Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

2. Übungsblatt – Lösungsskizze

Präsenzübungen

Aufgabe P6

Gelte $x_n \to x$ und $y_n \to y$, also $d(x_n, x) \to 0$ und $d(y_n, y) \to 0$. Dann wollen wir zeigen, dass $x_n + y_n \to x + y$ gilt, was äquivalent zu $d(x_n + y_n, x + y) \to 0$ ist. Aus der Invarianz der Metrik, der Dreiecksungleichung und der Stetigkeit von $+$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ folgt

$$d(x_n + y_n, x + y) \leq d(x_n + y_n, x_n + y) + d(x_n + y, x + y) = d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0.$$

Wie im Beweis von Satz I.2.4 sieht man, dass $d(\lambda x, 0) \leq \lambda d(x, 0)$ für $\lambda \in \mathbb{N}$ gilt. Also folgt aus $x_n \to 0$, dass $d(\lambda x_n, 0) \to 0$ und somit ist $x \mapsto \lambda x$ stetig in 0. Da $x \mapsto \lambda x$ auch linear ist, folgt aus Satz I.2.4, dass $x \mapsto \lambda x$ überall stetig ist.

Aufgabe P7

(1) $\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in X\}$, insbesondere gilt $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$. Mit $M_0 = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ folgt daraus direkt $M_0 \leq \|T\|$. Gleichzeitig haben wir $\|Tx\| \leq M_0\|x\| \ \forall x \in X$ (für $\|x\| = 0$ ist das trivial) und also $\|T\| \leq M_0$, insgesamt $\|T\| = M_0$.
Die Gleichheit $\sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$ folgt mit der Linearität der Norm $\|\cdot\|$ und T, da

$$\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| = \|T(\frac{1}{\|x\|}x)\| \quad \text{und} \quad \{\frac{x}{\|x\|} \mid x \neq 0\} = \{x \mid \|x\| = 1\}\,.$$

Schließlich gilt für $\|x\| \leq 1$ unter Benutzung der Linearität von T, dass $\|Tx\| \leq T(\frac{1}{\|x\|}x)$, also $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.
(2) Wir haben $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$. Für $\|x\| \leq 1$ gilt insbesondere $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|$, also ist $\|S\|\|T\|$ eine obere Schranke und die Behauptung folgt.
(3) Die Bedingungen $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ und ($\|T\| = 0 \Longrightarrow T = 0$) sind klar.
Sei x mit $\|x\| \leq 1$. Dann gilt $\|(S + T)x\| = \|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \leq \|S\| + \|T\|$. Also ist $\|S\| + \|T\|$ eine obere Schranke und somit gilt $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Aufgabe P8

(1) Betrachte die Folge $(P_n)_n$ von Polynomen $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x^k$. Mit der Konvergenz der geometrischen Reihe sieht man einfach, dass dies eine Cauchy-Folge ist. Gleichzeitig gilt für ein beliebiges Polynom P und für alle $m > \deg P$, dass $\|P - P_m\| \geq 2^{-(\deg P+1)}$. Also kann die Cauchy-Folge $(P_n)_n$ nicht konvergent sein.

(2) Wie in der Vorlesung ist der Ableitungsoperator $P \mapsto P'$ nicht stetig, denn $\|x^n\| = 1$ und $\|nx^{n-1}\| = n$ für $n > 0$. Ein anderes Beispiel ist durch $(TP)(x) = P(x+1)$ gegeben, denn wieder gilt $\|x^n\| = 1$ und $\|(x+1)^n\| = 2^n$ (Summe der Binomialkoeffizienten).

(3) Der Operator T ist stetig: Für $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist $(TP)(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$. Somit gilt $\|TP\| \leq \|P\|$. Und für $P = 1$ gilt $\|P\| = 1$ und $(TP)(x) = x$ und damit $\|TP\| = 1$. Also ist $\|T\| = 1$.

Aufgabe P9

Da U zu einem $\mathbb{K}^n$ isomorph ist, der vollständig ist und für den alle Normen äquivalent sind, ist U insbesondere vollständig und nach Aufgabe H1 also abgeschlossen.

Hausübungen

Aufgabe H4

(1) Induktion. Die Gleichung ist wahr für $n = 0$. Für den Induktionsschritt multiplizieren wir von rechts mit T und benutzen, dass $ST = \mathrm{Id} + TS$.

(2) Nach der Dreiecksungleichung und Aufgabe P7(2) gilt $(n+1)\|T^n\| \leq \|ST^{n+1}\| + \|T^{n+1}S\| \leq \|S\|\|T\|\|T^n\| + \|S\|\|T\|\|T^n\|$ für alle n. Wenn $\|T^n\| \neq 0$ gilt, dann gilt $n+1 \leq 2\|S\|\|T\|$ für alle n und deswegen ist mindestens eine der beiden Normen unendlich. Um zu beweisen, dass $T^n \neq 0$ immer gilt, bemerken wir, dass die Gleichheit $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$ sonst auch $T^{n-1} = 0$ implizieren würde. Induktiv würde T also auch null sein, und das wäre ein Widerspruch zu $ST - TS = \mathrm{Id}$.

Aufgabe H5

(1) Für beliebiges $a \in A$ und alle $x, y \in X$ gilt $\|y-a\| \leq \|x-y\|+\|x-a\|$ und $\|x-a\| \leq \|x-y\|+\|y-a\|$, also auch

$$d(y, A) \leq \|x-y\| + d(x, A) \quad \text{und} \quad d(x, A) \leq \|x-y\| + d(y, A)\,.$$

Damit haben wir $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x-y\|$ und $d(-, A)$ ist sogar Lipschitz-stetig.

(2) Sei $x' \in X \setminus U$. Dann ist $d := d(x', U) > 0$ (da $X \setminus U$ offen und also eine ϵ-Umgebung von x' enthält) und es existiert eine Folge $(u_n) \in U$ mit der Eigenschaft, dass $d \leq \|x' - u_n\| < d + \frac{1}{n}$ (andernfalls wäre d kein Infimum). Die u_n liegen in der kompakten Menge $\overline{B(x', d+1)}$ (hier benutzen wir die endliche Dimension und den Satz von Heine-Borel). Somit existiert eine konvergente Teilfolge u_{n_k} mit Grenzwert u_∞. Offensichtlich gilt $\|x' - u_\infty\| = d$, weil $u \mapsto \|x' - u\|$ stetig ist. Wir setzen dann $x = \frac{x' - u_\infty}{\|x' - u_\infty\|}$ wie im Beweis des Riesz'schen Lemmas. Dann gilt $\|x\| = 1$ und

$$d(x, U) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\|x' - u_\infty\|} d(x' - u_{n_k}, U) = \frac{1}{d} \lim_{n \to \infty} d(x', U) = \frac{d}{d} = 1$$

wegen der Stetigkeit von $u \mapsto \frac{1}{\|x' - u_\infty\|}(x' - u)$ und $x \mapsto d(x, U)$.

Aufgabe H6

Da die Dimension von X unendlich ist, existiert eine Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von linear unabhängigen Vektoren. Wenn $\|x_n\| \neq 1$ gilt, dann ersetzen wir x_n durch $\frac{x_n}{\|x_n\|}$. Sei nun V derart, dass $X = \mathrm{span}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \oplus V$.

Wir definieren $T\colon X \to \mathbb{R}$ als die lineare Abbildung mit $T(x_n) = n$ für alle n und $T(x) = 0$ für alle Vektoren $x \in V$.

Die Operatornorm von T ist dann grösser als alle n, deshalb ist T nicht stetig.