Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

6. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgaben

Aufgabe 25
Es sei $B := \{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Vektorraumbasis von X, also ist B eine linear unabhängige Teilmenge und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$.

a) Da $X_n := \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$ ein endlich-dimensionaler UVR ist, ist er insbesondere abgeschlossen. Da X_n aber auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ nicht ganz X ist, kann X_n keine ε-Kugel enthalten. Also ist X_n nirgends dicht und somit ist X dünn. Das ist aber ein Widerspruch zu dem Satz von Baire.

b) Wir betrachten die linear Abbildung $T\colon X \to X$, die durch $e_i \mapsto \frac{1}{i}e_i$ eindeutig festgelegt ist. Dann ist T abgeschlossen, denn gilt $x_k \to x$ und $Tx_k \to y$, dann gilt $\operatorname{pr}_{X_n}(x_k) \to \operatorname{pr}_{X_n}(x)$ und $\operatorname{pr}_{X_n}(Tx_k) \to \operatorname{pr}_{X_k}(y)$, da X_n endlich-dimensional (und somit komplementiert) ist. Daraus folgt $Tx = y$ und da X als Banachraum angenommen ist, ist T stetig. Offenbar ist T surjektiv, aber die Umkehrabbildung, die durch $e_i \mapsto i \cdot e_i$ gegeben ist, ist unbeschränkt. Das ist ein Widerspruch zum Satz der offenen Abbildung.

c) Die im vorigen Teil sieht man, dass der Operator $S\colon X \to X$, gegeben durch $e_i \mapsto i \cdot e_i$ abgeschlossen ist. Dieser ist aber unbeschränkt, was ein Widerspruch zum Satz den abgeschlossenen Graphen ist.

Obige Argumente sind davon unabhängig, ob man mit normen oder Metriken argumentiert, die funktionieren also auch für F-Räume.