$: ist klar, da eine offene Abbildung eine ganze ε-Kugel treffen muss, und somit (nach Linearität) alles.

Aufgabe 42

(a) Nach Voraussetzung ist $\overline{T(B_X)}$ kompakt. Da die Norm stetig ist und somit kompakte Teilmengen auf kompakte (insbesondere beschränkte) Teilmengen von $\mathbb{R}$ abbildet, gilt also $\|T\|_{\text{op}} < \infty$.

(b) Ist T invertierbar, so ist $TT^{-1} = \mathrm{id}_X$ kompakt, da die Menge der kompakten Operatoren ein abgeschlossenes Ideal im Raum der beschränkten Operatoren bildet. Die Identität ist aber genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist.

Aufgabe 43

(a) Es sei $U := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ und $x := \sum_{k=1}^n x_k e_k \in U$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 < \infty$$

und $T(x) := \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k} e_{2k}$. Folglich gilt

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}|x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|^2$$

und somit ist T auf der dichten Teilmenge U beschränkt bzw. stetig mit $\|T\| \leq 1$. Also lässt sich T stetig zu einem Operator $T \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ mit $\|T\| \leq 1$ fortsetzen. Wegen $\|T\| \leq 1$ und $\|T(e_1)\| = 1$ gilt außerdem $\|T\| = 1$.

(b) Wir wollen Korollar V.1.4 benutzen, um zu zeigen, dass T kompakt ist. Nach diesem Satz genügt es eine Folge T_n von Operatoren von endlichem Rang zu finden mit $\lim_{n\to\infty} \|T-T_n\| = 0$. Hierzu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ den Operator T_n wie folgt:

$$T_n(e_k) = \begin{cases} \frac{1}{k} e_{2k} & \text{falls } k < n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Bild von T_n hat dann offenbar die Dimension $n+1$ und somit ist T_n ein Operator von endlichem Rang. Für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ gilt außerdem

$$T(x) - T_n(x) = \left(0, 0, 0, 0, \ldots, 0, \frac{x_n}{n}, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, 0, \ldots\right).$$

Hieraus erhalten wir unmittelbar die Abschätzung

$$\|T(x) - T_n(x)\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2 \leq \frac{1}{n^2} \|x\|^2.$$

Folglich ist

$$\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n}$$

und daher $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ was zu zeigen war. Der adjungierte Operator T^* ist definiert durch

$$T^*(e_n) = \begin{cases} \frac{2}{n} e_{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um dies einzusehen seien $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$. Dann ergibt eine kurze Rechnung

$$\langle x, T(y) \rangle = \Big\langle (x_1, x_2, \ldots), (0, y_1, 0, \frac{y_2}{2}, \ldots) \Big\rangle = x_2 \overline{y_1} + \frac{x_4 \overline{y_2}}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{2n} \overline{y_n}}{n}$$

sowie

$$\langle T^*(x), y \rangle = \Big\langle (x_2, \frac{x_4}{2}, \ldots), (y_1, y_2, \ldots) \Big\rangle = x_2 \overline{y_1} + \frac{x_4 \overline{y_2}}{2} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{2n} \overline{y_n}}{n}.$$

Folglich gilt $\langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle$ für alle $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 44

(a) Per Definition gilt $R_\mu(T) = (\lambda - T) R_\lambda(T) R_\mu(T)$. Außerdem gilt $R_\lambda(T) = (\mu - T) R_\mu(T) R_\lambda(T) = (\mu - T) R_\lambda(T) R_\mu(T)$ (die letzte Gleichung gilt, weil Inverse von Polynomen in T kommutieren). Zusammen folgt $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)$.

(b) Per Definition gelten $R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(\lambda - T) R_\lambda(T)$ und $R_\lambda(T) = R_\lambda(S)(\lambda - S) R_\lambda(T)$. Somit folgt $R_\lambda(S) - R_\lambda(T) = R_\lambda(S)(S - T) R_\lambda(T)$.

(c) Für die Äquivalenz von (i) und (ii): Die Rückrichtung ist trivial. Für die Hinrichtung benutzen wir $R_\lambda(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T) + R_\mu(T)$ und dass die kompakten Operatoren ein Ideal sind.

(d) Wenn T stetig ist, ist auch $\lambda \operatorname{id}_X - T$ stetig, und dann $R_\lambda(T)$ offen (Korollar der offenen Abbildung). Ein offener Operator kann nicht kompakt sein, wenn $\dim X$ unendlich ist.

Aufgabe 45

Sei $\lambda \in f(J)$ und $a \in J$ mit $f(a) = \lambda$. Dann ist $((\lambda \operatorname{id}_X - T_f)(x))(a) = 0$ für alle $x \in X$ und deshalb ist $(\lambda \operatorname{id}_X - T_f)$ nicht surjektiv, d.h. $f(J) \subseteq \sigma(T_f)$. Gilt $f(a_n) \to \lambda$, so auch $f(a_n) - \lambda \to 0$ und somit ist $(T_f - \lambda \operatorname{id}_X)^{-1}$ nicht beschränkt (falls es existiert). Also liegt λ in $\sigma(T_f)$ und folglich gilt $\overline{f(J)} \subseteq \sigma(T_f)$. Sei nun $\lambda \notin \overline{f(J)}$. Dann ist $d(\lambda, \overline{f(J)}) = \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$ und somit gilt $|\lambda - f(a)| > \epsilon$ für alle $a \in J$. Folglich ist $(T_f - \lambda \operatorname{id}_X)^{-1}$ beschränkt (durch $\frac{1}{\epsilon}$) und daher $\lambda \notin \sigma(T_f)$.

Aufgabe 46

Sei $\lambda \notin f(M)$. Wir bemerken zunächst, dass $(\lambda \operatorname{id}_X - T_f)x = y$ genau dann gilt, wenn für alle $m \in M$ die Gleichheit $x(m) = \frac{y(m)}{\lambda - f(m)}$ gilt. Da M kompakt ist, ist auch $f(M)$ kompakt und deshalb gilt $d(\lambda, f(M)) = \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Folglich ist $(T_f - \lambda \operatorname{id}_X)^{-1}$ beschränkt (durch $\frac{1}{\epsilon}$). Sei nun $\lambda \in f(M)$ und $m \in M$ mit $f(m) = \lambda$. Dann ist $((\lambda \operatorname{id}_X - T_f)(x))(m) = 0$ und deshalb ist $(\lambda \operatorname{id}_X - T_f)$ nicht surjektiv. Es gilt also die Äquivalenz:

$$\lambda \notin f(M) \iff (\lambda \operatorname{id}_X - T_f) \text{ bijektiv},$$

d.h. $\sigma(T_f) = f(M)$.