Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

7. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe

Aufgabe 26
Dies ist eine direkte Rechnung, sie steht z.B. im Werner in Kapitel V.1.

Aufgabe 27

(a) Es gilt
$$A \subseteq B^{\perp} \Leftrightarrow \langle a, b\rangle = 0 \text{ für alle } a \in A, b \in B \Leftrightarrow B \subseteq A^{\perp}.$$

(b) Es gilt
$$A \subseteq B \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow (\langle x, b\rangle = 0\ \forall b \in B \Rightarrow \langle x, a\rangle = 0\ \forall a \in A \subseteq B) \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}.$$

(c) Nach Teilaufgabe (a) gilt $A \subseteq A^{\perp\perp} \Leftrightarrow A^{\perp} \subseteq A^{\perp}$ und daher folgt aus Teilaufgabe (b) $A^{\perp\perp\perp} \subseteq A^{\perp}$. Andererseits folgt aus Teilaufgabe (a) $A^{\perp} \subseteq A^{\perp\perp\perp} \Leftrightarrow A^{\perp\perp} \subseteq A^{\perp\perp}$ und somit schließlich $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.

Aufgabe 28
Die Richtung "$\Rightarrow$" ist trivial. Für die andere Richtung benutzen wir
$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, x_n\rangle.$$
Andererseits konvergiert $\mathrm{Re}\langle x, x_n\rangle$ gegen $\|x\|^2$, weil x_n schwach gegen x konvergiert und $\langle x, -\rangle$ ein stetiges Funktional ist. Somit konvergiert $\|x_n - x\|^2$ gegen 0, d.h. x_n konvergiert gegen x im gewöhnlichen Sinn.

Aufgabe 29
Sei $x \in H$ beliebig. Zunächst zeigen wir, dass der Punkt $P_K(x) \in K$ eindeutig durch die Eigenschaft $\mathrm{Re}\langle x - P_K(x), v - P_K(x)\rangle \leq 0$ für alle $v \in K$ charakterisiert ist. Sei hierzu $z \in K$ ein Punkt, der einer solchen Ungleichung genügt. Dann gilt $\|z - x\| = \inf_{v \in K} \|v - x\|$, weil
$$\begin{aligned} \|v - x\|^2 &= \|(v - z) + (z - x)\|^2 \\ &= \|v - z\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v - z, z - x\rangle + \|z - x\|^2 \\ &\geq \|z - x\|^2 \end{aligned}$$

für alle $v \in K$ gilt. Sei andererseits $t \in (0,1]$ und $v_t := (1-t)z + tv \in K$ für $v \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 &\leq \|v_t - x\|^2 \\ &= \langle z - x + t(v-z) - x, z - x + t(v-z)\rangle \\ &= \|z-x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x - z, t(z-v)\rangle + t^2\|z-v\|^2 \end{aligned}$$

und folglich $\mathrm{Re}\langle x-z, v-z\rangle \leq \frac{t}{2}\|z-v\|^2$ für alle $t \in (0,1]$. Somit ist $\mathrm{Re}\langle x-z, v-z\rangle \leq 0$ für alle $v \in K$. Mit dieser Charakterisierung gelten also für beliebig gewählte Elemente $x, y \in H$ $\mathrm{Re}\langle x - P_K(x), v - P_K(x)\rangle \leq 0$ und $\mathrm{Re}\langle y - P_K(y), v - P_K(y)\rangle \leq 0$ für alle $v \in K$. Wir verwenden nun insbesondere $v_1 := P_K(y)$ in der ersten Ungleichung und $v_2 := P_K(x)$ in der zweiten. Dann gelten $\mathrm{Re}\langle x - P_K(x), P_K(y) - P_K(x)\rangle \leq 0$ und $\mathrm{Re}\langle y - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\rangle \leq 0$. Zusammen folgt dann

$$\langle P_K(x) - P_K(y), P_K(x) - P_K(y)\rangle \leq \mathrm{Re}\langle x - y, P_K(x) - P_K(y)\rangle$$

und deshalb gilt wie gewünscht $\|P_K(x) - P_K(y)\|^2 \leq \|x-y\|\|P_K(x) - P_K(y)\|$.

Aufgabe 30

(a) Aus Teil (ii) der Definition folgt für zwei Kerne k und k' dass $\langle f, k_s - k'_s\rangle = 0$ für alle $s \in S$ und alle $f \in H$, also $k_s - k'_s = 0$ für alle $s \in S$ nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz. Das heisst aber schon, dass $k(s,t) = k_s(t) = k'_s(t) = k'(s,t)$ für alle $s, t \in S$, also $k = k'$.

(b) Existiert k, so ist $f \mapsto \langle f, k_s\rangle = f(s)$ stetig. Ist andererseits $f \mapsto f(s)$ stetig, so existiert nach dem Darstellungssatz ein $x_s \in H$ mit $f(s) = \langle f, x_s\rangle$ und wir können $k(s,t) := x_s(t)$ setzen.

(c) Gilt $\langle f, k_s\rangle = 0$ für alle $s \in S$, so ist $f(s) = 0$ für alle $s \in S$ nach Teil (ii) der Definition. Also ist $\mathrm{span}\{k_s : s \in S\}^\perp = \{0\}$ und somit $\overline{\mathrm{span}\{k_s : s \in S\}} = H$ vgl. Korollar IV.3.6.

(d) Nach Voraussetzung muss $k_s(t) = \alpha_s + \beta_s t$ für $\alpha_s \in \mathbb{K}$ und $\beta_s \in \mathbb{K}$ gelten, ebenso wie

$$\langle a + bt, \alpha_s + \beta_s t\rangle = a + bs$$

für alle $a, b \in \mathbb{K}$ und $s \in [0,1]$. Aus

$$\langle a + bt, \alpha_s + \beta_s t\rangle = \int_0^1 (a+bt)\cdot(\bar{\alpha}_s + \bar{\beta}_s t)dt = a(\bar{\alpha}_s + \frac{1}{2}\bar{\beta}_s) + b(\frac{1}{2}\bar{\alpha}_s + \frac{1}{3}\bar{\beta}_s)$$

und Koeffizientenvergleich ergibt sich damit $\beta_s = 12(s - \frac{1}{2})$ und $\alpha_s = -6s + 4$, also

$$k(s,t) = 4 - 6(s+t) + 12st.$$