Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

8. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe

Aufgabe 31

(a) Wir wollen zunächst zeigen, dass die Skalarmultiplikation stetig in $(\lambda, 0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$ ist. Zuallererst bemerken wir, dass $\lambda \cdot 0 = 0$. Sei also U eine offene Nullumgebung in X. Nach Voraussetzung enthält diese eine offene konvexe Nullumgebung W, die invariant unter Multiplikation mit Skalaren von Betrag 1 ist. Aus deren Konvexität folgt insbesondere $\lambda \cdot W \subset W$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ durch Konvexkombination von x mit 0. Mit der zusätzlichen Eigenschaft von W folgt dann aber auch $\lambda \cdot W \subset W$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$, denn $\lambda = |\lambda|\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ und also gilt $\lambda \cdot W = |\lambda| \cdot (\alpha \cdot W) \subset |\lambda| \cdot W \subset W$, wobei die erste Inklusion eine Folge der Invarianz von W unter Multiplikation mit Skalaren von Betrag 1, die zweite einer der obigen Folgerung aus der Konvexität von W ist.

Mit der Invarianz der Metrik folgt dann auch die Stetigkeit in (λ, x) für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$. Wir wissen außerdem bereits, dass Skalarmultiplikation mit $n \in \mathbb{N}$ stetig ist vgl. Übungsblatt 2 Aufgabe P6. Damit folgt die Stetigkeit der Skalarmultiplikation in (λ, x) für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(b) Sei U eine offene Nullumgebung in X. Nach Voraussetzung enthält diese eine konvexe offene Nullumgebung V. Nun folgt aus der Invarianz der Metrik, dass Skalarmultiplikation mit -1 stetig ist, also ist Skalarmultiplikation mit -1 ein stetiger Isomorphismus mit stetigem Inversem (Homömorphismus). Zusätzlich ist sie auch linear und somit ist auch $-V$ eine offene konvexe Nullumgebung. Daraus folgt nun, dass der Schnitt $W := -V \cap V$ eine offene konvexe Nullumgebung mit $W = -W$ ist. Damit folgt die Aussage aus Aufgabenteil (a).

Aufgabe 32

Die Summe $\sum_{i\in I} |c_i|^2$ definiert durch $\sum_{i_k,k\in\mathbb{N}} |c_{i_k}|^2$ für eine Aufzählung i_k der Indizes, so dass $c_{i_k} \neq 0$ ist. Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Aufzählung, da die Summe absolut konvergiert.

Wir zeigen jetzt die Äquivalenz der Aussagen (a) und (b). Die Richtung (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial. Für die andere Richtung betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_n := \left\{ i \in I : |c_i| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Jede dieser Mengen ist endlich, denn sonst wäre die Aussage (a) falsch. Daher ist die Vereinigungn aller dieser Mengen höchstens abzählbar. Wegen

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ i \in I : |c_i| > \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} = \{ i \in I : |c_i| \neq 0 \},$$

ist die Summe $\sum_{i\in I}|c_i|^2$ insbesondere endlich.

Aufgabe 33

(a) Sei $S=(e_i)_{i\in I}$ eine orthornormale Basis. Da $\dim(H)=\infty$ existiert eine Injektion $\iota\colon \mathbb{N}\hookrightarrow S$. Da die Abbildung $\ell^2(\mathbb{N})\to H$, $e_n\mapsto e_{\iota(n)}$ (linear und stetig fortgesetzt) ebenfalls injektiv ist reicht es aus den Fall $H=\ell^2(\mathbb{N})$ zu betrachten. Da $\ell^2(\mathbb{N})$ insbesondere ein Banachraum ist kann er aber keine abzählbare Dimension haben (vgl. Aufgabe 25).

(b) Seien zunächst $S=(e_i)_{i\in I}$ und $T=(f_j)_{j\in J}$ die jeweiligen Orthonormalbasen und $\alpha\colon I\to J$ bijektiv. Die lineare und stetige Fortsetung $\Phi\colon H\to H'$ von $e_i\mapsto f_{\alpha(i)}$ hat als Inverses die lineare und stetige Fortsetzung von $f_j\mapsto e_{\alpha^{-1}(j)}$ (die Komposition beider Abbildung ist die Identität auf der dichten Teilmenge $\operatorname{span} S$). Ausserdem ist Φ eine Isometrie, da

$$\|x\|^2=\Big\|\sum_{i\in I}x_ie_i\Big\|^2=\sum_{i\in I}|x_i|^2=\Big\|\sum_{i\in I}x_if_{\alpha(i)}\Big\|^2=\Big\|\sum_{i\in I}x_i\Phi(e_i)\Big\|^2=\|\Phi(x)\|^2.$$

für $x_i:=\langle x,e_i\rangle$ (vgl. Satz IV.4.11). Ist umgekehrt $\Phi:H\to H'$ eine isometrische Isomorphie, dann sieht man leicht, dass $(\Phi(e_i))_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H' ist. Nach Satz IV.4.13 gilt somit $|S|=|T|$.

Aufgabe 34

(a) Das ist klar und leicht nachzurechnen. Um zu einzusehen, dass die Menge $(e_i\otimes f_j)_{i\in I,j\in J}$ wirklich eine Orthonormalbasis und nicht nur ein Orthonormalsystem ist, bemerken wir dass der zugehörige Span nach Konstruktion dicht in der Vervollständigung liegt.

