Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

12. Übungsblatt

Aufgabe

Aufgabe 52
Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass der Multiplikationsoperator

$$M_a \colon \ell^2 \supseteq D_{M_a} \to \ell^2, \quad M_a((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

aus Aufgabe 47 kompakte Resolvente hat. Zur Erinnerung:

$$D_{M_a} := \{x \in \ell^2 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_k x_k|^2 < \infty\}.$$

Aufgabe 53
Seien H ein Hilbertraum, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Sei

$$Tx := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

(1) Zeigen Sie, dass dies einen stetigen normalen Operator definiert.

(2) Zeigen Sie, dass dieser Operator genau dann kompakt ist, falls $\lambda_n \to 0$ für $n \to \infty$.

(3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von T.

Aufgabe 54
Für $h \in L^2[0,1]$, sei

$$T_h \colon L^2[0,1] \to L^2[0,1], (T_h f)(s) = \int_0^1 f(t) h(s-t) dt,$$

wobei wir hier nicht zwischen h und der periodischen Fortsetzung unterscheiden.

(1) Zeigen Sie, dass dies einen normalen und kompakten Operator definiert.

(2) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von T_h durch Entwicklung von h in der Orthonormalbasis $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ von $L^2[0,1]$, wobei $e_k(t) = e^{2\pi ikt}$.

(3) Bestimmen Sie die Spektralzerlegung von T_h.

Hinweis: Womöglich ist es einfacher, die Aufgabe in einer anderen Reihenfolge zu lösen.

Aufgabe 55

Wir betrachten den *Shiftoperator*

$$T\colon \ell^\infty \to \ell^\infty,\ (s_1, s_2, ...) \mapsto (s_2, s_3, ...).$$

(1) Bestimmen Sie das Spektrum der Einschränkung von T auf ℓ^1 sowie des dualen Operators $T'\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ (beachten Sie $(\ell^1)' \cong \ell^\infty$).

(2) Bestimmen Sie das Spektrum der Einschränkung von T auf ℓ^2 sowie des adjungierten Operators $T^*\colon \ell^2 \to \ell^2$ (beachten Sie $(\ell^2)' \cong \ell^2$).

Aufgabe 56

Es sei $p \in C^1[0,1]$ mit $p > 0$ und $f \in C[0,1]$. Das Sturm–Liouville Problem lautet: Finden Sie eine Funktion u, die der Differentialgleichung

$$-(pu')' = f \quad \text{auf} \quad (0,1) \tag{1}$$

und den gemischten Randbedingungen $u(0) = u'(1) = 0$ genügt. Stellen Sie zunächst die schwache Formulierung des gemischten Randwertproblems auf. Beweisen Sie dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung durch die Wahl eines geeigneten Hilbertraums und die Anwendung des Satzes von Lax–Milgram.

Hinweis: Verwenden Sie die Poincaré-Ungleichung: Ist $u \in H^1(0,1)$ mit $u(0) = 0$ oder $u(1) = 0$, dann folgt

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \le \int_0^1 |u'(x)|^2 dx.$$