Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

9. Übungsblatt

Aufgabe

Aufgabe 36
Beweisen Sie:

Lemma (Lax-Milgram): Sei H ein Hilbertraum und $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften

a) a ist eine Sesquilinearform, also $a(\cdot, y)\colon H \to \mathbb{K}$ ist linear für alle $y \in H$ und $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$ für alle $x, y \in H$.

b) a ist stetig, es existiert also ein $0 \leq C < \infty$ mit $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$ für all $x, y \in H$.

c) a ist koerziv, es existiert also ein $0 < \gamma \leq C$ (wobei C das gleiche wie in b) ist), so dass $\mathrm{Re}(a(x,x)) \geq \gamma\|x\|^2$ für alle $x \in H$.

Dann existiert ein eindeutiges $A \in L(H,H)$, so dass $a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt. Ferner ist A bijektiv und es gilt

$$\|A\| \leq C \quad \text{und} \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fréchet-Ries auf das lineare Funktional $a(\cdot, y)$ an um Ay zu konstruieren.

Bemerkung: Dieses Lemma spielt für den Beweis der Existenz von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Aufgabe 37
Sei X ein Banachraum und $T \in K(X)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Der Kern von $\mathrm{Id} - T$ ist endlich-dimensional.

b) Wenn $\mathrm{Id} - T$ bijektiv ist, ist $(\mathrm{Id} - T)^{-1}$ stetig.

c) Falls X unendlichdimensional ist, gilt $d(\mathrm{Id}, K(X)) = 1$.

Zeigen Sie außerdem, dass man die Aussage (2) auch beweisen kann *ohne* den Satz über die offene Abbildung (bzw. eine seiner Folgerungen) zu verwenden.

Bitte wenden!

Aufgabe 38

Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) T ist kompakt.

b) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X hat $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Aufgabe 39

a) Sei $C^1[0,1]$ mit seiner üblichen Norm $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die Inklusion $(C^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ kompakt ist.

   Hinweis: Arzela-Ascoli.

b) Sei $M \subset C[a,b]$ relativkompakt. Zeigen Sie, dass M gleichgradig stetig ist.

Aufgabe 40

Sei $k \in C([0,1]^2)$. Der Integraloperator $T_k \colon C[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch

$$(T_k x)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)dt$$

heisst *Volterrascher Integraloperator*. Zeigen Sie, dass T_k wohldefiniert und kompakt ist.