# Übung zur Funktionalanalysis
# SoSe 2015

### 7. Übungsblatt

---

### Aufgaben

**Aufgabe P26**

(a) Es sei $X$ ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $X$. Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf $X$ definiert, so dass die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

(b) Sei umgekehrt $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so dass die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie, dass die Polarisationsformel

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ein Skalarprodukt auf $X$ definiert.

**Aufgabe P27**

Es sei $X$ ein Prähilbertraum und $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $A \subseteq B^\perp$ ist äquivalent zu $B \subseteq A^\perp$.

(b) $A \subseteq B$ impliziert $B^\perp \subseteq A^\perp$.

(c) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$

**Aufgabe P28**

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum $X$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in X$ falls für alle $x' \in X'$ die Folge $(x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x'(x)$ konvergiert. Zeigen Sie, dass in einem Hilbertraum eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann (im gewöhnlichen Sinn) gegen $x$ konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen $x$ konvergiert und $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\|x\|$ konvergiert.

### Aufgabe P29

Sei $H$ ein Hilbertraum und $K$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge. Sei $P_K\colon H \to K$ die Abbildung die nach Satz IV.3.2 eindeutig durch $\|P_K(x) - x\| = \inf_{y\in K} \|y - x\|$ gegeben ist (die sogenannte *metrische Projektion* auf $K$). Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in H$ gilt.

### Aufgabe P30

Sei $S$ eine Menge und $H$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Map}(S, \mathbb{K})$. Ferner sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $H$, das $H$ zu einem Hilbertraum macht. Dann heißt eine Funktion $k\colon S \times S \to \mathbb{K}$ *reproduzierender Kern* von $H$ falls

(i) $k_s \in H$ für alle $s \in S$, wobei $k_s\colon S \to \mathbb{K}$ durch $k_s(t) := k(s,t)$ definiert ist, und

(ii) $\langle f, k_s\rangle = f(s)$ für alle $f \in H$ und $s \in S$ gilt.

Seien $S$, $H$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie zuvor beschrieben. Zeigen Sie:

(a) Ein reproduzierende Kern ist, falls er existiert, eindeutig durch $S$, $H$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ festgelegt.

(b) Wenn $S$, $H$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gegeben sind, dann existiert ein reproduzierender Kern genau dann, wenn die Auswertungsfunktionale $f \mapsto f(s)$ für alle $s \in S$ stetig sind.

(c) Wenn $k$ ein reproduzierender Kern ist, dann gilt $\overline{\mathrm{span}\{k_s : s \in S\}} = H$.

Die beiden Funktionen $t \mapsto 1$ und $t \mapsto t$ spannen einen 2-dimensionalen Unterraum $K$ von $\mathrm{Map}([0,1], \mathbb{K})$ auf und das $L^2$-Produkt definiert hierauf ein Skalarprodukt.

(d) Bestimmen Sie den entsprechenden reproduzierenden Kern.