Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

9. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe

Aufgabe 36

Siehe z.B. Ulbrich-Skript `http://www.math.uni-hamburg.de/home/ulbrich/fa/skript/skriptum.pdf`, Satz Satz 4.3.3

Aufgabe 37

a) Sei $K = \ker(\mathrm{Id} - T)$. $B_K = \{x \in K : \|x\| = 1\} = \{x \in X : \|x\| = 1, Tx = x\} \subset T(B_X)$.
Dann ist $\overline{B_K}$ kompakt in $\overline{K}$. Der Satz von Riesz sagt dann, dass $\overline{K}$ endlich dimensional ist. Deswegen ist K auch endlich dimensional.

b) Mit dem Satz über die offenen Abbildung folgt die stetigkeit von $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$ wie wie in (oder aus) Aufgabe 24.

c) $d(\mathrm{Id}, K(X)) = \inf_{T \in K(X)} \|\mathrm{Id} - T\| \leq 1$, da $0 \in K(X)$.
$\|\mathrm{Id} - T\| < 1 \Longrightarrow \mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - T)$ invertierbar (cf. Aufgabe 24). So ist T invertierbar, deshalb offen, deshalb (in unendlicher Dimension) nicht kompakt .

Jetzt Teil (2) ohne den Satz über die offene Abildung:

Sei $\mathrm{Id} - T$ bijektiv. Wir zeigen, dass $\mathrm{Id} - T$ offen ist.
Sei (x_n), so dass $\|x_n\| = 1$ und $x_n - Tx_n$ gegen 0 konvergiert. T ist kompakt und x_n ist beschränkt, so konvergiert eine Teilfolge Tx_{n_k}. Die Teilfolge x_{n_k} ist dann auch konvergent, gegen ein Element x.
Aber $\|x\| = 1$ und $x - Tx = 0$, was ein Widerspruch zu der Bijektivität von $\mathrm{Id} - T$ ist.
Deswegen ist 0 kein Haüfungspunkt einer Folge in S_X, d.h. $0 \notin \overline{(\mathrm{Id} - T)(S_X)}$.
So existiert $\epsilon > 0$, so dass $\|(\mathrm{Id} - T)(x)\| \geq \epsilon$ für $\|x\| = 1$. Dank der Bijektivität von $\mathrm{Id} - T$ ist es nun klar, dass $\mathrm{Id} - T$ offen ist.

Aufgabe 38

$\Longrightarrow$: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B_X für $\lambda = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ (o.B.d.A. $\lambda \neq 0$). Also ist $(T(\lambda x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem kompakten Raum $\overline{T(B_X)}$ und besitzt somit eine konvergente Teilfolge. Also besitzt auch $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda^{-1}(T(\lambda x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, da die Skalarmultiplikation stetig ist.
$\Longleftarrow$: $\overline{T(B_X)}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Ist also $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{T(B_X)}$. Es existieren also Elemente $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $Tx_n = y_n$ (warum genau?). Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist hat also $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 39

a) Sei ι die Inklusion.

   Wir bemerken $\iota(B_{C^1}) \subset B_\infty$, deshalb ist $\iota(B_{C^1})$ beschränkt.

   Für alle $s, t \in [0, 1]$ und $f \in \iota(B_{C^1})$ gilt $|f(s) - f(t)| \leq |s - t| \|f'\|_\infty \leq |s - t|$. So können wir $\delta = \epsilon$ für die gleichgradige Stetigkeit nehmen.

   Der Satz von Arzela-Ascoli sagt dann, dass $\iota(B_{C^1})$ relativkompakt ist, und deswegen ist ι kompakt.

b) Seien $\epsilon > 0$ und $f \in M$. f ist gleichmäßig stetig, deshalb $\exists \delta_f > 0, d(s,t) < \delta_f \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \frac{\epsilon}{3}$. Sei jetzt $g \in M$ mit $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{3}$.

$$d(s,t) < \delta_f \Rightarrow |g(s) - g(t)| \leq |g(s) - f(s)| + |f(s) - f(t)| + |f(t) - g(t)| < 3\frac{\epsilon}{3}.$$

   d.h. eine Abbildung g in $B_{\frac{\epsilon}{3}}(f)$ hat die Eigenschaft: $d(s,t) < \delta_f \Rightarrow |g(s) - g(t)| < \epsilon$.

   Die Menge $\bigcup\{B_{\frac{\epsilon}{3}}(f) : f \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von $\overline{M}$ kompakt. Seien dann $f_1, \ldots, f_n$, so dass $\bigcup\{B_{\frac{\epsilon}{3}}(f) : f \in M\}$ noch M überdeckt. Sei $\delta = \min \delta_{f_i}$. Für dieses δ ist M gleichgradig stetig.

Aufgabe 40

Arzela-Ascoli benutzen