(b) Es genügt zu zeigen, dass die Funktionen $h_{i,j}:=m_{p,q}(e_i\otimes f_j)$, $i\in I$, $j\in J$, eine Orthogonalbasis von $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ bilden. Hierzu benutzen wir mehrmals den Satz von Fubini. Wegen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{p+q}}|h_{i,j}(x,y)|^2dxdy&=\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q}|e_i(x)f_j(y)|^2dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}^p}|e_i(x)|^2dx\cdot\int_{\mathbb{R}^q}|f_j(y)|^2dy=1,\end{aligned}$$

folgt zunächst, dass die Abbildung $m_{p,q}$ wohldefiniert ist und die Funktionen h_{ij} alle Norm 1 haben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\langle h_{i,j},h_{k,l}\rangle&=\int_{\mathbb{R}^{p+q}}e_i(x)f_j(y)\overline{e_k(x)f_l(y)}dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}^p}e_i(x)\overline{e_k(x)}dx\cdot\int_{\mathbb{R}^q}f_j(y)\overline{f_l(y)}dy\\&=\langle e_i,e_k\rangle\langle f_j,f_l\rangle=0\end{aligned}$$

für $(i,j)\neq(k,l)$. Somit bilden die Funktionen h_{ij} ein Orthogonalsystem von $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$. Sei nun $\psi\in L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ eine Funktion, welche orthogonal auf allen Funktionen h_{ij} steht. Dann gilt wieder nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^{p+q}} (h_{ij}\psi)(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q} e_i(x)f_j(y)\psi(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} e_i(x)\left(\int_{\mathbb{R}^q}\psi(x,y)\cdot f_j(y)dy\right)dy.
\end{aligned}$$

Weil $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthogonalbasis von $L^2(\mathbb{R}^p)$ ist, folgt daraus, dass die Funktion in der Klammer für alle $x \in \mathbb{R}^p$ verschwinden muss (fast überall), d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^q}\psi(x,y)\cdot f_j(y)dy = 0.$$

Weil aber $(f_j)_{j\in J}$ eine Orthogonalbasis von $L^2(\mathbb{R}^q)$ ist, folgt außerdem, dass die Funktion ψ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^{p+q}$ (fast überall) verschwindet.

Aufgabe 35

Zunächst zeigen wir, dass die genannten Funktionen ein Orthonormalsystem bilden. Offensichtlich ist 1 orthogonal zu den übrigen Funktionen (da sin und cos periodisch sind) und $\langle 1,1\rangle = 1$.
Mit dem Sinus-Additionstheorem folgt

$$\sin(2\pi mx)\cos(2\pi nx) = \frac{\cos(2\pi(m+n)x)}{-4\pi(m+n)} + \frac{\cos(2\pi(m-n)x)}{-4\pi(m-n)}.$$

Insbesondere folgt mit der Periodizität der Sinus-Funktion, dass s_m und c_n für $n \neq m$ orthogonal sind. Aus dem Kosinus-Additionstheorem folgen

$$\sin(2\pi mx)\sin(2\pi nx) = \frac{\cos(2\pi(m-n)x)}{2} - \frac{\cos(2\pi(m+n)x)}{2}$$

und

$$\cos(2\pi mx)\cos(2\pi nx) = \frac{\cos(2\pi(m-n)x)}{2} + \frac{\cos(2\pi(m+n)x)}{2}.$$

Mit der Periodizität der Sinus-Funktion folgt somit wiederum die Orthogonalität von s_m und s_n bzw. c_m und c_n für $n \neq m$. Zur Orthogonalität von s_n und c_n benutzen wir

$$\sin(2\pi nx)\cos(2\pi nx) = \frac{\sin(4\pi nx)}{2}$$

und berechnen damit

$$\langle s_n, c_m\rangle = 2\int_0^1 \sin(2\pi nx)\cos(2\pi nx)dx = \left.\frac{\cos(4\pi nx)}{4\pi n}\right|_0^1 = 0.$$

Andererseits folgt mit

$$\cos^2(2\pi nx) = \frac{1+\cos(4\pi nx)}{2},\ \sin^2(2\pi nx) = \frac{1-\cos(4\pi nx)}{2},$$

dass

$$\langle c_n, c_n \rangle = 2\int_0^1 \cos^2(2\pi nx)dx = (x + \frac{\sin(4\pi nx)}{4\pi n})\Big|_0^1 = 1$$

und

$$\langle s_n, s_n \rangle = 2\int_0^1 \sin^2(2\pi nx)dx = (x - \frac{\sin(4\pi nx)}{4\pi n})\Big|_0^1 = 1.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\{1, s_1, c_1, s_2, c_2, ...\}$ ein Orthogonalsystem bildet.
Dass dieses Orthonormalsystem tatsächlich eine Orthonormalbasis darstellt, dass also die trigonometrischen Polynome dicht in dem metrischen Raum $L^2_{\text{per}}[0,1]$ liegen (vgl. Satz IV.4.11), folgt nun aus dem Hinweis und einer entsprechend allgemeinen Formulierung des Approximationssatzes von Stone-Weierstraß (dabei brauchen wir Periodizität, damit sin und cos Punkte trennen; die Abgeschlossenheit unter Produktbildung folgt aus den Additionstheoremen).